Der goldene Schnitt

$$\sinh(\ln \varphi) = \frac{1}{2}$$

als vermutliche Lösung der Riemannschen Vermutung

von
Dr. Gabriel Foco

Wien 2009

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis 2
Zeta 3
Gamma 6
Sinh 11
Phi 16
Ausblick 32
Hilfsmaterialien 34
Die Folge $(e^n \pm e^{-n})/2$ 39
Die Folge $n^{½ + ti}$ 70
Riemanns Aufsatz anno 1859 75

Zeta

Der gesuchte Beweis der Riemannschen Vermutung[1], wonach die nicht trivialen bzw. kritischen (von s = −2q verschiedenen) Nullstellen der Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für σ < 1 dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehören und im komplexen Argument s = σ + ti entlang Realteil σ = ½ seien, hat – über das Euler-Produkt $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ einen praktischen Zugang über eine Primzahlformel.

Die vergebliche Suche nach der Primzahlformel allerdings zwang zu anderen Näherungsversuchen, die wiederum aufgrund der für die Zetafunktion vorausgesetzten Identität mit der Primzahlformel jeweils auf die Primzahlen zurück- oder vorgreifen, und ohne die nämliche Primzahlformel zu kurz greifen würden.

---

[1] Weisstein, Riemann-Hypothesis, in: < URL >: „It is known that the zeros are symmetrically placed about the line $I[s] = 0$. This follows from the fact that, for all complex numbers s,
1. s and the complex conjugate $\bar{s}$ are symmetrically placed about this line.
2. From the definition (1), the Riemann zeta function satisfies $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$, so that if s is a zero, so is $\bar{s}$, since then $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)} = \bar{0} = 0$.
It is also known that the nontrivial zeros are symmetrically placed about the critical line $Re[s] = 1/2$, a result which follows from the functional equation and the symmetry about the line $I[s] = 0$. For if s is a nontrivial zero, then $1 - s$ is also a zero (by the functional equation), and then $\overline{1 - s}$ is another zero. But s and $\overline{1 - s}$ are symmetrically placed about the line $Re[s] = 1/2$, since $\overline{1 - (x + \imath y)} = (1 - x) + iy$, and if $x = 1/2 + x'$, then $x = 1/2 + x'$. The Riemann hypothesis is equivalent to $\Lambda \leq 0$, where Λ is the de Bruijn-Newman constant (Csordas *et al.* 1994)."

Über den Primzahlsatz[2] $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1$ konnte zwar mit nicht geringem Aufwand, aber doch so weit auf die Lösung und Beweis vorgegriffen werden, dass diese und eine Reihe ähnlicher Probleme nur mit Hilfe der als richtig vorausgesetzten Vermutung von Riemann bewiesen werden konnten. Die überprüfbare Richtigkeit dieser indirekten Beweise hat die Riemannsche Vermutung erhärtet,wenn schon nicht bewiesen.

Aufgrund der schon von Euler postulierten Identität der Zetafunktion mit dem Produkt von Primzahlen scheint unstrittig, dass die Lösung oder Scheitern der selbigen ursächlich mit dem Primzahlproblem zusammenhänge, zumal Riemann das aus Ausgangsposition für seine Überlegungen für die Zetafunktion genommen hatte, und selbst damit eine Primzahlformel[3] finden wollte.

Das Scheitern der Primzahlformel ließ also sozusagen die Zetafunktion in der Schwebe. Und die Forschung hofft durch die Lösung der Zetafunktion den Primzahlen näher zu kommen. Man ist der Ansicht, dass auch wenn die Riemannsche Vermutung bei den Primzahlen und damit such für die

---

[2] Landau I 30: „Riemann, dem die Primzahltheorie die genialste und fruchtbarste Abhandlung (aus dem Jahre 1860) verdankt, stellte sich ein verwandtes, aber doch anderes Ziel als Tschebyschef und griff es mit viel kräftigeren Hilfsmittel an. Sein Ziel war, für eine eng mit $\pi(x)$ zusammenhängende, von der Primzahlverteilung abhängige Funktion einen bestimmten genauen Ausdruck aufzustellen, der ein Glied Li(x) und unendlich viele andere Glieder enthält. Jener genaue, aber recht komplizierte Ausdruck setzt übrigens gar nicht etwa in Evidenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1$$

ist; man darf also nicht glauben, dass Riemanns Formel, selbst wenn er sie bewiesen hätte, die Tschebyschefschen Probleme gelöst hätte."

[3] Landau I 29 f.

Zetafunktion gescheitert sei, so ist damit doch ein Werkzeug[4] geschaffen worden, womit die Hindernisse zu überwinden sein werden.

[4] Landau I 30: „Nun ist es aber Riemann keineswegs gelungen, die von ihm vermutete ‚Riemannsche Primzahlformel' zu beweisen; er hat nur das Werkzeug geschaffen. Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen[4] Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion'[4], welche in der Halbebene[4] $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s \log n}$ bei reellem log n hat."

Gamma

Der hier skizzierter Lösungsansatz geht davon aus, dass bereits die Voraussetzungen zur Riemannschen Vermutung unrichtig bzw. überholt waren, und die bekannte Schwierigkeit nur aufgrund der falschen Vorausetzungen entstanden ist, und vermeidbar geweswen wäre, bzw. ist die anderswo zu suchen.

1. Noch 1751 Schrieb Euler resginerend, dass trotz redlicher Mühe die gesuchte Primzahlformel nicht zu funden war, und daher die Erfolglosigkeit der Mühe zu der Einsicht nötige, dass es überhaupt keine Primzahlformel gäbe[5].
2. Die von Euler vermisste Primzahlformel gab es allerdings, wenn auch erst später publiziert. Sie wurde von Waring 1770 veröffentlicht[6], jener schrieb sie allerdings J. Wilson (1741-1793), einem seiner Studenten, zu, unter dessen Namen sie heute bekannt ist[7]. Den ersten richtigen

[5] Sautoy 63: „Doch eine einfache Formel, mit der sich alle Primzahlen finden lassen, könnte auch der große Euler nicht finden. 1751 schrieb er: «Es gibt einige Geheimnisse, die der menschliche Geist niemals durchdringen wird. Wir brauchen nur einen Blick auf die Tabelle der Primzahlen zu werfen, und wir sollten erkennen, dass es dort weder Ordnung noch Regeln gibt.» Es erscheint paradox, dass sich gerade die fundamentalen Bausteine dieser Ordnungsgefüllten Welt der Mathematik so wild und unvorhersagbar verhalten."

[6] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.

[7] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >: „Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte."

Beweis gab allerdings 1773 Lagrange[8], und die Formel war bereits vom islamischen Gelehrten Ibn al-Haytham 700 Jahre früher entdeckt, und unpublizierte Belege zeigten, dass bereits Leibnitz[9] um 1683 von der Formel wußte, aber diese nicht publizierte[10].

3. Euler Starb zwar erst 1783, war aber zunächst auf ein Auge und ab 1770 auf beide Augen ganz blind. Seine Arbeiten wurden zwar von seinem Sohn und von senem Sekretär weiter geschrieben, jedoch war sein Aktionsradious wohl eingeengt.

Überliefert ist von Euler also, dass er 1751 erklärt hatte, was damals scheinbar mangels Publikation durch Leibnitz, einerseits, und vor der Publikation von Waring (1770) und vor dem Beweis durch Lagrange (1773) gestimmt haben mag, das die Primzahlformel nicht existiere und voraussichtlich unauffindbar sei[11]. Weiter ist überliefert, dass sich Euler auf dieser Grundlage, wonach Eine Primzahlformel angeblich fehle, sich mit den Primzahlen – und angrenden Probleme befasst hatte.

Als nun Rimann seinen berühmten Aufsatz 1859/1861 vorlegte, ging er von der nämlichen Eulerschen Position aus und sein erklärter Ziel war ausdrücklich im Sinne Eulers die Primzahlformel zu finden, die von Euler als nicht auffindbar pustuliert wurden[12]. Es ist auch einigermaßen folgerichtig,

---

[8] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

[9] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl $m > 1$ ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz $(m - 1)! \equiv -1 \pmod{m}$ besteht. […] die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft […] Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den Wilsonschen Satz bereits vor 1683 gekannt haben muss. Publiziert wurde das Resultat offenbar zuerst von E. Warig (Meditationes Algebraicae, Cambridge 1770), der es seinem Schüler J. Wilson zuschrieb. Erst J. L. Lagarange (Oeuvres III, 423-438) scheint dann 1771 wirklich einen Beweis für den Wilsonschen Satz gefunden zu haben. Der angegebene Beweis geht auf Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 77) zurück."

[10] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

[11] Bundschuh 102 f.

[12] Sautoy 63.

dass die Riemannsche Vermutung, auf dieser Eulerschen Grundlage, ihres Beweises harre, zumal diese Vermutung (und Beweis) nach der Intention von Rieman die von Euler als nicht vorhanden postulierte Primzahlformel zum Beweis voraussetzte.

Allerdings vermittelt Rimanns Ansatz deswegen eine größere Nähe zur Primzahlformel, weil die Zetafunktion Riemanns auf die Grammafunktion zurückgehe[13], und daher den Satz von Wilson, der Ebenfalls eine Version der Gammafuntion sei, also die Primzahlformel, latent bzw. unterschwellig auch die Vermutung von Riemann impliziere.

Den Satz von Wilson[14] $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, hat dann Clement auf die Primzahlzwillinge $4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \; [\mathrm{mod}\; n\,(n + 2)]$, $n > 1$) ausgeweitet[15]. Da die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft, kann man bei $p \geq 5$ die Menge der Zahlen 2, 3, …, $p - 2$ in $\frac{1}{2}(p - 3)$ Paare zueinander modulo p reziproker Partner zerlegen, so dass $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p - 2) \equiv 1 \pmod{p}$ gilt[16].

---

[13] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Riemann kam auf seine Vermutung bei der Untersuchung des Produkts der Zetafunktion mit der Gammafunktion

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

die bei der Vertauschung von s mit $(1 - s)$ invariant ist, das heißt, sie erfüllt die Funktionalgleichung:

$$\xi(s) = \zeta(1 - s)$$

Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung ebenfalls invariant."

[14] Pieper 52 ff.

[15] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.

[16] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl $m > 1$ ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz $(m - 1)! \equiv -1 \pmod{m}$ besteht. […] die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft […] Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den Wilsonschen Satz bereits vor 1683 gekannt haben muss. Publiziert wurde das Resultat offenbar zuerst von E. Warig (Meditationes Algebraicae,

So weit also der Satz von Wilson als bewiesen gilt[17], erübrigt sich hier ein – weiterer – Beweis, zumal der Satz auf einen arabischen Mathematiker aus dem 11. Jahrhundert zurückgeht und von Wilson lediglich wieder entdeckt wurde[18]. Die Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den sogenannten Satz von Wilson[19] bereits vor 1683 gekannt habe[20]. Die Folge $p^2 = 24n + 1$ ist eine Ableitung vom Satz von Wilson[21], bzw. ist dessen Beweis als $a^2 \equiv -1 \pmod p$ für ganzes a, und eine echte und vollständige Primzahlformel für Ergebnisse mit ganzen Zahlen[22]. So kann das Ergebnis der Forschung bestätigt werden, dass der Satz von Wilson eine Primzahl näher bestimmt[23], und der Kontrollbeweis vom Satz von Wilson in der quadratischen Form ebenfalls eine vollkommene und vollständige, also die Primzahlformel schlechthin, sei[24]. Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ in der Form

---

Cambridge 1770), der es seinem Schüler J. Wilson zuschrieb. Erst J. L. Lagarange (Oeuvres III, 423-438) scheint dann 1771 wirklich einen Beweis für den Wilsonschen Satz gefunden zu haben. Der angegebene Beweis geht auf Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 77) zurück."

[17] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

[18] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >: „Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte."

[19] Pieper 52 ff.

[20] Bundschuh 102 f; Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

[21] Pieper 52 ff.

[22] Bundschuh 103; vgl Waldal 81.

[23] Bundschuh 103.

[24] Bundschuh 102 f.

$\Gamma(n) = (n - 1)!$ für ganze Zahlen dient als Ausgangsgröße[25] für Riemanns Zetafunktion und für seine Hypothese[26] und zeigte die Verbindung zum Satz von Wilson[27] $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, wo in der quadratischen Form $n^2 \equiv 1 \pmod{p}$ auch die Formel $(n - 1)!$ angewendet werde[28] und für $p^2 = 24n + 1$ gelte.

[25] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; Trost 62 ff.
[26] Landau I 30 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[27] Pieper 52 ff.
[28] Bundschuh 102 f; vgl Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

Sinh

Der hier gezeigte Lösungsansatz mit $z = \sinh(\ln \varphi) = \frac{1}{2}$ ist der Spezialfall von Sinus Hyperbolicus[29] für den goldenen Schnitt φ. Hat man einmal die Lösung vor Augen, bzw. in Sichtweite, so lässt sich die Spur zurück verfolgen.

1. Auszugehen war im Speziellen von dem Riemannschen Ansatz[30] zur Zetafunktion $\zeta(s)$, wonach diese invariant[31] sei, wenn das komplexe Argument s durch 1 – s ersetzt werde: $\zeta(s) = \zeta(1-s)$. Durch diese rechnerische Anomalie wird nämlich die Zahl der möglichen Lösungen eingeengt[32].

---

[29] Wikipedia, Einheitswurzel, In: Wikipedia, Versions-ID: 58157158 / 21. März 2009, 15:55 UTC. URL: < URL >.

[30] Landau I 30: „Die Funktion

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

(welche übrigens in s = 0 und s = 1 Pole erster Ordnung hat, sonst regulär ist) bleibt unverändert, wenn s durch 1 – s ersetzt wird."

[31] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Riemann kam auf seine Vermutung bei der Untersuchung des Produkts der Zetafunktion mit der Gammafunktion

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

die bei der Vertauschung von s mit $(1-s)$ invariant ist, das heißt, sie erfüllt die Funktionalgleichung:

$$\xi(s) = \zeta(1-s)$$

Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung ebenfalls invariant."

[32] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >: „Hauptwert des Logarithmus = lnz

Analog zur reellen Definition heißt jede komplexe Zahl w, welche die Gleichung

$$e^w = z$$

2. Der zweier Ansatz ist, dass in der Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ der exponentielle Teil n^s als $n^s = e^{s \ln n}$ ausgedrückt werden kann[33]. Damit wäre unser $\sinh(\ln \varphi) = \frac{1}{2}$ sozusagen als logarithmische Zielsetzung ins Bild gerückt[34].

---

erfüllt, ein *natürlicher Logarithmus* von *z*. […] Mit dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus kann man den Logarithmus von negativen, reellen Zahlen bestimmen:

$$\ln(-x) = \ln|-x| + i \arg(-x) = \ln x + i\pi, x \in \mathbb{R}^+.$$

Man muss jedoch beachten, dass im Komplexen die Rechenregeln für Logarithmen nicht immer gelten, sondern nur noch modulo $2\pi i$. Es gilt dann beispielsweise nicht notwendig

$$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y),$$

wegen

$$\ln(-1) + \ln(-1) = 2\pi i \neq 0 = \ln 1 = \ln\big((-1) \cdot (-1)\big)$$

Und auch die Gleichung

$$y \cdot \ln x = \ln x^y$$

ist nicht notwendig erfüllt, was durch das Gegenbeispiel

$$2\pi i \ln e = 2\pi i \neq 0 = \ln 1 = \ln\big(e^{2\pi i}\big)$$

verdeutlicht wird."

[33] Landau I 30: „Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion', […] wo n^s die Bedeutung $e^{s \log n}$ bei reellem log *n* hat."

[34] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >: „Hauptwert des Logarithmus = *lnz*

Analog zur reellen Definition heißt jede komplexe Zahl *w*, welche die Gleichung

$$e^w = z$$

erfüllt, ein *natürlicher Logarithmus* von *z*. […] Stellt man *z* in Polarkoordinaten dar, so erhält man eine einfache Darstellung des *k-ten Zweigs* der Logarithmusfunktion:

$$w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Für $k = 0$ hat man dann den *Hauptzweig* des Logarithmus:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

ln ist nicht stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Entfernt man jedoch die negative reelle Achse, so ist ln auf dem Gebiet

$$\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$$

stetig und sogar holomorph. Allgemeiner gilt dies für alle einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$."

3. Eine weitere Näherung wäre $\cosh x + \sinh x = e^x$ in unsere Richtung also die hyperbolische Form der Eulerschen Identität. Man kann für $n^s = e^{s \ln n}$ schreiben, $e^{s \ln n} = \cosh(s \ln n) + \sinh(s \ln n)$. Auf Anhieb ist jedoch ersichtlich, dass in dem Fall $n = \boldsymbol{\varphi}$, aufgrund $\mathbf{sinh}(\mathbf{ln}\,\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, Bewegung in die bisher Starre Beweisfront hinein kommt[35].
4. Der komplexe natürliche Logarithmus ist nicht eindeutig[36] wie der reelle Logarithmus, sondern wird in einem Streifen als Hauptwert[37] ausgedrückt: Die komplese Zahl $z = re^{i\varphi}$ ist $\ln z = \ln r + i\varphi$. Sonach kann $n^s = e^{s \ln n}$ als $n^s = e^{s \ln r + i\varphi}$ geschrieben werden[38].

---

[35] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >: „Hauptwert des Logarithmus = *lnz*
Analog zur reellen Definition heißt jede komplexe Zahl *w*, welche die Gleichung

$$e^w = z$$

erfüllt, ein *natürlicher Logarithmus* von *z*. Dies ist im Unterschied zum reellen Logarithmus jedoch nicht eindeutig, da

$$e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$$

gilt, siehe dazu auch Eulersche Identität. Hat man also einen Logarithmus *w* von *z* gefunden, so ist damit auch

$$w' = w + 2k\pi i$$

ein Logarithmus von *z*, da gilt:

$$e^{w'} = e^{w+2k\pi i} = e^w \cdot e^{2k\pi i} = e^w \cdot 1 = z$$

Um Eindeutigkeit zu erreichen, schränkt man *w* auf einen Streifen in der komplexen Zahlenebene ein.“

[36] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >: „Hauptwert des Logarithmus = *lnz* […] Um Eindeutigkeit zu erreichen, schränkt man *w* auf einen Streifen in der komplexen Zahlenebene ein. Man kann z. B. den Streifen

$$\{w \in \mathbb{C}: -\pi < Im\, w \leq \pi\}$$

verwenden. Eine komplexe Zahl aus diesem Streifen heißt *Hauptwert* des Logarithmus und man schreibt *w* = lnz. Stellt man *z* in Polarkoordinaten dar, so erhält man eine einfache Darstellung des *k-ten Zweigs* der Logarithmusfunktion:

$$w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Für *k* = 0 hat man dann den *Hauptzweig* des Logarithmus:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

ln ist nicht stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Entfernt man jedoch die negative reelle Achse, so ist ln auf dem Gebiet

$$\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$$

stetig und sogar holomorph. Allgemeiner gilt dies für alle einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.“

5. Vergegenwärtigt man den Ursächlichen Zusammenhang der Zetafuntkon zu den Primzahlen[39] als allgemeine Ausgangsposition, so kommt andererseits dem ursächlichen Zusammenhang des goldenen Schnitts zu den Primzahlen sozusagen die Schlüsselrolle zu.

Es gilt sodann die Arbeitshypothese zu beweisen, dass die Lösung und damit Beweis der Riemannschen Vermutung auf Grundlage der Zetafunktion allgemein und $\sigma = \frac{1}{2}$ speziell nicht in $s = \sigma + ti$ in s von $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ liegt, sondern in n von n^s. Man ist sonach bisher fälschlich davon ausgegangen, dass in n^s die Lösung und damit der Schwerpunkt des Beweises auf s liege, weil sonach n von s her bestimmt wäre, und Riemann selbst sprach bloß – irrig – vom komplexen Argument (s) und vermeinte, dass aufgrund der gleichsam konstitutionell vorangestellten Bezeihung zu den Primzahlen n lediglich im Bereich der natürlichen Zahlen gehörte, oder bestenfalls reell sei. Dem ist, so die Ar-

---

[37] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >: „Der komplexe natürliche Logarithmus ist im Gegensatz zum Reellen nicht eindeutig. Man arbeitet daher mit Hauptwerten, d. h. Werten eines bestimmten Streifens der komplexen Ebene.
Der Hauptwert des natürlichen Logarithmus der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ ist
$\ln z = \ln r + i\varphi$."

[38] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >: „Mit dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus kann man den Logarithmus von negativen, reellen Zahlen bestimmen:
$\ln(-x) = \ln|-x| + i\arg(-x) = \ln x + i\pi, x \in \mathbb{R}^+$.
Man muss jedoch beachten, dass im Komplexen die Rechenregeln für Logarithmen nicht immer gelten, sondern nur noch modulo $2\pi i$."

[39] Landau I 153 f: „Wir hatten schon in § 33 für s > 1 die Identität (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$. Satz: Die Identität (1) gilt für $\sigma > 1$. [...] ist $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$, also wegen der absoluten Konvergenz dieser Reihe und wegen der für $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ offenbar gültigen Relation $n_1^s n_2^s = (n_1 n_2)^s$ $\prod_{p \leqq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, wo n alle Zahlen durchläuft, deren Primfaktoren sämtlich $\leqq x$ sind." Vgl Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL > 1 ff.

beitshypothese, nicht so. Im Gegenteil. Vielmehr musste schon n komplex gewesen sein, um s die Eigenschaften zu verleihen, die offenbar in s selbst nicht zu finden waren. Diese Eigenheiten, die man bisher vergeblich in s gesucht hatte, sind also in n von n^s. Sonach ist die Komplexität von s ursächlich von der Kompexität von n her bestimmt, und lediglich Ausdruc, gleichesam Spiegel der Komplexität von n. So weit die Arbeitshypothese.

Phi

In der Kurzfassung kann die Arbeitshypothese schrittweise zur These erhärtet werden, nämlich mit der ebenfalls vergeblichen Suche von Euler nach der universalen Primzahlformel, wobei Euler, analog dem Werkzeug von Riemann in der Zetafunktion, ebenfalls ein Werkzeug in der Formel $x^2 - x - 1$ geschaffen hat. Im Gegensatz zur resignierenden Feststellung von Euler[40], wonach er die gesuchte Universalformel für die Primzahlen nicht gefunden hätte, sondern mit solchen halben Lösungen auskommen musste, geht die Arbeitshypothese davon aus, dass die vermeintlich halbe Lösung von Euler die ganze ist. Dadurch nämlich dass Euler mit der Formel nur praktische Lösungen zum Rechnen gesucht hatte[41], und die Formel für den praktischen Gebrauch $x^2 - x - p$ modifiziert hatte[42], entging ihm, dass zumindest theoretisch die Formel die ganze Lösung ist. Sie ist nämlich im Grenzfall der Goldene Schnitt[43], ja sogar die goldene Spirale, und die Lösung auch der Zetafunktion.

Euler hatte die Formel ursprünglich in der Form $x^2 + x + 17$ verendet, fand aber dann die bessere Lösung in $x^2 + x + 41$, wobei er dann auch das Vorzeichen variierte[44]. Es ist aber dokumentiert, dass Euler noch sehr wohl auf die Form $x^2 - x - 1$ oder $x^2 + x + 1$, oder mit wechselndem Vorzeichen zurückging, auch diese Form verwendete[45]. Was jedoch Euler entging, war, dass die

[40] Sautoy 63.
[41] Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.
[42] Sautoy 63; Ribenboim/Richstein/Keller 153 f; Bundschuh 71, 283.
[43] Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f; Timerding 13 f, 20 ff.
[44] Stark 2; Sautoy 63; Müller-Stach/Piontkowski 3.
[45] Sautoy 63.

Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1$ der Goldene Schnitt ist[46]. In der Forschung steht außer Streit, dass das eines der besten Primzahlformel sei, wenn nicht die beste, und auf jeden Fall, dass es sich dabei um eine Primzahlformel handelt[47]. Auch in der einfachsten Form des Grenzfalls $x^2 - x - 1$, wo natürlich die praktische Bedeutung relativ gering ist. In der neueren Forschung ist nachgewiesen, dass es sich bei dieser Primzahlformel in diesem Grenzfall um den goldenen Schnitt[48] handelt.

Damit wäre theoretisch unsere Arbeitshypothese so gut wie in der Zielgerade, wenn und so weit sich die praktischen Hindernisse vor dem Ziellauf überspringen lassen. Größtes Hindernis, eine Art Wassergraben, ist, dass die Dreidimensionalität[49] bzw. der sphärische Charakter der komplexen Zahlenebene sich kaum je adäquat auf die Zahlengerade der reellen Ebene herunterbrechen lasse, woran auch dieses bisherige Werkzeug von Riemann und Euler letztlich gescheitert sind, weil ihr Wert fälschlich darin gesucht wird, reell vermeintlich das Irreale bzw. Komplexe zu fassen.

Sobald jedoch die Zahlengerade die Sphäre des von Euler im Grunde erschlossenen „Feldes" nicht zu vergewaltigen suche, und die Punktmechanik Newtons frei nach Heraklit geflissentlich nach anderen Dimensionen Ausschau halte, mit anderen Worten, wenn die nichtlinearen Lösungen nicht mehr das enge Korsett linearer Lösungen tragen müssten, könnte man tief durchatmen, so weit die Luft von Heraklit sozusagen fließe. Prosaisch ausgedrückt versucht die Jüngerschaft einer eindimensionalen oder teils sogar nulldimenstionalen Weltanschauung die Sphäre für die einzige Dimension der Zah-

---

[46] Beuteilspacher/Petri 16; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas' Mathe-Seiten < URL > 18 f, 24 f, 32 ff; Ostermann 23 ff.
[47] Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.
[48] Beuteilspacher/Petri 16; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas' Mathe-Seiten < URL > 18 f, 24 f, 32 ff; Timerding 13 f, 20 ff; Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164; Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f;.
[49] Hainzl 14 f.

lengerade zu vereinnahmen, und damit gleichsam abzuwürgen. In Wahrheit jedoch verlagen nichtlineare Promleme nach einem nicht linearen Werkzeug, gleichsam jenseits der der Dimension Zahlengerade. Es sind bereits die Lösungen einfacher quadratischen Gleichungen nur auf der komplexen Ebene möglich, und dar Umstand, dass das scheinbar bisher auch auf der reellen Ebene darstellbar gewesen ist, verleitet zu der Versuchung, die Lösung quadratischer Gleichungen für die Eindimensionalität der Zahlengerade mit reellen Zahlen so zu reklamieren, als wäre die Komplexität bloß Imagination.

Die Sache ist die, dass zwar aus der Perspektive des Einen betrachtet der jeweils andere imaginär sei, bzw. jeweils so in Erscheinung trete, die Frage ist allerdings, ob der Punkt den All, oder das All den Punkt bestimme, um so je nach dem von der Imagination einen Begriff zu haben.

In gewissen Randbereichen der Mathematik ist jedoch trotzdem das (als) Kuriosum in Evidenz gehalten, dass die algebraische Konjugation zumindest in eine Richtung identisch mit der komplexen Konjugation sei. Unstrittig ist, dass die Konjugation[50] integrierender Bestandteil der komplexen Zahlenebene[51] sei.

„**Algebraisch konjugiert** nennt man Zahlen, die gemeinsame Lösungen eines Minimalpolynoms sind.
Beispiele:

- Die komplexen Zahlen i und $-i$ sind gemeinsame Lösungen des Minimalpolynoms $x^2 + 1$ und als solche algebraisch konjugiert.
- Verallgemeinerung davon: jeweils 2 konjugiert-komplexe Zahlen $a + bi$ und $2a - bi$ (für $b \neq 0$) sind auch algebraisch konjugiert. Das Minimalpolynom ist $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

[50] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >
[51] Benner, Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, in: < URL >.

Die Goldene Zahl Φ und ihr negativer Kehrwert sind algebraisch konjugiert als Lösungen des Minimalpolynoms $x^2 - x - 1$ über dem Körper $\mathbb{Q}$."[52]

Die Wirkung der Konjugation kann am Beispiel $(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5}) = 4 = 2^2$ gezeigt werden[53]. Das ist analog dem goldenen Schnitt[54], die sich mit Hilfe der Eulerschen Zahl und der hyperbolischen Areafunktion $\Phi^{\pm 1} = e^{\operatorname{arsinh}\left(\pm\frac{1}{2}\right)}$ ausdrücken lässt[55]. Die Mathematik scheint bisher die Bedeutung und

---

[52] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >

[53] Bollig, Effiziente Algoritmen für den Primzahltest, in: < URL > 8.

[54] Wikipedia, Goldener Schnitt, In: Wikipedia, Versions-ID: 61715085/24. Dezember 2008, < URL >: „[…] die quadratische Gleichung

$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

mit den Lösungen

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749894848204586834365638 \ldots$

und

$\overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = \frac{1}{\Phi}$

Letztere ist negativ."

[55] Wikipedia, Goldener Schnitt, In: Wikipedia, Versions-ID: 61715085/24. Dezember 2008, < URL >: „Der Zusammenhang $\Phi - 1 = -\overline{\Phi}$ ist interessant:

$\overline{\Phi} = -0{,}618033988 \ldots$

$\overline{\Phi}$ ist also bis auf die erste Stelle ziffern gleich mit Φ

- $\overline{\Phi}$ ist die algebraisch konjugierte Zahl zu Φ
- Insbesondere folgt $\Phi - \overline{\Phi} = \sqrt{5}$

Etliche mathematische Zusammenhänge lassen sich unter gleichzeitiger Verwendung von Φ und $\overline{\Phi}$ in besonders symmetrischer Weise schreiben. […] Die Glieder der Fibonacci-Folge lassen sich auch über die Formel von Binet berechnen:

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \overline{\Phi}^n)$

Tragweite übersehen zu haben, dass die komplexe Konjugation bereits in der Lösung der bisher reell (und nominell heute noch dafür) gehaltenen quadratischen Gleichungen bis zu einem gewissen Grad vorweggenommen ist[56]. Die komplexe Konjugation hat die Rechenregeln:

„**Rechenregeln**

Für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2, z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt:

- $a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $b = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{z_2}$
- $exp(\bar{z}) = \overline{exp(z)}$
- $log(\bar{z}) = \overline{log(z)}$ für $z \neq 0$

Die Ganzzahligkeit der Folgenglieder ist dadurch gewährleistet, dass sich ungerade Potenzen von $\sqrt{5}$ stets aufheben. […] Das Quadrat $\Phi^2 = \Phi + 1$ und jede höhere ganzzahlige Potenz von Φ lassen sich als Summe aus einem Vielfachen von Φ und einem Vielfachen von 1 darstellen. Auf dieser Eigenschaft beruht die fundamentale Bedeutung des goldenen Schnitts für quasiperiodische Gitter (*siehe* Quasikristall).“

[56] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >.

- $\overline{\varphi(z)} = \varphi(\bar{z})$ gilt allgemein für jede holomorphe Funktion φ, deren Einschränkung auf die reelle Achse reellwertig ist."[57]

Von denen ist $a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $b = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ besonders hervorzuheben. Für alle konjugierten[58] komplexen Zahlen z_1, z_2, $z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt: $a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $b = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ sowie $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$. Denn der Re(z) und Im(z) werden aus $z = a + b \cdot i \longmapsto \bar{z} = a - b \cdot i$ als Abbildung von dem Mittelwert von z und $\bar{z}$ ausgerechnet[59]. Analog zeigen die Rechenregel $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ und $(a + bi) - (a - bi) = 2bi$ in einer anderer Schreibweise den gleichen Zusammenhang[60]. In dieser Schreibweise zeigt es sich in der Gegenüberstellung, dass der Realteil der komplexen Konjugation die imagiäre Einheit i verliert, also reell ist, allerdings mit 2a den doppelten Wert von a annimmt (das mit ½ multipliziert werden muss, … also immer auf der Linie ½ im Sinne der Riemmannschen Vermtung zu finden sein wird). Der Betrag der komplex konjugierten Zahl ist immer reell[61]. Damit befinden sich sämtliche Lösungen von $Re(z)$ und $Im(z)$ auf der Linie $\frac{1}{2}$

---

[57] Wikipedia, Konjugation, In: Wikipedia, Versions-ID: 59801280/Bearbeitungsstand: 7. Mai 2009, < URL >.
[58] Benner, Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, in: < URL >.
[59] Wikipedia, Konjugation, In: Wikipedia, Versions-ID: 59801280/Bearbeitungsstand: 7. Mai 2009, < URL >.
[60] Detering, Konjugation (Mathematik), in: < URL >.
[61] Oberguggenberger/Ostermann/Unterweger, 2D Visualisierung komplexer Funktionen, in: < URL >: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar, in der das Polynom $z^2 + 1$ eine Nullstelle besitzt. Man kann sie als Paare (a, b) reeller Zahlen einführen, auf denen Addition und Multiplikation wie folgt definiert sind:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) + (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Die reellen Zahlen werden als die Teilmenge aller Paare der Form $(a, 0), a \in \mathbb{R}$ aufgefasst. Offenbar gilt für das Paar $(0, 1)$, dass

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

ist, also sein Quadrat der reellen Zahl -1 entspricht und somit eine Nullstelle des Polynoms $z^2 + 1$ liefert. Bezeichnet man diese Nullstelle mit i, also $i^2 = -1$.

und zumindet der Realteil ist immer so reell, wie die Riemannsche Vermutung verlangt. So weit also die Lösung der Riemannschen Vermutung im Bereich der konjugierten komplexen Zahlen[62] liegt, wäre sie – so weit so gut – als richtig erwiesen[63].

Aus dem methodischen Gesichtspunkt wären zwei Schwerpunkte, zu setzen:

1. nämlich erstens die Identität des Satzes von Wilson[64] und der Gammafunktion, zumal bei Riemann, zu Beweisen,

---

so kann man eine rechnerisch günstigere Darstellung der Menge der komplexen Zahlen erhalten, indem man die Paare (a, b) in der Form $a + ib$ schreibt:

$$\mathbb{C} = \{a + ib;\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Den oben definierten Rechenoperationen mit Paaren (a, b) entspricht dann einfach das gewohnte Rechnen mit den Ausdrücken $a + ib$ wie mit Termen unter Berücksichtigung der Beziehung $i^2 = -1$:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d),$$
$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ bezeichnet

$$x = Re\ z, y = Im\ z$$

den Realteil bzw. den Imaginärteil von z,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

den Betrag von z und

$$x + iy = \bar{z}$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl. Es gilt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Das heißt, $z\bar{z}$ ist stets eine reelle Zahl."

[62] Benner, Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, in: < URL >.
[63] Landau I 288 f.
[64] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

2. und zweitens die Identität des ergänzenden Ausdrucks $s(s-1) = s^2 - s$ mit der quadratischen Gleiczhung für $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ den Goldenen Schnitt.

Etwas weiter im Detail

Zu 1.:

Rimanns Zetafunktion[65] geht auf die Grammafunktion zurück[66], und ist daher mit dem Satz von Wilson[67] beinahe identisch: Die Gammafuntion ($\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$) in der Form $\Gamma(n) = (n-1)!$ für

---

[65] Landau I 293 f: „Aus der gefundenen, in der ganzen Ebene gültigen Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{c}{s-1} + \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_3}{s+3} + \frac{c_5}{s+5} + \cdots\right) + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx$$

Ergeben sich nochmals die uns schon bekannten Werte von $\zeta(-m)$ für ganzes $m \geqq 0$: [...] Ferner hat $\Gamma(s)$ im Pol $-m$ das Residuum $\frac{(-1)^m}{m!}$, da

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)\sin \pi s},$$

$$\lim_{s=-m}(s+m)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1+m)}\lim_{s=-m}\frac{s+m}{\sin \pi s} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

ist. Daher ergibt sich

$$\lim_{s=1}(s-1)\,\zeta(s) = 1,$$"

[66] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Riemann kam auf seine Vermutung bei der Untersuchung des Produkts der Zetafunktion mit der Gammafunktion

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

die bei der Vertauschung von s mit $(1-s)$ invariant ist, das heißt, sie erfüllt die Funktionalgleichung:

$$\xi(s) = \zeta(1-s)$$

Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung ebenfalls invariant."

ganze Zahlen[68]) ist also, im Sinne von Wilson[69] $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ entsprechend modizifiziert, die bei Euler und Riemann bisher vermisste Primzahlformel. Die rechte Seite der Form $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x$ zeigt eine quasi Identität mit der linken seite der Form $\lim_{s=-m}(s+m)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1+m)}\lim_{s=-m}\frac{s+m}{\sin \pi s}$ und umgekehrt.

Clement hat den Satz von Wilson $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ auf die Primzahlzwillinge $4[(n-1)! + 1] + n \equiv 0$ [mod n $(n+2)$], $n > 1$) ausgeweitet[70]. Da die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft, kann man bei $p \geq 5$ die Menge der Zahlen 2, 3, …, $p - 2$ in $\frac{1}{2}(p-3)$ Paare zueinander modulo p reziproker Partner zerlegen, so dass $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$ gilt[71]. Das Primzahlquadrat p^2 muss also in der Form $p^{1/2}$ zu einer Primzahl zurück-verwandelt werden.

So weit also der Satz von Wilson als bewiesen gilt[72], erübrigt sich hier ein – weiterer – Beweis, zumal der Satz auf einen arabischen Mathematiker aus dem 11. Jahrhundert zurückgeht und von Wilson

---

[67] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.
[68] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; Trost 62 ff.
[69] Pieper 52 ff.
[70] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.
[71] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl $m > 1$ ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$ besteht. […] die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft […] Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den Wilsonschen Satz bereits vor 1683 gekannt haben muss. Publiziert wurde das Resultat offenbar zuerst von E. Warig (Meditationes Algebraicae, Cambridge 1770), der es seinem Schüler J. Wilson zuschrieb. Erst J. L. Lagarange (Oeuvres III, 423-438) scheint dann 1771 wirklich einen Beweis für den Wilsonschen Satz gefunden zu haben. Der angegebene Beweis geht auf Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 77) zurück."
[72] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

lediglich wieder entdeckt wurde[73]. Die Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den sogenannten Satz von Wilson[74] bereits vor 1683 gekannt habe[75], allerdings nicht publiziert. Die Folge $p^2 = 24n + 1$ ist eine Ableitung vom Satz von Wilson[76], bzw. ist dessen Beweis als $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ für ganzes a, und eine echte und vollständige Primzahlformel für Ergebnisse mit ganzen Zahlen[77]. So kann das Ergebnis der Forschung bestätigt werden, dass der Satz von Wilson eine Primzahl näher bestimmt[78], und der Kontrollbeweis vom Satz von Wilson in der quadratischen Form ebenfalls eine vollkommene und vollständige, also die Primzahlformel schlechthin, sei[79]. Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ in der Form $\Gamma(n) = (n - 1)!$ für ganze Zahlen dient als Ausgangsgröße[80] für Riemanns Zetafunktion und für seine Hypothese[81] und zeigte die Verbindung zum Satz von Wilson[82] $(n - 1)! + 1 \equiv$

[73] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >: „Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte."

[74] Pieper 52 ff.

[75] Bundschuh 102 f; Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

[76] Pieper 52 ff.

[77] Bundschuh 103; vgl Waldal 81.

[78] Bundschuh 103.

[79] Bundschuh 102 f.

[80] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; Trost 62 ff.

[81] Landau I 30 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.

[82] Pieper 52 ff.

0 (mod n), wo in der quadratischen Form $n^2 \equiv 1 \pmod p$ auch die Formel (n – 1)! angewendet werde[83] und für $p^2 = 24n + 1$ gelte.

Zu 2.:

Um auf den nämlichen kritischen Wert der Riemannschen Vermutung zu kommen, hat Riemann seine Formel um s(s – 1) bzw. um s(s – 1)/2 erweitert[84] und bezeichnet die somit erweitere Zetafunktion[85] $\zeta(s)$ zur Unterscheidung mit $\xi(s)$, und später sogar (in einer weiteren Ableitung) mit

---

[83] Bundschuh 102 f; vgl Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

[84] Landau I 281 f: „**Satz:** Es ist

$$\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(s)$$

eine ganze transzedente Funktion und genügt der Funktionalgleichtug

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

Beweis: […] Wenn s > 1 ist, ist die Summe der linken Seite von (1) über n = 1, 2, … konvergent, also auch die Summe der rechten Seite. […] Dies gilt für relle s > 1. Ich behaupte nun, dass die rechte Seite von (2) für alle komplexen s konvergiert und eine ganze transzendentale Funktion darstellt; damit ist dann zunächst u. a. die Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene von neuem bewiesen."

[85] Landau I 287 f: „Wird in der ganzen Funktion $\xi(s)$ statt s eine komplexe[85] Variable z durch die Gleichung

$$s = \frac{1}{2} + zi$$

eingeführt und

$$\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + zi\right) = \Xi(z)$$

gesetzt, so geht wegen

$\Xi(z)$, um aber dann unter dieser Hilfsbezeichnung über die Nullstellen der Zetafunktion $\zeta(s)$ zu sprechen[86], weil die eingeführten Hilfsfunktionen lediglcih Ableitungen sind und der Anschaulichkeit dienen. Ausmultipliziert ergibt die Formel $s(s - 1) = s^2 - s$ eine beinahe Entsprecheung oder Variante der Formel für den Goldenen Schnitt $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ bzw. $\Phi^2 - \Phi = 1 = \Phi\,(\Phi - 1)$.

Im 17. Jahrhundert veröffentlichte Johann Faulhaber[87] eigenwillig anmutende theoretische Ansätze, wonach die r-fache Summe von $1^m, 2^m, \ldots n^m$ dem Polynom $n(n + r)$ entspreche, wenn m eine positi-

---

$$\xi(1-s) = \xi\left(\frac{1}{2} - zi\right) = \Xi(-z)$$

die Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

in

$$\Xi(-z) = \Xi(z)$$

über, d. h. $\Xi(z)$ ist eine gerade ganze Funktion

$$\Xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}.\text{"}$$

[86] Landau I 288: „Was wissen wir über die Nullstellen von $\xi(s)$, d. h. von $\Xi(z)$? Wegen

$$\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(s)$$

ist jede Nullstelle von $\xi(s)$ Nullstelle eines Faktors links. $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ hat keine Nullstelle; weder s = 0 noch s = 1 ist eine Nullstelle von $\xi(s)$, da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ bzw. $\zeta(s)$ dort einen Pol hat; die negativen Nullstellen (erster Ordnung) – 2q von $\zeta(s)$ auch nicht, da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ dort einen Pol hat. Resultat: Die Nullstellen von $\xi(s)$ sind identisch mit dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehörigen, übrigens nicht reellen und nicht auf dem Rande des Streifens gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$; natürlich tritt jede mehrfache Nullstelle in derselben Vielfachheit bei beiden Funktionen auf."

[87] Wikipedia, Faulhabersche Formel, In: Wikipedia, Versions-ID: 55326437 / 14. Januar 2009, < URL >.

ve ganze Zahl sei. Die Koeffizienten[88] von Faulhaber $1^a + 2^a + \ldots + n^a$ können verallgemeinert werden[89]: $n^{-1}(n+1)^{-1}$.

Die Berechnung der Koeffizienten des Faulhaber-Polynoms benötigt die Bernullizahlen, und zeigt die Identität mit der Riemannschen Zetafunktion[90], die ihre Lösung ebenfalls mit den Bernoulli-Zahlen

---

[88] Knuth, Johann Faulhaber and Sums of Powers, in: < URL > 1: „Die **Faulhabersche Formel**, benannt nach Johannes Faulhaber, beschreibt, wie sich die Summe der ersten n p-ten Potenzen

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p \qquad (mi\ p \in \mathbb{N})$$

mit einem Polynom in n vom Grad p + 1 berechnen lässt. Zur Berechnung der Koeffizienten dieses Polynoms werden die Bernoulli-Zahlen benötigt. Im Folgenden bezeichne β_j die j-te Bernoulli-Zahl, mit der Ausnahme $\beta_1 = \frac{1}{2}$, dann sieht die Faulhabersche Formel wie folgt aus:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}\beta_j n^{p+1-j} \qquad \left(mit\ \beta_1 = \frac{1}{2}\ anstatt - \frac{1}{2}\right)$$

[…] Explizite Berechnung einiger Fälle

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\mathbf{1}^2 + 2^2 + \mathbf{3}^2 + \cdots + \boldsymbol{n}^2 = \frac{n(n+1)(\mathbf{2}n+1)}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{2}n^3+\mathbf{3}n^2+n}{\mathbf{6}}$$

$$\mathbf{1}^3 + 2^3 + \mathbf{3}^3 + \cdots + \boldsymbol{n}^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$\mathbf{1}^4 + 2^4 + \mathbf{3}^4 + \cdots + \boldsymbol{n}^4 = \frac{6n^5+15n^4+\mathbf{10}n^3-n}{30}$$ […]"

[89] Westermann 405: „Durch vollständige Induktion wurde in Kap. I, §2 gezeigt dass

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[…] Wie man leicht mit vollständiger Induktion beweist, gilt für die Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Folglich ist […] $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.}$"

[90] Landau I 286 ff: „Für gerades negatives s hatten wir schon oben Null gefunden; für s = –(2q – 1), wo q ganz und $q \geqq 1$ ist, ergibt sich

$$\zeta\big(-(2q-1)\big) = \zeta(1-2q) = \frac{2}{(2\pi)^{2q}}(-1)^q(2q-1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}}.$$

[…] durch Koeffizientenvergleichung folgt,

$$\frac{1}{\pi^{2q}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}}$$

eine rationale Zahl, welche mit

$$\frac{2^{2q-1}B_q}{(2q)!}$$

Bezeichnet zu werden pflegt, und B_q die q te Bernoullische Zahl heißt; daher ist

$$\zeta\big(-(2q-1)\big) = \frac{2}{2^{2q}}(-1)^q(2q-1)!\frac{2^{2q-1}B_q}{(2q)!} = \frac{(-1)^q B_q}{2^{2q}},$$

[…] Wird in der ganzen Funktion $\xi(s)$ statt s eine komplexe Variable z durch die Gleichung

$$s = \frac{1}{2} + zi$$

eingeführt und

$$\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + zi\right) = \Xi(z)$$

gesetzt, so geht wegen

$$\xi(1-s) = \xi\left(\frac{1}{2} - zi\right) = \Xi(-z)$$

die Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

in

$$\Xi(-z) = \Xi(z)$$

über, d. h. $\Xi(z)$ ist eine gerade ganze Funktion

$$\Xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}.\text{“}$$

findet[91]. Der Beweis für Faulhaber wurde später und von anderen gefunden, insbesondere dann von Jacobi, den Rimann in seinem Aufsatz über die Zetafunktion bei der nämlichen Vermutung als Autorität zitiert[92]. Hier nun gliedert sich in die Reihe Euler ein, der ebenfalls eine zwar leicht modifizierte, also abweichende, aber den Bernoulli-Zahlen analoge Formel gefunden hatte, die nach ihm Eulerschen Zahlen[93] geannt werden. Während die Bernoulli-Zahlen[94] sich in Tangens, Kosekans,

---

[91] Landau I 287.

[92] Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL >: „$2\psi(x) + 1 = x^{\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right)$, (Jacobi, Fund. S. 184)"

[93] Wikipedia, Eulersche Zahlen, Versions-ID: 57160924 / 26. Februar 2009, 09:51 UTC, in: < URL >: „Die **eulerschen Zahlen** oder **Euler-Zahlen** (nach Leonhard Euler) sind eine Folge E_n ganzer Zahlen, die durch die Taylorentwicklung der Hyperbelfunktion *Secans hyperbolicus*

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}$$

definiert sind. […] Alle eulerschen Zahlen mit ungeradem Index sind Null, während diejenigen mit geraden Index alternierende Vorzeichen haben. Die Dezimalen Endziffern von E_{2n} sind abwechselnd 1 und 5."

[94] Knopp 185 f, 207 ff; Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >; Peters, Bernoulli-Zahlen, Zetafunktion und Summen von Potenzen, in: Thomas' Mathe-Seiten < URL > 2 ff.

Tangens Hyperbolicus[95] finden, werden die Eulerschen Zahlen als Sekans Hyperbolicus definiert[96], und markieren den Goldenen Schnitt[97].

[95] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Wikipedia, <0 URL >: „Die ersten Bernoulli-Zahlen lauten B_1, B_2, B_3, ... = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder."

[96] Wikipedia, Eulersche Zahlen, Versions-ID: 57160924 / 26. Februar 2009, 09:51 UTC, in: < URL >.

[97] Wikipedia, Goldener Schnitt, In: Wikipedia, Versions-ID: 61715085/24. Dezember 2008, < URL >: „Der goldene Schnitt lässt sich auch mit Hilfe der Eulerschen Zahl und der hyperbolischen Areasinus-Funktion ausdrücken:

$\Phi^{\pm 1} = e^{\operatorname{arsinh}\left(\pm\frac{1}{2}\right)}$"

Ausblick

Unter diesen Voraussetzungen verlangt also die Arbeitshypothese, dass die scheinbar halbe Lösung als solche nicht zulässig, sondern ein Trugschluss sei. Die Suche nach der Lösung der Riemann-Hypothese musste also demnach scheitern, weil man irrig nach einer zweiten Lösung gesucht hatte, nachdem man eine schon hatte. Das Bahnbrechende an der Eulerschen Identität ist, dass dort fast alles an Irrationalitäten und Imagination auf einen gemeinsamen Nenner gebraucht wurde. Sie weist insofern über sich hinaus, als dabei zugleich alles auf die elementaren Grundlagen wie auch Primzahlen zurückgeführt wurde. Die Schwäche der Eulerschen Formel, wenn man überhaupt von einer Schwäche sprechen kann, wäre, dass sie nicht alles umfasse und nicht alles in sich vereine. So zumindest die Optik, nämlich auf der Zahlengerade der linearen Denkweise und in einer linear bestimmten Gedankenwelt.

Man kann die Fragestellung grob vereinfacht in zwei Teilbereiche aufteilen, nämlich Theorie und Praxis. Leider – oder zum Glück – ist die Theorie auf die Praxis angewiesen, seit es auch nur zum Beweis, bzw. als Kontrolle, was in diesem Fall nur die Primzahlformel sein konnte. Alleredings sind die Arbeitsweisen, ja schon die Herangehensweise von Theorie und Praxis unterschiedlich bis gegensätzlich. Tatsache ist, dass eine Primzazhlformel allein für sich betrachtet kaum von praktischer Bedeutung ist. Durch die Beduetung der Praxis als Formel war aber die Primzahlformel für die Theorie beinahe existenziell wirchtig. Die Bedeutung der Primzahlformel für die Praxis ist also formal in der Theorie begründet, obwohl inhatlich die Praxis für die Theorie zweitrangig ist. Es gilt also zusammenfassend zu wiederholen, dass das Angewiesensein der Theorie auf die Formel, schuf eine Abhängigkeit der Theorie von der Praxis, die sich bis heute nachteilig für beide ausgewirkt hatte. Gelingt es jedoch beide im Sinne der Freiheit der Wissenschaften zur Geltung zu bringen, so

kommt der schwer zu überbietende Leitung von Euler für die Theorie der Vorrang zu. Dadurch allerdngs, dass sich dieser große Theoretiker nicht ein ebenso großer Praktiker erwiesen hatte, trübt sein Ansehen, ja macht die ihm zukommende Stellung streitig. Wenn und weil bzw. so lange der Stellenwert der Praxis gegenüber der Theorie falsch eingeschäftzt werde.

Aus der Eulerschen Formel fehlte also bisher nur der sog. Goldene Schnitt, womit das irrationale Repertoire so weit vollständig wäre. Insofern also ein letzter Rest an Irrationalität auf rationale Grundlagen zurückgeführt wurde, wären darin zwangsläufig die Lösung auch dann enthaften, wenn wir uns weiter Mühe geben, diese nicht zu finden.

Hilfsmaterialien

„Die **Faulhabersche Formel**, benannt nach Johannes Faulhaber, beschreibt, wie sich die Summe der ersten n p-ten Potenzen

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p \qquad (mi\ p \in \mathbb{N})$$

mit einem Polynom in n vom Grad p + 1 berechnen lässt. Zur Berechnung der Koeffizienten dieses Polynoms werden die Bernoulli-Zahlen benötigt[98]. Im Folgenden bezeichne β_j die *j*-te Bernoulli-Zahl, mit der Ausnahme $\beta_1 = \frac{1}{2}$, dann sieht die Faulhabersche Formel wie folgt aus:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} \beta_j n^{p+1-j} \qquad \left(mit\ \beta_1 = \frac{1}{2}\ anstatt - \frac{1}{2}\right)$$

[...] Explizite Berechnung einiger Fälle

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}}$$

---

[98] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „Bernoulli selbst entdeckte diese Zahlen bei der Summation von Potenzen natürlicher Zahlen, z. B.:

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Bei der Summation der *k*-ten Potenzen ist der Koeffizient des linearen Gliedes des Polynoms auf der rechten Seite die Bernoullische Zahl β_k."

$$\mathbf{1}^3 + 2^3 + \mathbf{3}^3 + \cdots + \boldsymbol{n}^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$\mathbf{1}^4 + 2^4 + \mathbf{3}^4 + \cdots + \boldsymbol{n}^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$\mathbf{1}^5 + 2^5 + \mathbf{3}^5 + \cdots + \boldsymbol{n}^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4+10n^3-n^2}{12}$$

$$\mathbf{1}^6 + 2^6 + \mathbf{3}^6 + \cdots + \boldsymbol{n}^6 = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

Eine alternative Darstellung

Wenn man statt den ersten n nur die ersten n – 1 Potenzen betrachtet, so kann man die Faulhabersche Formel auch ohne die Ausnahme für β_1 beschreiben und β_1 steht dann für die erste Bernoulli-Zahl:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}\beta_j n^{p+1-j} \qquad (mit\ \beta_1 = j - \text{te Bernoulli} - \text{Zahl})$$

Zusammenhang mit Bernoulli-Polynomen

Die Summe der ersten n p-ten Potenzen lässt sich auch mit Hilfe von Bernoulli-Polynomen ausdrücken:

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{\varphi_{p+1}(n+1) - \varphi_{p+1}(0)}{p+1},$$

Hierbei bezeichnet φ_j das *j*-te Bernoulli-Polynom.

Faulhaber-Polynome

Die Summen ungerader Potenzen

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2p+1} = 1^{2p+1} + 2^{2p+1} + 3^{2p+1} + \cdots + n^{2p+1} \qquad (mi\ p \in \mathbb{N}_0)$$

lassen sich auch als Polynom in N = 1 + ... + n darstellen, solche Polynome in *N* statt in *n* werden auch als *Faulhaber-Polynome* bezeichnet.

Einige Beispiele:

$$\mathbf{1}^3 + 2^3 + \mathbf{3}^3 + \cdots + \boldsymbol{n}^3 = N^2$$
$$\mathbf{1}^5 + 2^5 + \mathbf{3}^5 + \cdots + \boldsymbol{n}^5 = \frac{4N^3 - N^2}{3}$$
$$\mathbf{1}^7 + 2^7 + \mathbf{3}^7 + \cdots + \boldsymbol{n}^7 = \frac{12N^4 - \mathbf{8}N^3 + 2N^2}{6}$$
$$\mathbf{1}^9 + 2^9 + \mathbf{3}^9 + \cdots + \boldsymbol{n}^9 = \frac{16N^5 - 20N^4 + \mathbf{12}N^3 - 3N^2}{5}$$
$$\mathbf{1}^{11} + 2^{11} + \mathbf{3}^{11} + \cdots + \boldsymbol{n}^{11} = \frac{32N^6 - 64N^5 + 68N^4 - \mathbf{40}N^3 + 5N^2}{6}$$

Historisches

Johannes Faulhaber selbst kannte die Formel nicht in der hier beschriebenen Form, sondern berechnete lediglich die ungeraden Fälle p = 1, 3, 5, ... 17 als Polynom in N = 1 + ... + n und vermutete, dass für alle ungeraden Zahlen p ein entsprechendes Polynom existiere, ohne jedoch einen Beweis dafür zu haben. Das Konzept der Bernoulli-Zahlen war ihm ebenfalls nicht bekannt. Im Jahre 1834 veröffentlichte Carl Gustav Jacob Jacobi den ersten bekannten Beweis. Weitere Beweise wurden unter anderem von L.Tits (1923) und A.W.F. Edwards (1986) publiziert. Donald Ervin Knuth untersuchte Verallgemeinerungen und trug zur Popularisierung der Faulhaberschen Formel bei.

Literatur

- John H. Conway, Richard Guy: *The Book of Numbers*. Copernicus, New York 1998, ISBN 0-387-97993-X, S. 107.
- Eric Weisstein: *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2003, ISBN 1-58488-347-2, S. 2331.
- *Darinnen die miraculosische Inventiones zu den höchsten Cossen weiters „continuirt“ und „profitiert“ werden*. In: Johann Faulhaber: *Academia Algebrae*. Augpurg, bey Johann Ulrich Schöigs, 1631.“[99]

[99] Wikipedia, Faulhabersche Formel, In: Wikipedia, Versions-ID: 55326437 / 14. Januar 2009, < URL >.

Die Bernoulli-Zahlen entsprechen den

Die Bernoulli Zahlen[100] als Folge rationaler Zahlen kommen in zwei wohlunterschiedenen Versionen vor, von deren Glieder eine mit B_n und die andere mit β_n bezeichenet wird[101].

- Die Zahlenwerte der einen Form[102] von Bernoulli-Zahlen lauten $B_1, B_2, B_3, \ldots$ = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens[103], Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder.
- Die Zahlenwerte der anderen Form[104] verschwinden bei allen ungeraden Koeffizienten ($\beta_{2n+1} = 0$): „In der alternativen Definition ist β_0=1 und β_1=-1/2, alle weiteren β mit ungeradem Koeffizienten verschwinden: $\beta_{2n+1} = 0$. Die β mit geraden Koeffizienten ergeben sich aus den B_n gemäß $B_n = (-1)^{n+1}\beta_{2n}$ als $\beta_2, \beta_4, \beta_6, \ldots$ = 1/6, –1/30, 1/42, –1/30, 5/66, ...“
- Die Reihe konvergiert in beiden Fällen: „Die Reihenentwicklung

$$\frac{x}{(e^x-1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1}B_n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$$

Beziehungsweise β

$$\frac{x}{(e^x-1)} = \beta_0\frac{x^0}{0!} + \beta_1\frac{x^1}{1!} + \beta_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + \beta_n\frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

[100] Knopp 185 f, 207 ff.
[101] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.
[102] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.
[103] Knopp 185 f, 207 ff.
[104] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.

konvergiert für alle x mit einem Betrag kleiner als 2π."[105]

- Die Bernoulli-Zahlen entsprechen den Faulhaber-Formeln „Bernoulli selbst entdeckte diese Zahlen bei der Summation von Potenzen natürlicher Zahlen, z. B.:

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Bei der Summation der k-ten Potenzen ist der Koeffizient des linearen Gliedes des Polynoms auf der rechten Seite die Bernoullische Zahl β_k."[106]

Im Grunde ist jene Version ($\beta_{2n+1} = 0$) die ursprüngliche und eigentlich, wo bei allen ungeraden Koeffizienten ($\beta_{2n+1} = 0$) außer bei $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ die Werte verschwinden, „Note: By the most usual convention, the Bernoulli numbers are $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = \frac{1}{30}$, …"[107] doch ist man durch Konvention dazu übergegangen („But for the moment we follow a convention seen less often, that $B_1 = +1/2$, and all the other Bernoulli numbers remain as above (but see below for more on this)."[108]), das Vorzeichen von B_1 zu von −½ auf $B_1 = +½$ zu ändern, womit auch alle anderen ungerade Koeffizienten doch wieder Werte erhalten und nicht verschwinden.

[105] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.
[106] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.
[107] Wikipedia, Faulhaber's formula, Version ID: 288773029, in: < URL >.
[108] Wikipedia, Faulhaber's formula, Version ID: 288773029, in: < URL >.

Die Folge $(e^n \pm e^{-n})/2$

Die Fibonacci-Folge rechnet auch mit höheren Potenzen[109]. Die Minimalform der Primzahlformel von Euler $x^2 - x - 1 = 0$ als die mathematische Lösung die Fibonacci-Folge ist nicht ganz unähnlich dem sprichwörtlichem Kamel, der durch das Nadelöhr soll[110].

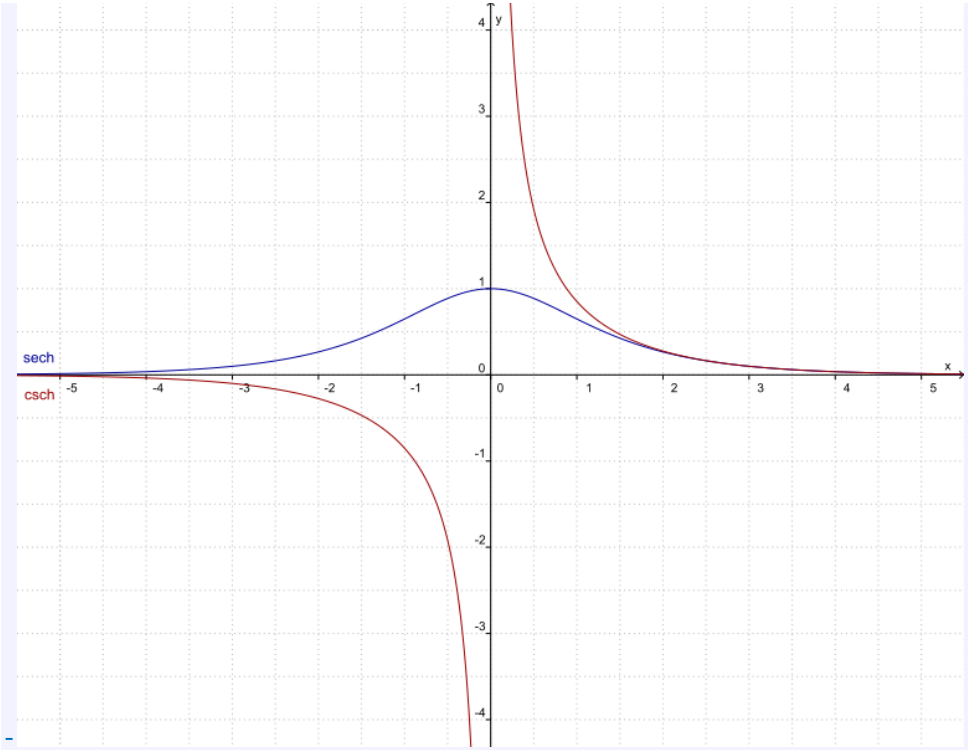
Der nämliche Übergang zeigt sich nicht nur in der Rechnung, sondern auch in der mathematischen Funktion der Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus[111]. Bei Kosekans kommten die Bernoulli-Zahlen[112] zum Vorschein und stellen die Verbindung zu Tangens und Tangens Hyperbolicus[113] her.

„Sekans Hyperbolicus (blau) und Kosekans Hyperbolicus (rot)

Die Funktionen **Sekans Hyperbolicus** (sech) und **Kosekans Hyperbolicus** (csch) sind Hyperbelfunktionen.

---

[109] Ostermann 93 ff.
[110] Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f.
[111] Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >; Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >; Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht."
[112] Knopp 185 f, 207 ff; Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >; Peters, Bernoulli-Zahlen, Zetafunktion und Summen von Potenzen, in: Thomas' Mathe-Seiten < URL > 2 ff.
[113] Wikipedia, Tangens und Kotangens, In: Wikipedia, Versions-ID 58840456 / 9. April 2009, 07:26 UTC. < URL >; Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Wikipedia, <0 URL >: „Die ersten Bernoulli-Zahlen lauten B_1, B_2, B_3, ... = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder."



Definitionen

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$$
$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$$

Eigenschaften

	Sekans Hyperbolicus	Kosekans Hyperbolicus

[…]

Wendepunkte	$r = \pm\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\right)$	Keine

Umkehrfunktionen
Die Umkehrfunktion sind die entsprechende Areafunktionen:

x = arsech y
x = arcsch y

[…]

Integrale[114]

$$\int \operatorname{sech} x\, dx = \arctan(\sinh x)$$

$$\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|$$

Reihenentwicklungen

$$\operatorname{sech} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(8k+4)\pi}{(2k+1)^2\pi^2 + x^2}$$

$$\operatorname{csch} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x}{k^2\pi^2 + x^2}$$

Komplexes Argument

[114] Vgl Precht/Voit/Kraft 64 ff.

$$\operatorname{sech}(x+iy) = \frac{2\cosh(x)\cos(y)}{\cosh(2x)+\cos(2y)} + i\,\frac{-2\sinh(x)\sin(y)}{\cosh(2x)+\cos(2y)}$$

$$\operatorname{sech}(iy) = \sec(y)$$

$$\operatorname{csch}(x+iy) = \frac{2\sinh(x)\cos(y)}{\cosh(2x)-\cos(2y)} + i\,\frac{-2\cosh(x)\sin(y)}{\cosh(2x)-\cos(2y)}$$

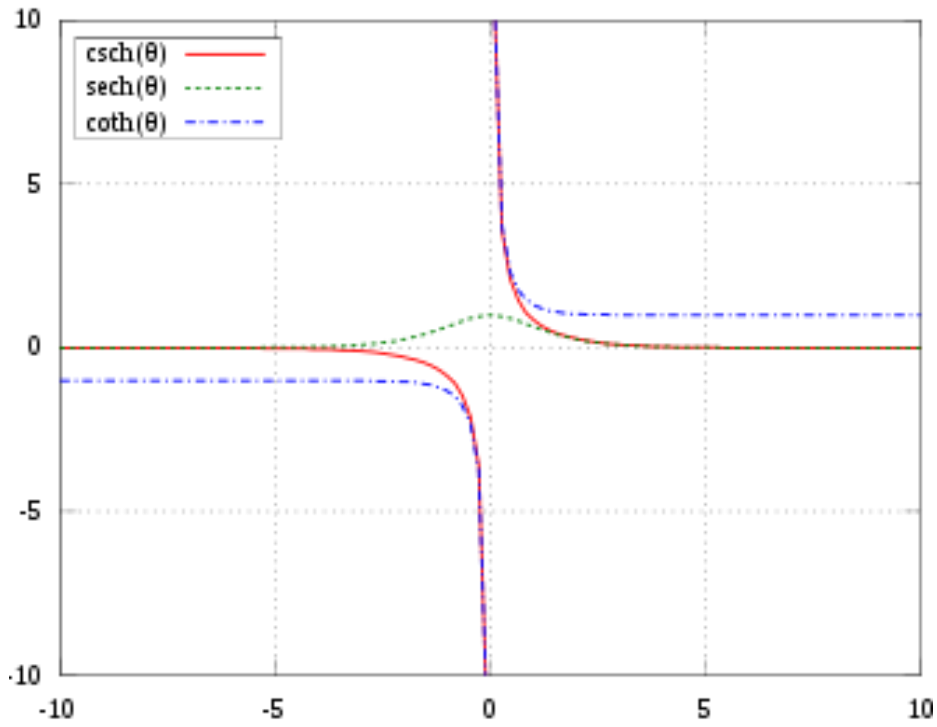
$$\operatorname{csch}(iy) = -i\csc(y)$$

[…]
Eric W. Weisstein: Hyperbolic Secant und Hyperbolic Cosecant auf MathWorld"[115]

Die komplexe[116] Form $\operatorname{sech}(x+iy)$, die analog der Eulerschen Identität ist, ähnlich wie der Wendepunkt $r = \pm\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\right)$ oder $\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|$ bringt uns also in die Nähe der Riemannschen Vermutung.

Der Absolutbetrag |ζ(z)| des „kritischen" Teils der Riemannschen Zetafunktion in der Grafik von Vries[117] ist analog der Funktion Sekans Hyperbolicus (sech(θ)) und der „triviale" Teil der Funktion Kosekans Hyperbolikus (csch(θ)) und/oder Kotangens Hyperbolicus[118] coth(θ), allerdings gespiegelt bzw. konjugiert.

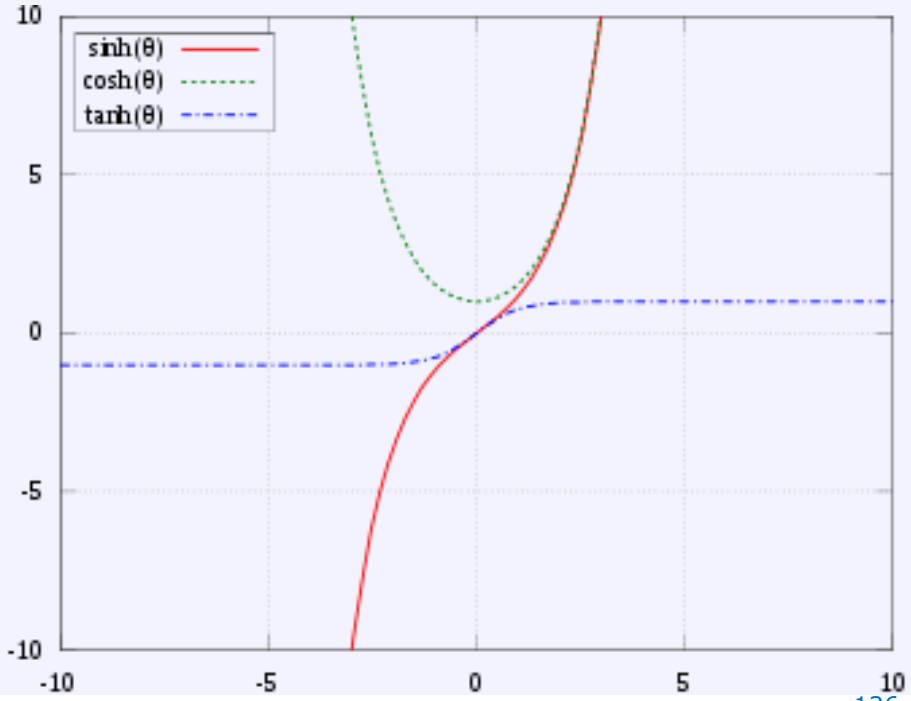
[115] Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >; Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[116] Benner, Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, in: < URL >.
[117] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3: „Absolutbetrag |ζ(z)|".
[118] Wikipedia, Hyperbelfunktion, in: < URL >.



Die Funktion Sekans Hyperbolicus[119] Kosekans Hyperbolikus lässt sich auch gesondert darstellen[120] Sekans und Kosekans haben keine Nullstellen[121], sondern eine Polstelle bei $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Da-

[119] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >
[120] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >.
[121] Wikipedia, Sekans und Kosekans, In: Wikipedia, Versions-ID: 58840471 / 9. April 2009, 07:27 UTC. < URL >: „Weder die Sekansfunktion noch die Kosekansfunktion haben horizontale Asymptoten, Sprungstellen, Wendepunkte oder Nullstellen."

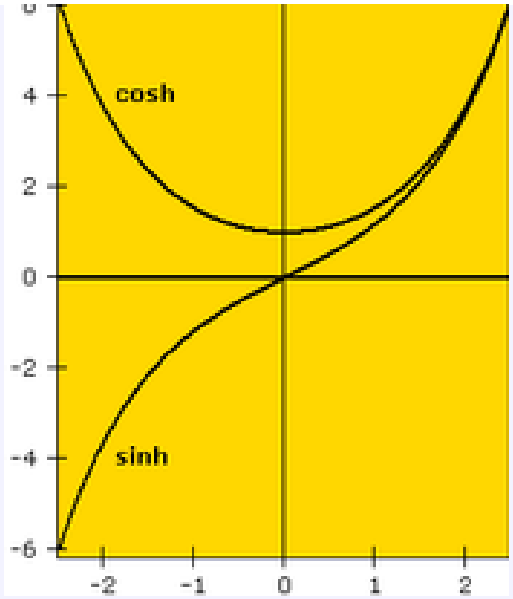
gegen hat Kotangens Nullstellen[122] der Form $x = \left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus bilden mit Tangens Hyperbolicus (blau) exakt die Funktion der Fibonacci-Folge nach[123], bzw. deren „Dämpfungskurve"[124]. Tanh(θ) ist blau, das rote Umfeld ist sinh(θ) entspricht[125].



„sinh und cosh sind für alle komplexen Zahlen definiert[126] und auf dem gesamten Gebiet der komplexen Zahlen holomorph. Die übrigen Hyperbelfunktionen haben Pole auf der imaginären Achse."[127]

---

[122] Wikipedia, Tangens und Kotangens, In: Wikipedia, Versions-ID 58840456 / 9. April 2009, 07:26 UTC. < URL >.
[123] Wikipedia, Hyperbelfunktion, in: < URL >; Lang/Pucker 600 Abb. B.7.
[124] Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas' Mathe-Seiten < URL > 31 Abbildung 14.1.
[125] Lang/Pucker 599 f; Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >; Gnörich, Höhere Mathematik, Formelsammlung, in: < URL > 41 Abbildung 5.



Noch auffälliger ist die Ähnlichkeit FibonacciFolge (hier mit τ statt Φ bezeichnet[128]) zur Lucas-Folge:
„Fibonacci and Lucas numbers are determined from the symmetric Fibonacci and Lucas functions (18)-(21) by the following substitutions:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n), for\ n = 2k \\ cFn(n), for\ n = 2k+1; \end{cases} \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n), for\ n = 2k \\ sLs(n), for\ n = 2k+1. \end{cases} \quad (22)$$

The authors refer to the functions defined by (18)-(21), as the *symmetrical representation*.

---

[126] Westermann 407 f; Knopp 431 ff; Hainzl 142 ff; Meschkowski 122 ff; Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.
[127] Wikipedia, Hyperbelfunktion, In: < URL >, Luderer/Nollau/Vetters 47.
[128] Wikipedia, Goldener Schnitt, In: Wikipedia, Versions-ID: 61715085/24. Dezember 2008, < URL >: „Die ebenfalls gelegentlich verwendete Bezeichnung τ bezieht sich dagegen auf das griechische Wort *tome* für „Schnitt".“

It is easy to construct graphs of the symmetrical Fibonacci and Lucas functions (Fig. 1, 2).

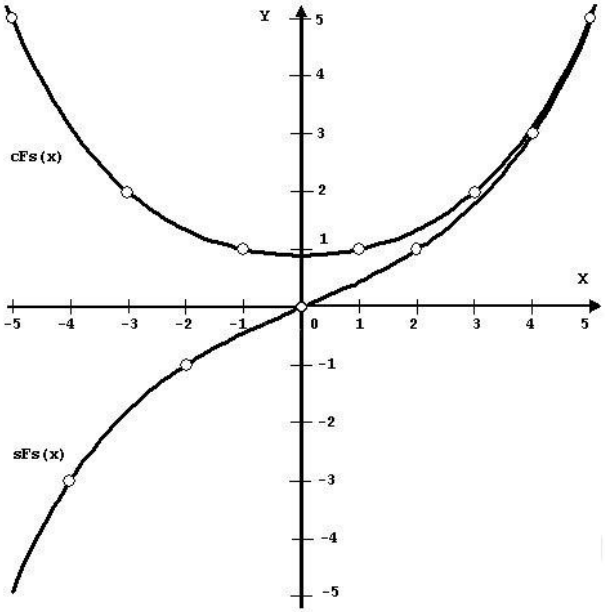


Figure 1. The symmetric Fibonacci functions

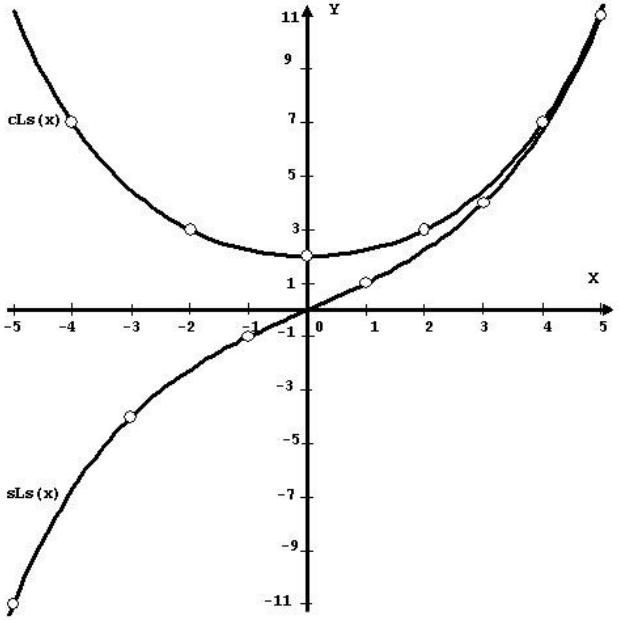


Figure 2. The symmetric Lucas functions

Their graphs have a symmetric form and are similar to the graphs of the classical hyperbolic functions. However, at the point $x = 0$, the symmetric Fibonacci cosine $cFs(x)$ takes the value

$$cFs(0) = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

while the symmetric Lucas cosine $cLs(x)$ takes the value $cLs(0) = 2$. It is also important tonote that the Fibonacci numbers F_n, with even indices, are values of the symmetric Fibonacci sine, $sFs(x)$, at even integer values of x and the Fibonacci numbers, with odd indices, are values of the symmetric Fibonacci cosine, $cFs(x)$, at odd integer values of x. On the other hand, Lucas numbers with the even indices, are values of the symmetric Lucas cosine $cLs(x)$ at the even integers, and the Lucas numbers, with the odd indices, are values of the symmetric Lucas cosine $sLs(x)$ at the odd integers."[129]

Dort findet sich auch einleitend in diesem Zusammenhang die Formel $x^2 = x + 1$, die man in $x^2 - x - 1 = 0$ umschreiben kann[130], und die zwei Wurzel hat: „Equation (1) has two roots. Its positive root

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

is called *golden proportion, golden mean, or golden ratio.*"[131] Von hier aus wird die Berechnung der Fibonacci-Folge[132] als Kurve anhand der Gegenüberstellung mit der Lucas-Folge[133] abgeleitet:

„Hyperbolic Fibonacci and Lucas functions

3.1. Stakhov and Tkachenko's approach

---

[129] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[130] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[131] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[132] Wikipedia, Primzahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 58156822, Bearbeitungsstand: 21. März 2009 < URL >: „Den kleinen fermatschen Satz kann man auch in der Form lesen: In der Folge $a^n - a$ ist das p-te Folgenglied für eine Primzahl p stets durch p teilbar. Ähnliche Eigenschaften besitzen auch andere Folgen von exponentiellem Charakter, wie die Lucas-Folge $(p|L_p - 1)$ und die Perrin-Folge $(p|P_p)$. Für andere lineare Rekursionen gelten analoge, aber kompliziertere Aussagen, beispielsweise für die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n=0,1,2\ldots} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$"
[133] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.

If we compare Binet formulas (9) and (10) to the classical hyperbolic functions

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \quad (11)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}. \quad (12)$$

wwe notice a similarity.

In [4], the discrete variable *k* in formulas (9) and (10) was replaced with the continuous variable *x* that takes its values from the set of real numbers. Consequently, the following continuous functions, which are called *the hyperbolic Fibonacci and the Lucas functions*, were introduced:

The hyperbolic Fibonacci sine

$$sF(x) = \frac{\tau^{2x}-\tau^{-2x}}{\sqrt{5}} \quad (13)$$

The hyperbolic Fibonacci cosine

$$cF(x) = \frac{\tau^{2x+1}-\tau^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}} \quad (14)$$

The hyperbolic Lucas sine

$$aL(x) = \tau^{2x+1} - \tau^{-(2x+1)} \quad (15)$$

The hyperbolic Lucas cosine

$$cL(x) = \tau^{2x} + \tau^{-2x} \quad (16)$$

The connection between Fibonacci (F_n) and Lucas (L_n) numbers and the hyperbolic Fibonacci and the Lucas functions (13)-(16) is given by the following identities:

$$sF(k) = F_{2k};\ cF(k) = F_{2k+1};\ sL(k) = L_{2k+1};\ cL(k) = L_{2k}\ , \quad (17)$$

where k is an arbitrary integer."[134]

Der gleiche Zusammenhang, wie wir das bei der Riemannsche Zeta-Funktion[135] gesehen haben, wird nun für die Fibonacci-Funktion gezeigt:

„If we compare Binet formulas (9) and (10) to the classical hyperbolic functions

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (11)$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (12)$$

wwe notice a similarity."[136] Danach wird die Hyperbel als die Dämpfungskurve der Fibonacci-Folge gezeigt, als Überleitung zur Spirale: „The graph of the quasi-sine Fibonacci function passes through all points of the

[134] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[135] Trost 62 ff.

coordinate plane corresponding to the Fibonacci numbers (see Fig.3). The symmetric hyperbolic Fibonacci functions (19) and (20) (Fig. 1) are the envelopes of the quasi-sine Fibonacci function .

Also the quasi-sine Fibonacci function has recursive properties similar to Fibonacci numbers [7].

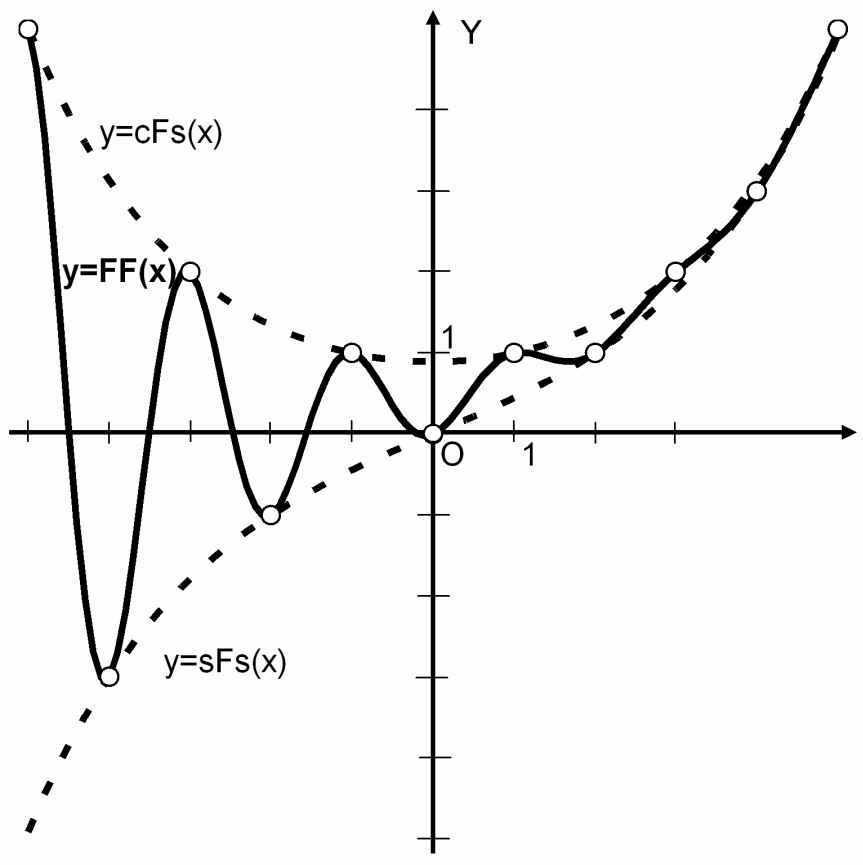


Figure 3. The graph of the quasi-sine Fibonacci function

[136] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.

4.2. The three-dimensional Fibonacci spiral

It is well known that the trigonometric sine and cosine can be defined as projection of the translational movement of a point on the surface of an infinite rotating cylinder with the radius 1, whose symmetry center coincides with x-axis. Such a three-dimensional spiral is projected into the sine function on a plane and described by the complex function

$$f(x) = \cos(x) + i\sin(x), \text{ where } i = \sqrt{-1}.$$

If we assume that the quasi-sine Fibonacci function (32) is a projection of a three-dimensional spiral on some funnel-shaped surface, then analogous to the trigonometric sine, it is possible to construct a *three-dimensional Fibonacci spiral*."[137]

Die eher unübliche dreidimensionale Darstellung der Spirale[138] zeigt anschaulich, warum die dreidimensionale Darstellung gewählt wurde:

„*Definition 2.* The following function is a complex representation of *the three-dimensional Fibonacci spiral*:

$$CFF(x) = \frac{\tau^x - \cos(\pi x)\,\tau^{-x}}{\sqrt{5}} + i\,\frac{\sin(\pi x)\tau^{-x}}{\sqrt{5}}. \quad (34)$$

This function, by its shape, resembles a spiral that is drawn on the crater with a bent end (Fig. 4).

[137] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[138] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.

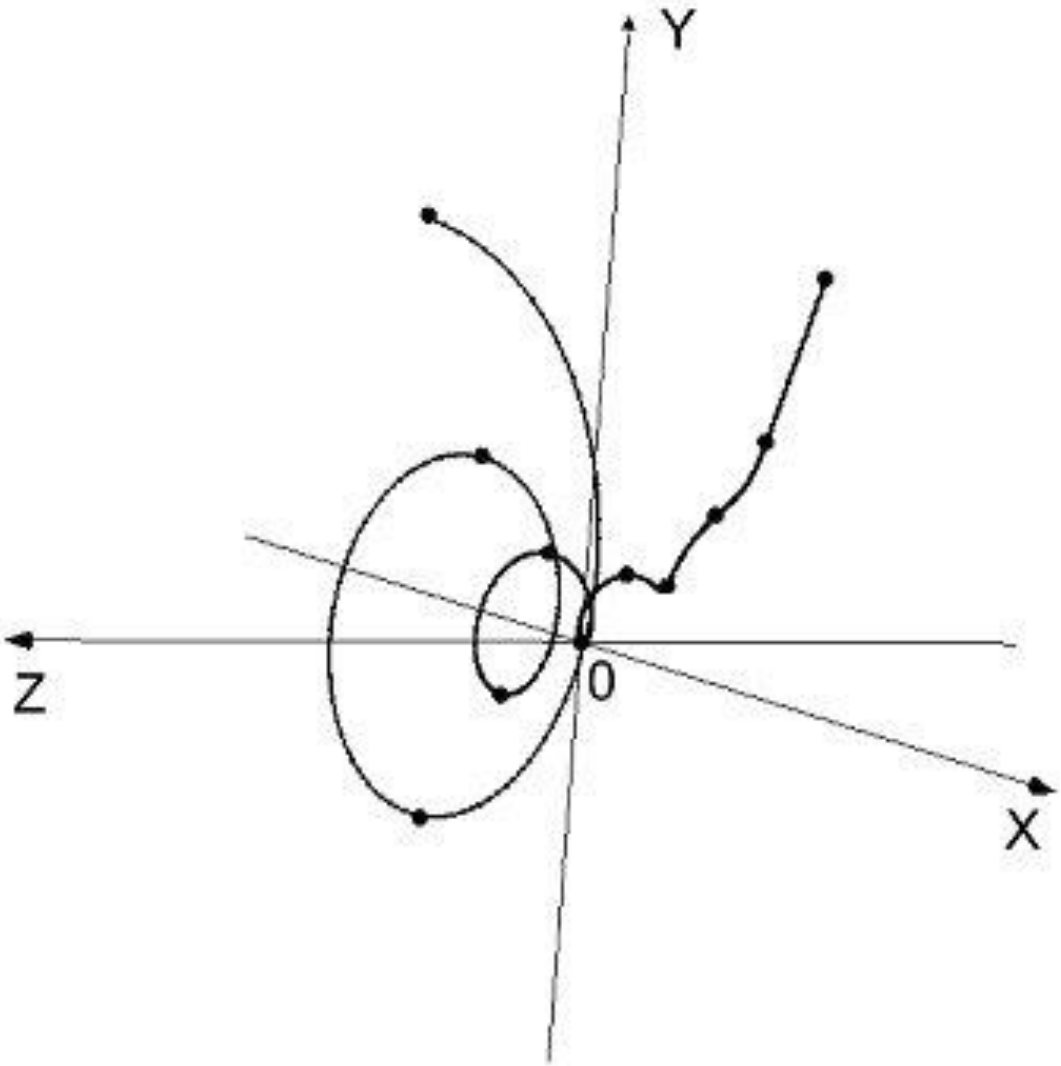


Figure 4. The three-dimensional Fibonacci spiral

4.3 The Golden Shofar

Consider real and imaginary parts in the complex Fibonacci spiral:

$$Re[CFF(x)] = \frac{\tau^x - \cos(\pi x)\ \tau^{-x}}{\sqrt{5}}; (35)$$

$$Im[CFF(x)] = \frac{\sin(\pi x)\,\tau^{-x}}{\sqrt{5}}. (36)$$

Designating the real part by $y(x)$ and the imaginary part by $z(x)$, we can get the following system of equations:

$$y(x) - \frac{\alpha^x}{\sqrt{5}} = -\frac{\cos(\pi x)\ \alpha^{-x}}{\sqrt{5}}, (37)$$

$$z(x) = \frac{\sin(\pi x)\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}.$$

Square both expressions of system (37) and add them, taking y and z as independent variables, to get the following curvilinear surface.

Definition 3. The three-dimensional curved surface given by,

$$\left(y - \frac{\tau^x}{\sqrt{5}}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{\tau^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2. (38)$$

is called *the Golden Shofar* and shown in Fig. 5.

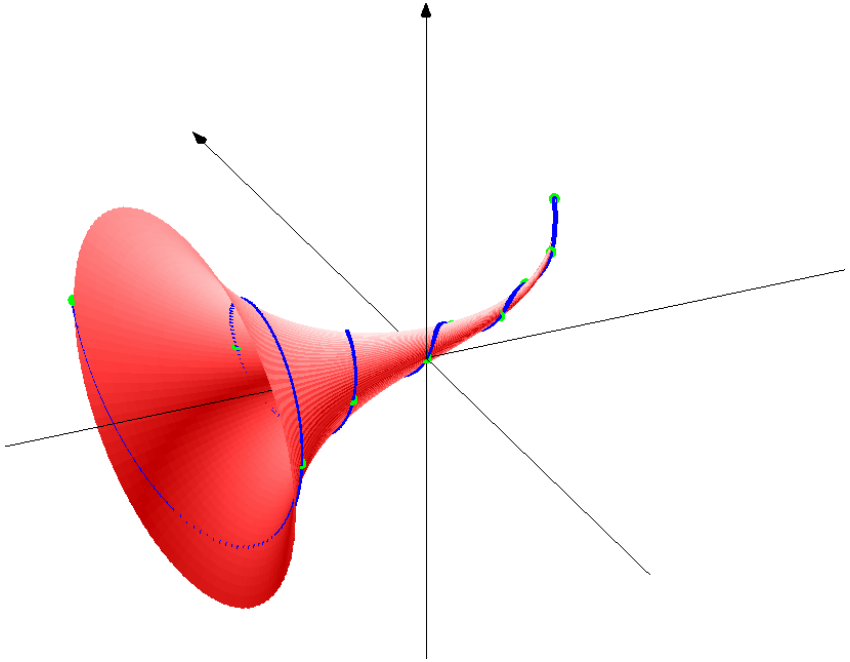


Figure 5. The Golden Shofar

The Golden Shofar looks like a horn or crater with its narrow end bent up. Translating from the Hebrew language, the word ‚Shofar‘ means a horn that is a symbol of power or might. The Shofar is blown on The Judgment Day (the Jewish New Year) and the Day of Atonement (the Yom Kippur).

Formula (38) for the Golden Shofar can also be represented in the form:

$$z^2 = [cFs(x) - y][sFs(x) + y], \quad (39)$$

where $sFs(x)$ and $cFs(x)$ are the symmetric hyperbolic Fibonacci functions (20) and (21) respectively.

4. A general model of the hyperbolic space with a ‘shofarable’ topology

Based on experimental data obtained in 2003 by the NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), a new hypothesis about the structure of the Universe was developed. According to [28], the geometry of the Universe is similar in shape to a horn or a pipe with an extended bell [27]. As a result of this disclosure we make the following claim:

The Universe has a ‘shofarable’ topology as shown in Fig.6.

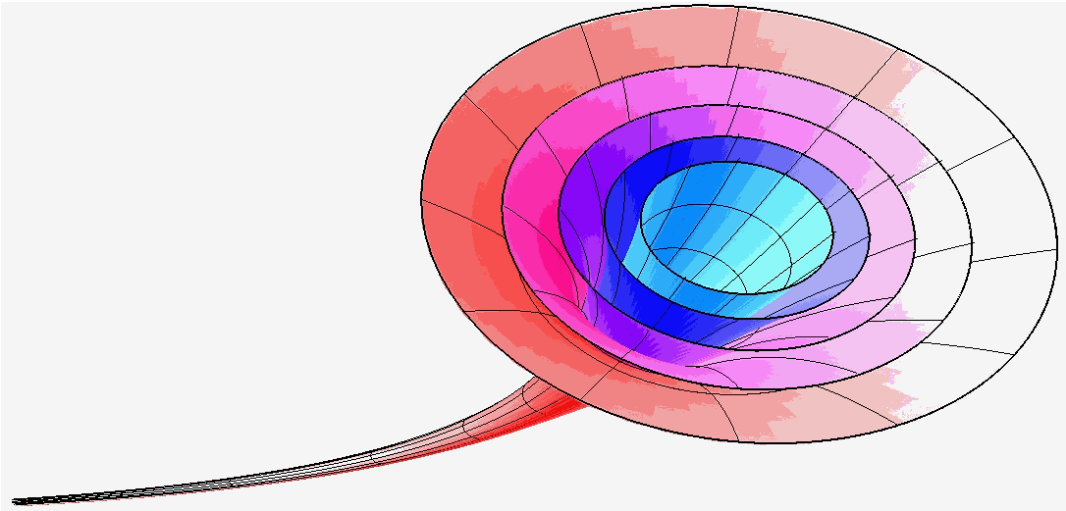


Figure 6. The ‘shofarable’ topology“[139]

Abgerundet wir die bildliche Darstellung mit der eingangs zitierten Formel $x = x + 1$ Potenzfolge $x^{p+1} = x^p + 1$:

[139] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.

„*6.2.The golden p-proportions and the 'golden' algebraic equations*

It is well known that the ratios of adjacent Fibonacci numbers F_n/F_{n-1} approach the golden mean in a limiting sense. We have also shown that the ratio of adjacent Fibonacci *p*-numbers $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ approaches in the limit some positive number τ_p that is a positive root of the polynomial equation [8]

$$x^{p+1} = x^p + 1, \quad (45)$$

where p=0, 1, 2, 3, … .

The numbers τ_p are referred to as *golden p-proportions* since for the case p=1 the number τ_p coincides with the classical Golden Proportion. We call Equation (45) the golden algebraic equation because for the case p=1 Equation (45) reduces to Equation (1) [9]"[140].

Damit wären wir in die Nähe der Riemannschen Zetafunktion[141] gerückt uns können statt $x^{p+1} = x^p + 1$ die negative Form $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ oder $x^{p+1} - x^p = 1$ schreiben.

Die Verbindung der Fibonacci-Folge mit der Hyperbelfunktion der Eulerschen Identität[142] über Analogie zur Lucas-Folge ist in unserem Zusammenhang von Bedeutung, weil die Lucas-Folge zum Thema Primzahlen gehört[143]:

„Die allgemeine Lucas-Folgen $U_n(P,Q)$, $V_n(P,Q)$ und die Primzahlen

[140] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[141] Trost 62 ff.
[142] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[143] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.

Die Allgemeinen Lucas-Folgen *U(P,Q)* und *V(P,Q)* haben für ganzzahlige Parameter *P* und *Q* eine spezielle Eigenschaft hinsichtlich der Teilbarkeit durch Primzahlen. Diese Eigenschaft wurde bei bestimmten Verfahren zur Bestimmung der Primalität einer Zahl angewandt. Leider waren diese Verfahren für bestimmte Arten von Pseudoprimzahlen anfällig.

U(P,Q)

Für alle Lucas-Folgen $U_n(P,Q) = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ gilt:
Ist p eine Primzahl, so ist $U_n(P,Q) - \left(\frac{D}{p}\right)$ durch p teilbar.
Dabei ist $\left(\frac{D}{p}\right)$ das Legendre-Symbol.
Es existieren auch zusammengesetzte Zahlen, die diese Bedingung erfüllen. Diese Zahlen nennt man Lucas-Pseudoprimzahlen.

V(P,Q)

Für alle Lucas-Folgen $N_n(P,Q) = a^n + b^n$ gilt: wenn n eine Primzahl ist, dann ist $(V_n(P,Q) - P)$ durch n teilbar. Oder, anders ausgedrückt:

$V_n(P,Q) \equiv P \bmod n$

für alle n, die Primzahlen sind. Zusammengesetzte Zahlen die diese Bedingung erfüllen, mit der Einschränkung das P positiv und Q entweder 1 oder -1 ist, nennt man Fibonacci-Pseudoprimzahlen.

Der kleine Fermatsche Satz

Besonders interessant ist dies für die Folge $V_n(3,2) = a^n + b^n = 2^n + 1$. Für diese Folge gilt nämlich:

Wenn n eine Primzahl ist, dann gilt: n teilt $2^n + 1 - 3 = 2^n - 2$.

Dies ist eine spezielle Form des kleinen Fermatschen Satz.

Analog zu $a^p \equiv a \bmod p$ gilt also $V_p(a + 1,a) \equiv V_1(a + 1,a) \bmod p$

Anwendungen der allgemeinen Lucas-Folgen

Die allgemeinen Lucas-Folgen spielen in der Zahlentheorie und der Kryptographie eine Rolle.
Siehe auch: Lucas-Lehmer-Test, Lucassche Pseudoprimzahl, Fibonacci-Folge, Jacobsthal-Folge, Pell-Folge

Die spezielle Lucas-Folge

Die allgemein als Lucas-Folge bekannte Folge L_n der Lucas-Zahlen 2 1 3 4 7 11 18 29 ... lässt sich auf unterschiedlichste Art und Weise erzeugen:

Über die Formel von Binet (nach Jacques Philippe Marie Binet):

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

die sich aus der allgemeinen Lucas-Folge $L_n = V_n(-1,1) = a^n + b^n$ mit $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ableiten lässt

Über die rekursive Formel, die der rekursiven Formel für die Fibonacci-Folge gleicht:

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ mit den Anfangswerten $L_0 = 2$ und $L_1 = 1$

Über eine Potenz des goldenen Schnitt:

$$L_n = \Phi^n + \Psi^n$$

Eine andere rekursive Formel:

$$L_{n+1} = \left[\frac{L_n\left(1+\sqrt{5}\right)+1}{2}\right]$$

Als Summe zweier Glieder der Fibonacci-Folge:

$$L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$$

Siehe auch

lineare Differenzengleichung

Literatur

Paulo Ribenboim: *The new Book of Primenumber Records*, ISBN 0-387-94457-5.
Paulo Ribenboim: *My Numbers, my Friends*, ISBN 0-387-98911-0. "[144]

Die Lucas-Folge kommt mit der allgemeinen Formel

$$U_n(P,Q) = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

in die Nähe der Riemannschen Zetafunktion[145]: Für die Folge $V_n(3,2) = a^n + b^n = 2^n + 1$ gilt: Wenn *n* eine Primzahl ist, dann teilt *n* die Formel $2^n + 1 - 3 = 2^n - 2$. Dies ist eine spezielle Form des kleinen

[144] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.

Fermatschen Satzes. Analog zu $a^p \equiv a \bmod p$ gilt also $V_p(a + 1,a) \equiv V_1(a + 1,a) \bmod p$. Die spezielle Form der Lucas-Folge ist wiederum ganz in der Nähe der Fibonacci-Folge:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

und lässt sich aus der allgemeinen Lucas-Folge $L_n = V_n(-1,1) = a^n + b^n$ mit

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; und \; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ableiten[146]. Bei der Riemannschen Zetafunktion[147] als vermuteter Lösungsansatz des Primzahlsatzes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

zeigt die Funktionen[148] des Sekans Hyperbolicus (sech) und Kosekans Hyperbolikus (csch) mit:

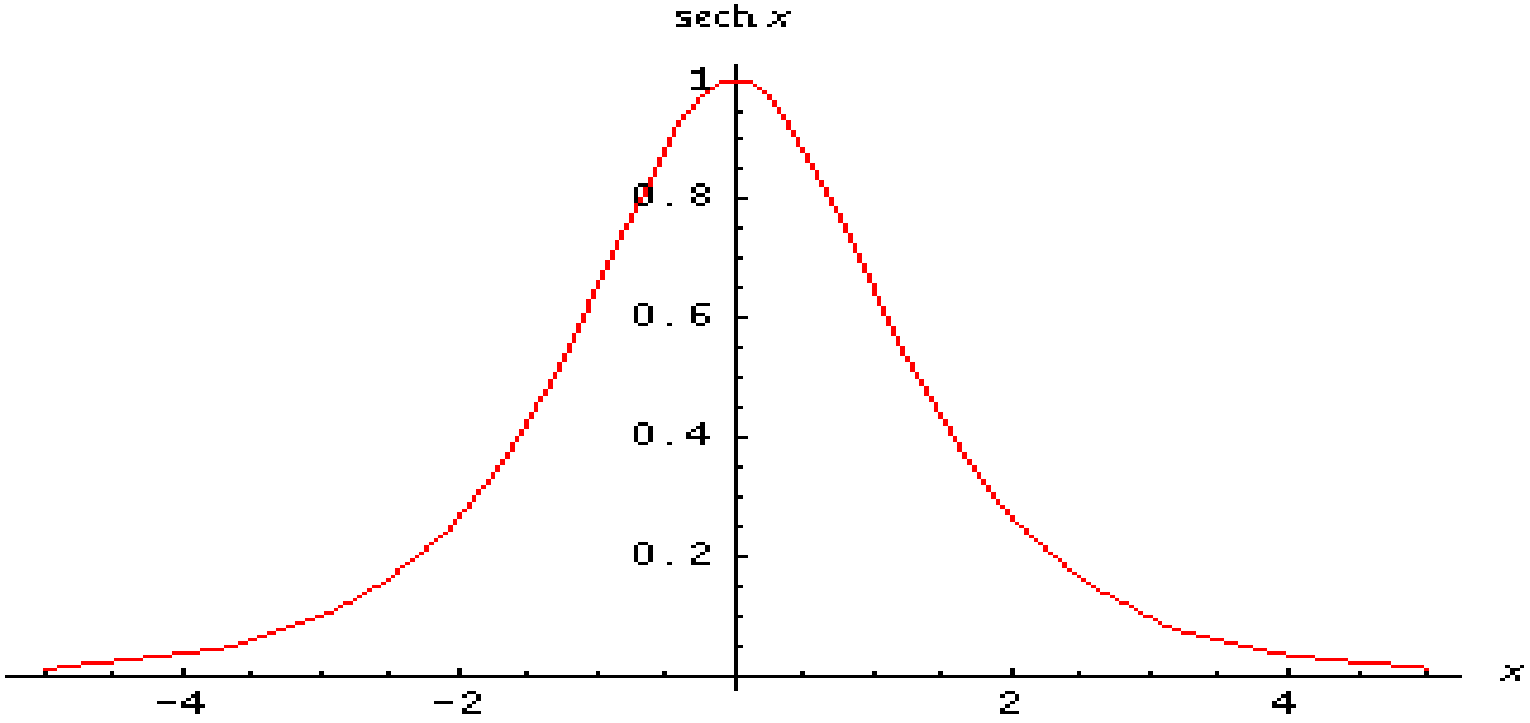
$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$$

---

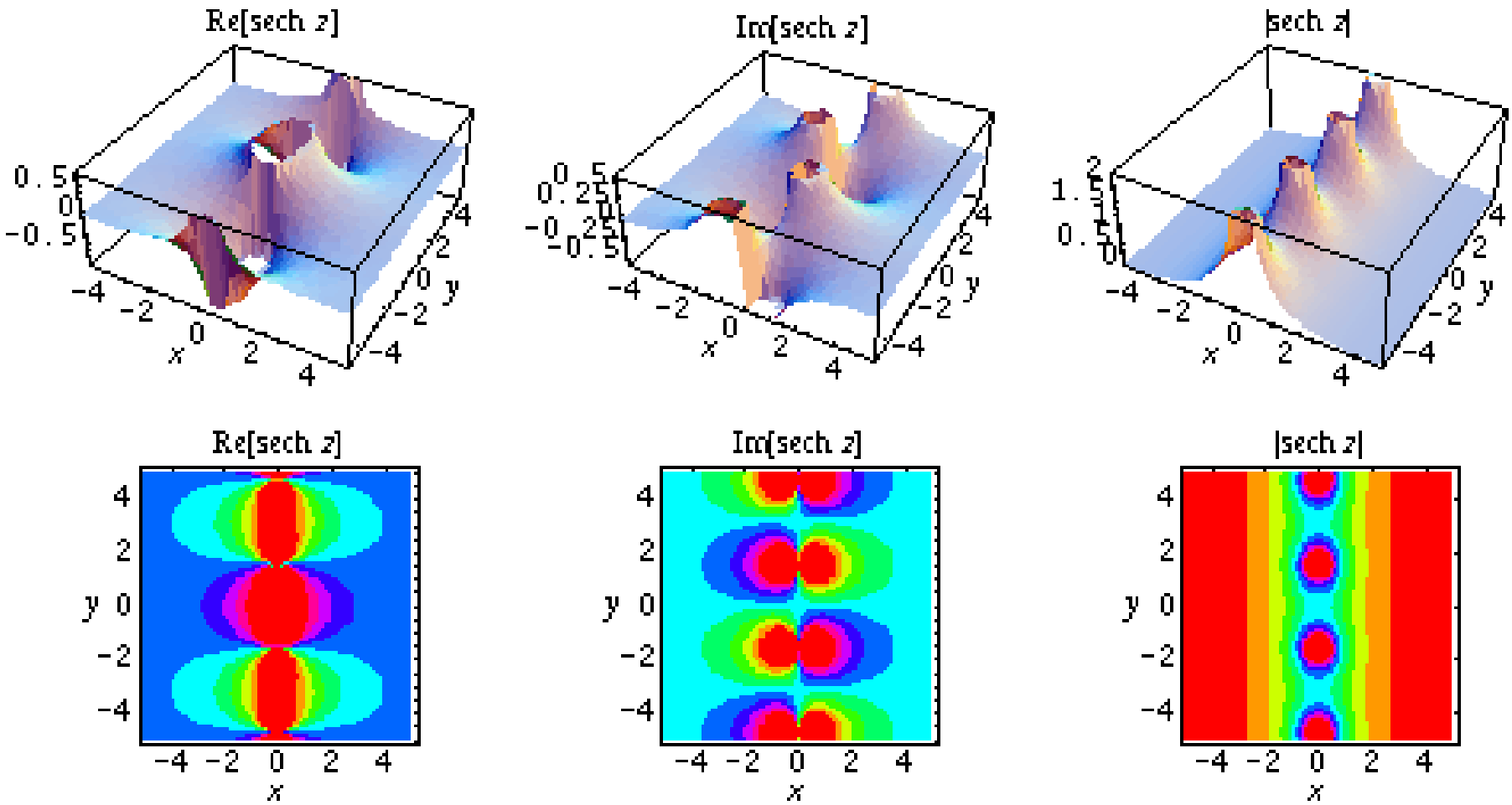
[145] Trost 62 ff; Landau I 30 f; Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.
[146] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.
[147] Trost 62 ff; Landau I 30 f.
[148] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >; Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >; Padberg 80.

Die schon gezeigte Umrechnung von *sech x* in *cosh x* und *csch x* in *sinh x* mit $e^{\pm z}$ zeigt also den gesuchten Zusammenhang[149].

„Hyperbolic Secant



[149] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.



The hyperbolic secant is defined as

$$\operatorname{sech} z \equiv \frac{1}{\cosh z} \tag{1}$$

$$= \frac{2}{e^z + e^{-z}} \tag{2}$$

where $\cosh z$ is the hyperbolic cosine. It is implemented in *Mathematica* as `Sech[z]`.

On the real line, it has a maximum at x = 0 and inflection points at $x = \pm \cosh^{-1}(\sqrt{2}) = 0{,}8813735$ ... (Sloane's A091648). It has a fixed point at x = 0,76500995… (Sloane's A069814).

The derivative is given by

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \tag{3}$$

where $\tanh z$ is the hyperbolic tangent, and the indefinite integral by

$$\int \operatorname{sech} z \; dz = 2 \tan^{-1}\left[\tanh\left(\frac{1}{2} z\right)\right] + C \tag{4}$$

where C is a constant of integration.

$\operatorname{sech} z$ has the Taylor series

$$\operatorname{sech} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \tag{5}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{5}{24} z^4 - \frac{61}{720} z^6 + \frac{277}{8064} z^8 - \cdots \tag{6}$$

(Sloane's A046976 and A046977), where E_n is an Euler number and n! is a factorial.

Equating coefficients of θ^0, θ^4, and θ^8 in the Ramanujan cos/cosh identity

$$\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\cosh(n\pi)}\right]^{-2} + \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\theta)}{\cosh(n\pi)}\right]^{-2} = \frac{2\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} \tag{7}$$

gives the amazing identities

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}(\pi n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} - 1\right\} \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{sech}(\pi n) = \frac{18\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sech}(\pi n)\right]^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^8 \operatorname{sech}(\pi n) = \frac{168\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sech}(\pi n)\right] \sum_{n=1}^{\infty} n^6 \operatorname{sech}(\pi n) - \frac{63000\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^6}{\pi^{3/2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sech}(\pi n)\right]^4$$"[150]

In grober Annäherung lautet der Lösungsansatz der Riemanschen Zetafunktion[151]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

nunmehr aufgrund

$$a^x = e^{x \ln a}$$

und[152]

$$e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}},$$

die Eulersche Zahl *e* statt *n* gesetzt[153]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^s}$$

---

[150] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[151] Landau I 30 f; Trost 62 ff.
[152] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.
[153] Wikipedia, Exponentialfunktion, In: < URL >: „Als *die Exponentialfunktion* im engeren Sinne wird die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ mit der eulerschen Zahl e ≈ 2,718281828459 als Basis bezeichnet; hierfür ist auch die Notation $x \mapsto \exp(x)$ gebräuchlich. Unter Verwendung des Logarithmus lässt sich wegen der Identität $a^x = e^{x \ln a}$ jede Exponentialfunktion auf eine solche zur Basis *e* zurückführen, weshalb dieser Artikel im folgenden auf die Exponentialfunktion zur Basis *e* fokussiert."

denn n^s hat bereits so die Bedeutung $e^{s \ln n}$ bei reellem ln n, und die Eulerschen Identität[154] zeigt die trigonometrische Funktion $e^{ix} = cos(x) + i\, sin(x)$ und $e^{-ix} = cos(x) - i\, sin(x)$ als Hyperbel und die Ableitung[155]

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ bzw. } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist eine Spezialform der Dirichletschen Reihe[156]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-s \ln n}$$

und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

sie kann allgemein als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s}$$

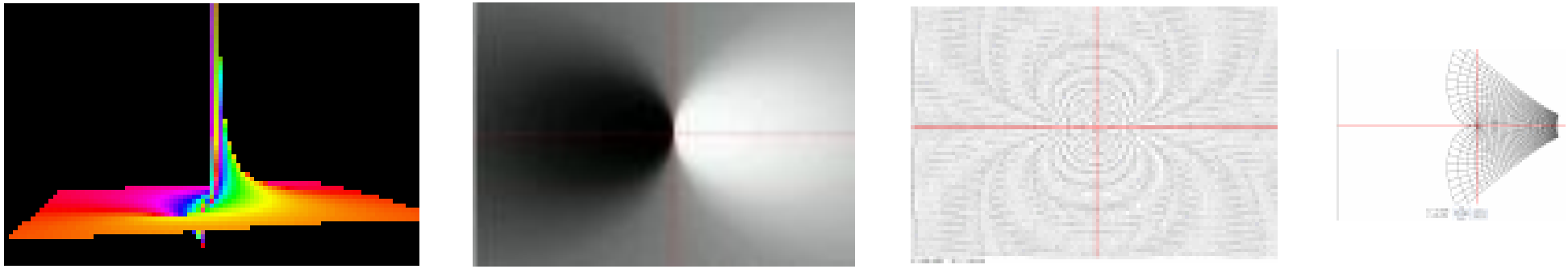
geschrieben werden[157].

---

[154] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[155] Vgl Schönhacker, Die Zahl e, S. 43 f, in: < URL >
.
[156] Landau I 103 ff.
[157] Landau II 723 ff.

Insofern die Primzahlen rechtens als die Atome der Mathematik bezeichnet wurden[158], so wären sie gleichsam quantisiert: Es wird behauptet, dass die Riemannsche Zetafunktion[159] den Bedingungen der Quantenmechanik genüge[160].

„Staatsexamensarbeit: plotc - ein komplexer Funktionenplotter in Java

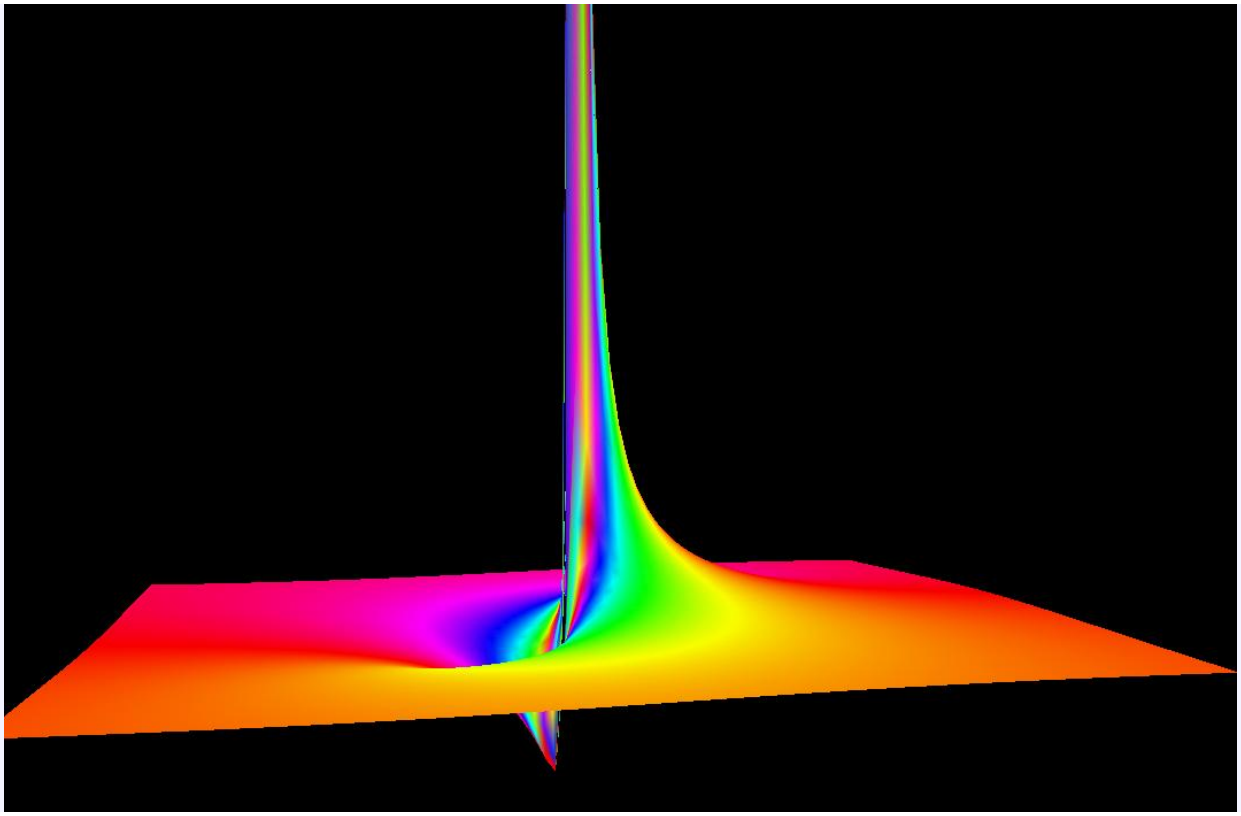


Die Abbildungen zeigen die Funktion $e^{1/z}$ in verschiedenen Darstellungen. Bei (0|0) jeweils die unterschiedlichen Sichten auf die wesentliche Singularität

Im Rahmen seines Studiums beschäftigt sich jeder Mathematik-Student mit der Theorie der komplexwertigen Funktionen. Dies nicht zuletzt deshalb, weil ihre Inhalte und Ergebnisse sich durch eine theoretische Schönheit und praktische Verwendbarkeit auszeichnen, die für die Mathematik als wegweisend gilt. Die Anschaulichkeit dieser wichtigen mathematischen Sachverhalte ist allerdings relativ gering, da die herkömmlichen Visualisierungsmedien

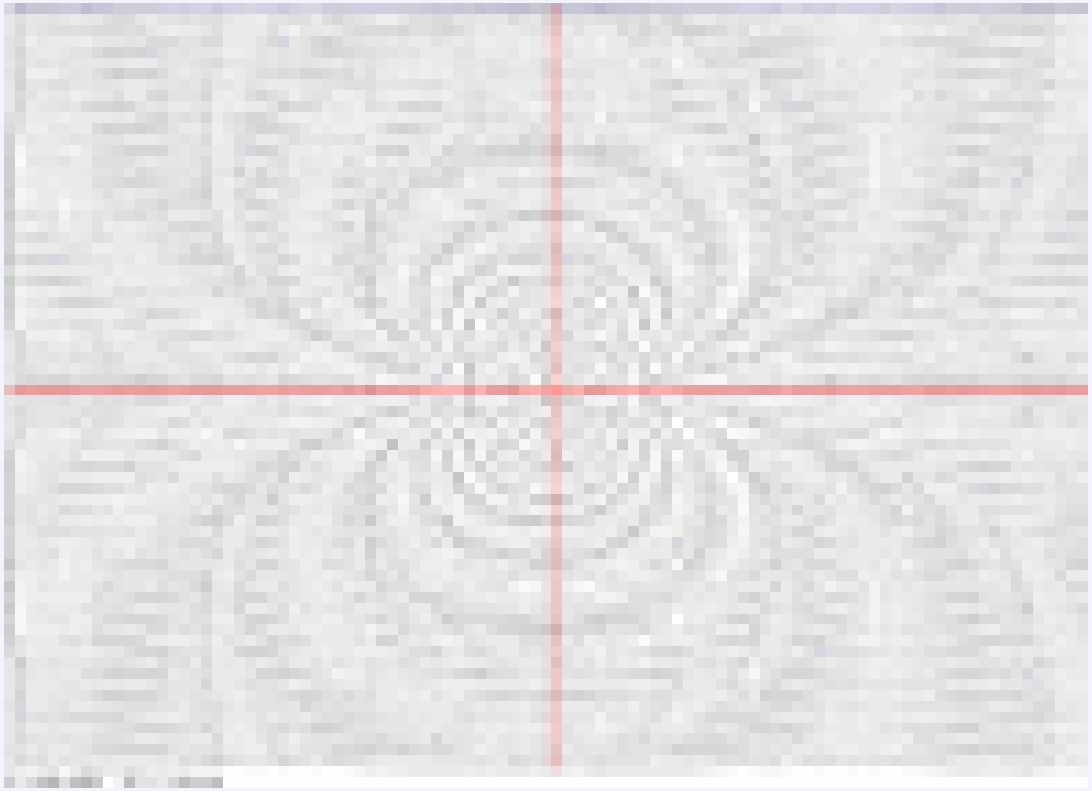
[158] Kuba/Götz 3; Sautoy 31 ff; (cr), Netzwelt, Lösung der Riemann-Hypothese steht bevor, Wie Mathematik die Internetsicherheit bedroht, in: < URL >: „Die Berechenbarkeit von Primzahlen erlaubt die Rekombination der ‚Atome der Mathematik'"
[159] Trost 62 ff.
[160] Gaubitzer 74 f.

(Buch, Tafel) nur unzureichend in der Lage sind, komplexwertige Funktionen darzustellen: Zum einen wären mindestens drei Dimensionen[161] nötig, um die wichtigsten Sachverhalte zu veranschaulichen, zum anderen bedarf es bei individuellen Fragestellungen einer Interaktion zwischen Betrachter und Graphen. Mit der allgemeinen Verfügbarkeit von Computern, die in der Lage sind, aufwendige dreidimensionale Graphiken in Echtzeit zu berechnen, gelten diese Beschränkungen nicht mehr. Mit ihnen bietet sich sogar die Möglichkeit einer neuen *phänomenologischen* Sichtweise auf komplexe mathematische Sachverhalte.



[161] Hainzl 14 f.

Die vorliegende Arbeit hat es sich zum Ziel gesetzt, eine solche Sichtweise durch Entwicklung eines webfähigen Visualisierungswerkzeuges zu befördern. Dabei stehen vor allem die Interaktivität und die Berücksichtigung verschiedener Darstellungsmöglichkeiten (s. Abb.) im Vordergrund. In einem ersten Schritt wurde ein Prototyp entworfen und in Java implementiert.



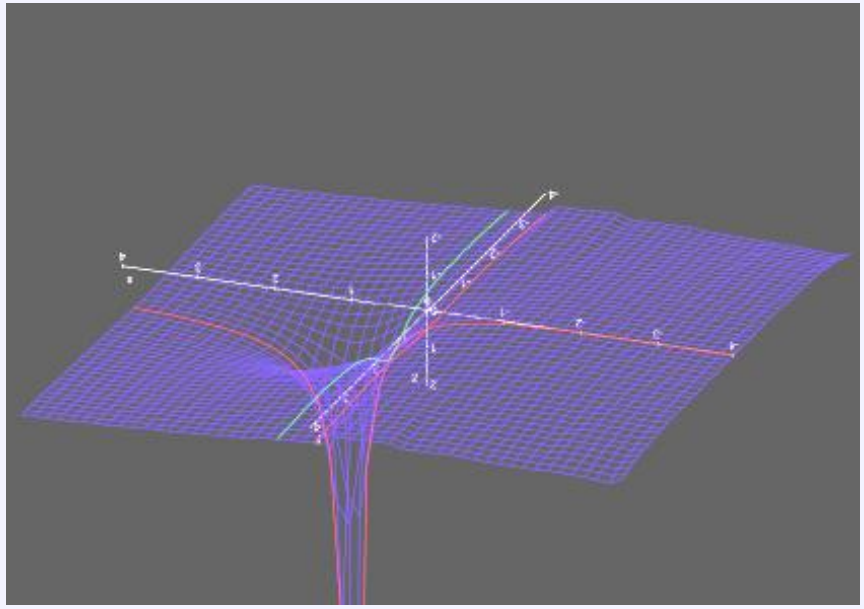
Beim Design der Objektklassen wurde nicht nur auf die Erweiterung um zusätzliche Interaktivität geachtet, sondern auch Schnittstellen für die Berechnung speziellerer Funktionen implementiert. Damit konnte in einem zweiten

exemplarischen Schritt unter geringem zusätzlichen Aufwand die Berechnung der Riemannschen Zetafunktion (einer für die Primzahlsuche wichtigen Funktion) vorgenommen werden. Die Objekt-Bibliothek ihrerseits ist ebenfalls weiter verwendbar, so wurden z.B. der komplette Parser und der (triviale) Codegenerator für ein Visualisierungswerkzeug im Bereich der Schulmathematik wiederverwendet.“[162]

[162] Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 24 ff.

Die Folge $n^{½ + ti}$

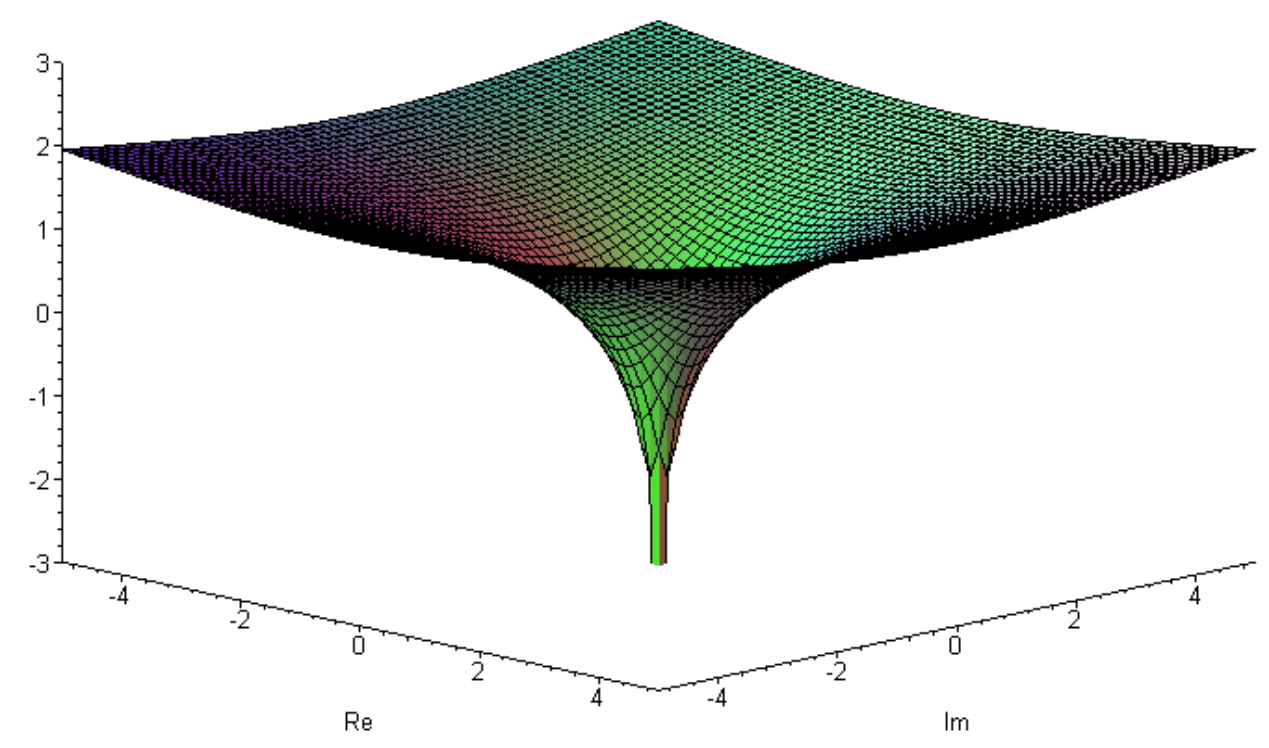
Der von Vries als Singularität bezeichnete Spitze, bzw. umgekehrter Trichter wird aus dem hier gezeigten Zusammenhang besser zugänglich:



Die Drehung[163] (Spiegelung) der Grafik von Vries um 180° zeigt ein anschaulicheres Bild, bzw. zeigt eine bessere Perspektive von dem Trichter im Bild. Sinus Hyperbolicus[164] sinh(θ) Kosinus Hyper-

[163] Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht."

bolicus cosh(θ) haben keine Pole auf der imaginären Achse[165], und entsprechen dem Absolutbetrag |ζ(z)| der Riemanschen Zetafunktion in der Grafik von Vries[166].



Die gegenüberstellung der Grafik des Logarithmus[167] zeigt wiederum ähnlichkeiten. Eine anschaulichere Darstellung bietet:

---

[164] Westermann 407 f; Knopp 431 ff; Hainzl 142 ff; Meschkowski 122 ff.
[165] Wikipedia, Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus, In: < URL >.
[166] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.
[167] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.

„Diskrete Logarithmen

→ *Hauptartikel:* Diskreter Logarithmus[168]

Diskrete Logarithmen sind Lösungen von Gleichungen der Form

$$a^x = \underbrace{a \circ a \circ \ldots}_{x\,mal} = b$$

über einer endlichen zyklischen Gruppe $(G, \circ) = \langle a \rangle$. Der diskrete Logarithmus x von b zur Basis a ist modulo der Gruppenordnung von G eindeutig bestimmt und existiert – da a ein Erzeuger der Gruppe ist – für alle Elemente der Gruppe.

Diskrete Logarithmen sind im Sinne der Komplexitätstheorie für viele Gruppen aufwändig zu berechnen und finden Anwendung in der Kryptographie, etwa in auf elliptischen Kurven basierenden Kryptosystemen.

Beispiel:

$$2^x = 5 \bmod 11$$

hat als Lösung den Wert 4, denn es gilt $2^4 = 16$, und 16 lässt den Rest 5 bei Division mit Rest durch 11. Die Lösung ist eindeutig modulo 10, also modulo der Gruppenordnung von $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^x$. Dementsprechend ist mit x auch $x \pm 10$ eine Lösung der Kongruenz.“[169]

---

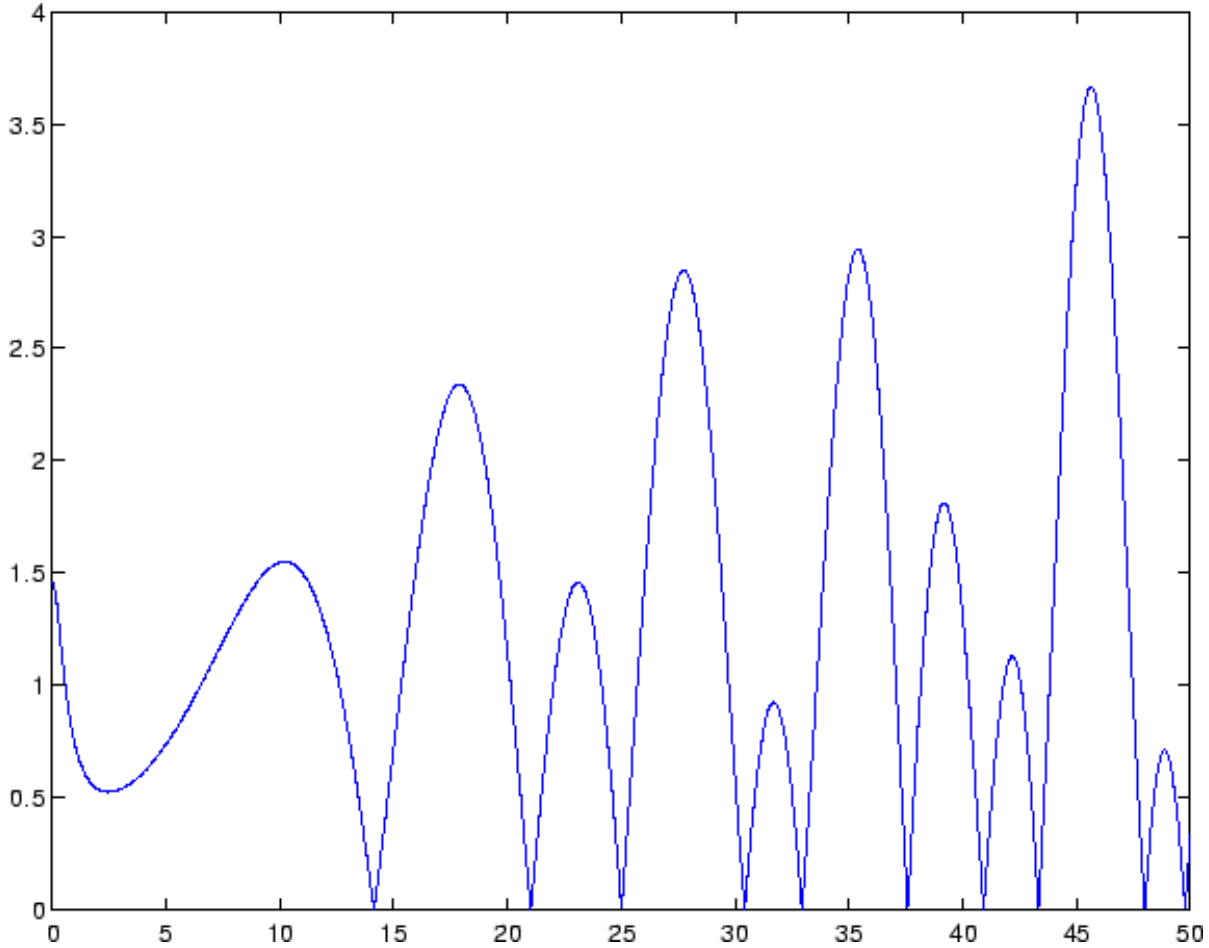
[168] Wikipedia, Diskreter Logarithmus, In: <URL >: „In der Gruppentheorie ist der **diskrete Logarithmus** das Analogon zum gewöhnlichen Logarithmus aus der Analysis; *diskret* kann in diesem Zusammenhang etwa wie *ganzzahlig* verstanden werden. Die diskrete Exponentiation in einer zyklischen Gruppe bildet eine Umkehrfunktion des diskreten Logarithmus. Als Vergleich: die stetige Exponentialfunktion ist eine Umkehrfunktion des gewöhnlichen Logarithmus.“

[169] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.

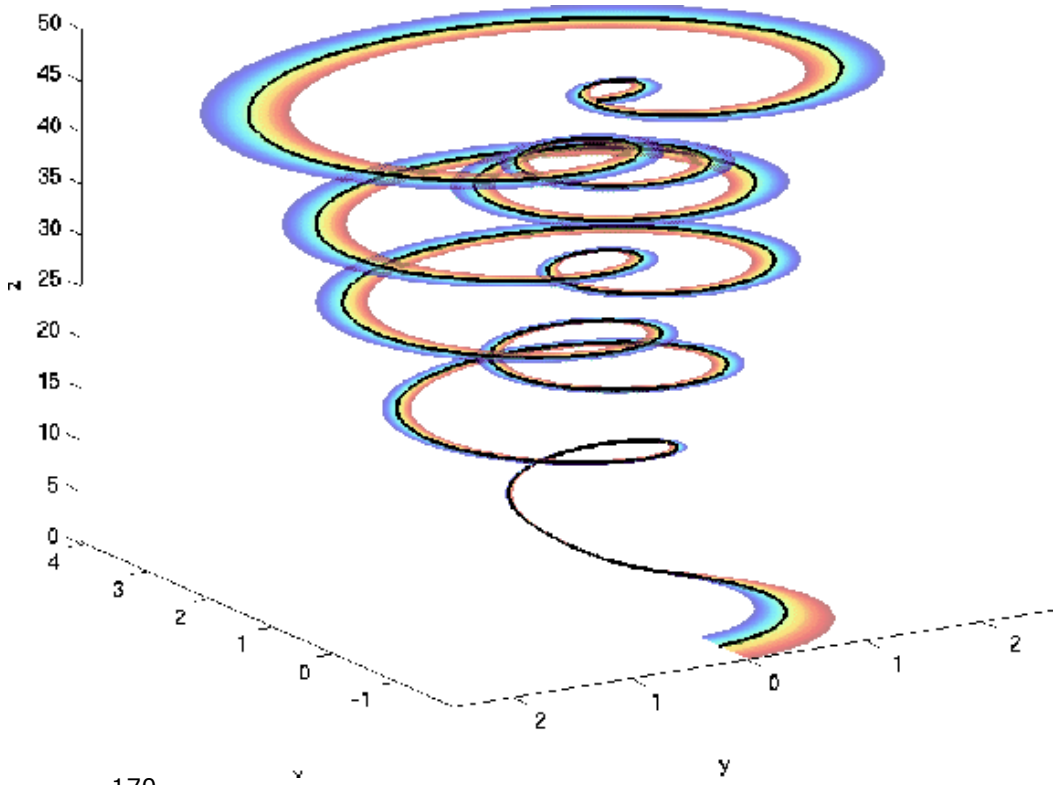
Noch deutlicher:

„Grafiken der Riemannschen Zeta-Funktion

[…] Die erste Grafik zeigt den Betrag der Zeta-Funktion auf der kritischen Geraden $\frac{1}{2} + t\sqrt{-1}, t \in [0,50]$:



Die zweite Grafik zeigt die Werte der Zeta-Funktion im Bereich [4,6]+[0,50]$\sqrt{-1}$. Die x- und die y-Achse entsprechen dem Real- und dem Imaginärteil der Funktionswerte. Die Färbung und die z-Achse geben Real- und Imaginärteil der Urbilder wieder. Die schwarze Kurve entspricht der kritischen Geraden $\frac{1}{2} + t\sqrt{-1}, t \in [0,50]$.



(Autoren: Brenner/Höllig/Hörner)" [170]

[170] Brenner/Höllig/Hömer, Grafiken der Riemannschen Zetafunktion, in: < URL >

Riemanns Aufsatz anno 1859

Nachstehend wird nur die este Hälfte des berühmten Aufsatzes von Riemann[171] zitiert, weil die erste Hälfte der Arbeit schließt mit der nämlichen Vermutung, die Geschichte machte, und zwar mit der Begründung, dass die nämliche Vermutung für den zweiten Teil, also für die zweite Hälfte des Aufsatzes, nicht benötigt werde. Auch wenn das nicht ganz stimmt, denn auch für den zweiten Teil manches vorausgesetzt werden muss, so wird es dort nicht mehr behandelt, und auch nicht unbedingt direkt berührt, während die erste Hälfte des Aufsatzes eigentlich von der nämlichen Vermtung direkt handelt.

„Die Quelle: Riemann, Bernhard: Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Berlin 1959, in: Berliner Monatsberichte, 1859, November (Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859):

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubnis baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch die Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

[171] Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL > 1 ff.

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergieren, dargestellt wird, bezeichne ich durch ζ(s). Beide convergieren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck[172] der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung[173]

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1} dx = \frac{\prod(s-1)}{n^s}$$

erhält man[174] zunächst

$$\prod(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

---

[172] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „The (complete) gamma function Γ(n) is […] a slightly unfortunate notation due to Legendre which is now universally used instead of Gauss's simpler $\prod(n) = n!$ (Gauss 1812; Edwards 2001, p. 8).“

[173] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „Integrating equation […] $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} d$“

[174] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „ $\frac{x}{(e^x-1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$ […] konvergiert für alle x mit einem Betrag kleiner als 2π.“

von +∞ bis +∞ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergibt sich dieses leicht[175] gleich

$$\left(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}\right) \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function[176] $(-1)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von −x so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird[177]. Man hat daher

$$2 \sin \pi s \prod (s-1)\, \zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden[178].

---

[175] Wikipedia, Sinus und Kosinus, In: < URL >: „Dieser Ansatz […] ist aus der Eulerformel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$. […] Für beliebige komplexe Zahlen z definiert man analog $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$".

[176] Landau I 30: „Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion', welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s \log n}$ bei reellem log *n* hat."

[177] Meschkowski 136: „Man kann zeigen, dass die durch ein solches unendliches Produkt definierte Funktion F(z) = Q(z) in jedem beschränkten Bereich analytisch ist. […] z. B. in $f_1(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$ eine analytische Funktion, die genau an der Stelle z = n² (n = 1, 2, 3, …) verschwindet. Man kann auch leicht eine Funktion konstruieren, die *alle* ganzen Zahlen *n* zu Nullstellen hat. […] $f_2(z) = z \cdot \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ […] hat dieselben Nullstellen wie die Funktion $\sin \pi z$, nämlich 0, ±1, ±2, ±3, … […] $\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$".

Diese Gleichung gibt nun den Werth der Function ζ(s) für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet[179], wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird[180] und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n2\pi i$ aber ist $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, man erhält daher

$$2\sin\pi s \prod (s-1)\,\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}\left((-i)^{s-1} + i^{s-1}\right)$$

also eine Relation zwischen ζ(s) und ζ(1 – s), welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\prod \left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in 1 – s verwandelt wird[181].

---

[178] Meschkowski 157: „Funktionalgleichung der Γ-Funktion durch die folgende Bemerkung: […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)}$ hat – ebenso wie die Funktion $\sin \pi x$ – die Eigenschaft, für alle ganzen Zahlen zu verschwinden. Das lässt auf eine enge Verwandtschaft dieser Funktionen schließen […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)\left(1 - \frac{x}{m}\right) \cdot x \cdot (-x)$, und daraus folgt […] (31) $\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x) \cdot \Gamma(-x)(-x)}$ und (32) $(-x)\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$ […] ergibt sich aus (31) wenn man die Differenzengleichung (21) auf $\Gamma(-x)$ anwendet."

[179] Meschkowski 156 f.

[180] Westermann 405: „Festzuhalten ist folgende Folgerung

(E2) $\boxed{e^{z+2\pi i} = e^z}$ $z \in \mathbb{C}$

Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der komplexen Periode $2\pi i$."

[181] Havil 69 ff: „Aus dem Kehrwert von $\Gamma(x)$ hat man

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\prod(s-1)$ das Integral $\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum\frac{1}{n^s}$ einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^\infty e^{-nn\pi x}\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

also, wenn man

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x}=\psi(x)$$

setzt,

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(-x)}=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Mit Hilfe der magischen Eulerschen Formel

$$\sin(\pi x)=\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots$$

erhalten wir

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(-x)}=\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

die Komplementformel

$$\Gamma(x)\Gamma(-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

die gilt, wenn x und 1 – x weder 0 noch negative ganze Zahlen sind. Eine „Spiegelungsformel" für die Funktion f(x) setzt die Konstante a von f(x) und f(a – x) zueinander in Beziehung. Die Komplementformel ist also die Spiegelungsformel der Gamma-Funktion für a = 1."

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_0^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

oder da

$$2\psi(x)+1=x^{\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),\ \text{(Jacobi, Fund. S. 184)}$$

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_1^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(x^{\frac{s-3}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.$$

Ich setzte[182] nun $s=\frac{1}{2}+ti$ und

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t),$$

so dass

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(tt+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx$$

oder auch

[182] Landau I 286 ff: „Für gerades negatives s hatten wir schon oben Null gefunden; […] daher ist $\zeta(-(2q-1))=\frac{2}{2^{2q}}(-1)^q(2q-1)!\frac{2^{2q-1}B_q}{(2q)!}=\frac{(-1)^qB_q}{2^{2q}}$, […] Wird in der ganzen Funktion $\xi(s)$ statt s […] $s=\frac{1}{2}+zi$ eingeführt und $\xi(s)=\xi\left(\frac{1}{2}+zi\right)=\Xi(z)$ gesetzt, so geht wegen $\xi(1-s)=\xi\left(\frac{1}{2}-zi\right)=\Xi(-z)$ die Funktionalgleichung $\xi(1-s)=\xi(s)$ in $\Xi(-z)=\Xi(z)$ über, d. h. $\Xi(z)$ ist eine gerade ganze Funktion[…].“

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{-\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx} x^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right) dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergierende Reihe entwickeln. Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden[183], wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt[184]. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t) = 0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

denn das Integral $\int d\log\xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt[185], ist (bis auf einen

---

[183] Landau I 288: „Was wissen wir über die Nullstellen von $\xi(s)$, d. h. von $\Xi(z)$? Wegen

$$\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(s)$$

ist jede Nullstelle von $\xi(s)$ Nullstelle eines Faktors links. $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ hat keine Nullstelle; weder s = 0 noch s = 1 ist eine Nullstelle von $\xi(s)$, da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ bzw. $\zeta(s)$ dort einen Pol hat; die negativen Nullstellen (erster Ordnung) – 2q von $\zeta(s)$ auch nicht, da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ dort einen Pol hat. Resultat: Die Nullstellen von $\xi(s)$ sind identisch mit dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehörigen, übrigens nicht reellen und nicht auf dem Rande des Streifens gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$; natürlich tritt jede mehrfache Nullstelle in derselben Vielfachheit bei beiden Funktionen auf."

[184] Landau I 288 f: „$\Xi(z)$ hat also nicht nur rein imaginäre Nullstellen, z_0, deren Imaginärer Teil zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ liegt (sogar exkl. Der Grenzen), und die Nullstellen s_0 von $\zeta(s)$ im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ sind eben die Punkte $s_0 = \frac{1}{2} + z_0 i$."

[185] Landau I 288 f.

Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$) gleich $\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T\right) i$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen[186], und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind[187]. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen[188]; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen[189], da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.
[…]"[190]

---

[186] Landau I 289: „$z^2 = x$ gesetzt, so […] $\Xi(z) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ […] bemerke noch, dass die a_n sämtlich reell sind. In der Tat ist $\xi(s) = \xi(1-s)$, [..] speziell […] $\xi\left(\frac{1}{2} + vi\right) = \xi\left(\frac{1}{2} - vi\right)$; […] andererseits $\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + vi\right)$ zu $\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} - vi\right)$ konjugiert ist, ist $\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + vi\right)$ reell, folglich $\Xi(z)$ für reelle z reell."

[187] Landau I 288 f.

[188] Landau I 286 ff, 312 ff, 378 f.

[189] Wikipedia, Konjugation, In: Wikipedia, Versions-ID: 59801280/Bearbeitungsstand: 7. Mai 2009, < URL >: „In der Mathematik bezeichnet man als **komplexe Konjugation** die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = a + b \cdot i \longmapsto \bar{z} = a - b \cdot i$ im Körper der komplexen Zahlen. […] Die zu $z = a + b \cdot i$ **konjugierte Zahl** $\bar{z} = a - b \cdot i$ hat also denselben Realteil, aber den entgegengesetzten Imaginärteil. […] Für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2, z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$b = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 \; [\ldots]"$$

[190] Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL > 1 ff.

ANMERKUNGEN

Es wäre zunächst allgemeint anzumerken, dass Rieman[191] die heute nicht mehr gebräuchliche Schreibweise von Gauss $\prod(n) = n!$ übernahm statt der heute üblichen Schreibweise $\Gamma(n) = (n-1)!$ von Legendre[192]. Überall wo $\prod(n)$ steht, wäre $n\Gamma(n)$ zu lesen. Das gilt noch andere Schreibweisen wie ln statt log.

- Die von Riemann einleitend vorangestellte Gleichung[193]

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1} dx = \frac{\prod(s-1)}{n^s}$$

  meint also die – modifizierte – Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} d.$$

  während $1/n^s$ die Zetafunktion meint.
- Als Rieman daraus die nächste Gleichung erhält

$$\prod(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

[191] Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL > 1 ff.
[192] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „The (complete) gamma function $\Gamma(n)$ is […] a slightly unfortunate notation due to Legendre which is now universally used instead of Gauss's simpler $\prod(n) = n!$ (Gauss 1812; Edwards 2001, p. 8).“
[193] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „Integrating equation […] $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} d$“

- ist auf der linken Seite die zuvor beschriebene Nebeneinander von Gamma und Zeta und auf der reichten Seite das Integral der Bernoulli-Zahlen[194]

$$\frac{x}{(e^x - 1)}$$

  ebenfalls etwas modifiziert.
- Als nächstes ladet Rieman zur Betrachtung des abermals modifizierten Integrals

$$\int \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

  das aber diesmal nur um das Vorzeichen von x in –x auf der rechten Seite verändert wurde. Diese Änderung um das nämliche Vorzeichen leuchtet so weit sofrt ein, wenn die Bernoulli-Zahlen

$$\frac{x}{(e^x - 1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$$

  ebenfalls mit in die Betrachtung einbezogen werden. Hierauf folgen dann noch zwei Schritte so, dass die drei als eine Einheit zu betrachten sind, zumindest wir die Änderung des Vorzeichens nicht hier, sondern zweit Schritte weiter erklärt. Es ist also davor noch ein Zwischenschritt zu mache, obwohl die Vorzeichenänderung hier vorweggenommen wurde.
- Nachdem also zuvor die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung in Richtung Bernoulli-Zahlen abgeändert wurde, wird nun, als Zwischenschritt vor der eigentlichen Änderung des Vorzeichens, die rechte Seite der ursprüngichen Gleichung in Richtung Sinus geändert[195]

---

[194] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „ $\frac{x}{(e^x-1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$ […] konvergiert für alle x mit einem Betrag kleiner als 2π."

[195] Wikipedia, Sinus und Kosinus, In: < URL >: „Dieser Ansatz […] ist aus der Eulerformel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$. […] Für beliebige komplexe Zahlen z definiert man analog $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$".

$$\left(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}\right) \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

Mit diesem Sinus hat es allerdings so ein Bewandtnis

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Davon einmal abgesehen, dass er ebenfalls modifiziert ist. Diese Besonderheit – durch das Fehlen von $\frac{1}{2i}$ – kommt allerdings wiederum erst nach einem neuerlichen Zwischenschritt zum Vorschein, indem dort deswegen $2\sin z$ geschrieben werden muss, was aber hier schon beweist, dass hier $\frac{1}{2i}$ fehlen.

- Die Veränderung auf der linken Seite der Gleichung in Richtung Sinus hatte die Voraussetzung, dass der Vorzeichen von x auf der rechten Seite negativ wird, damit in der vieldeutigen Function $(-1)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von –x für ein negatives x reell wird[196]. Die Zwischenschritte ergaben ähnlich wie im Dreivierteltakt des Walzer (ein zurück zwei vor) insofern einen Sinn, als das nämliche Vorzeichen die Voraussetzung erstens für Sinus, und zweitens für ein reelles Ergebnis mit komplexen Zahlen war[197]. Dieses Geheimnis liegt also

---

[196] Meschkowski 136: „Man kann zeigen, dass die durch ein solches unendliches Produkt definierte Funktion F(z) = Q(z) in jedem beschränkten Bereich analytisch ist. […] z. B. in $f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$ eine analytische Funktion, die genau an der Stelle z = n² (n = 1, 2, 3, …) verschwindet. Man kann auch leicht eine Funktion konstruieren, die *alle* ganzen Zahlen *n* zu Nullstellen hat. […] $f_2(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ […] hat dieselben Nullstellen wie die Funktion $\sin \pi z$, nämlich 0, ±1, ±2, ±3, … […] $\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$".

[197] Landau I 30: „Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion', welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

einerseits in Sinus, wo die nämlichen Nullstellen für ganzzahlige Ergebnisse aufscheinen[198], diese wiederum setzen die Änderung des Vorzeichens auf der anderen Seite der Gleichung im obigen Sinne voraus. Im Prinzip liegt also hier der gesuchte Beweis der Riemannschen Vermtung, indem wie das Vorzeichen, fein Abgestimmt bzw. rückgekoppelt mit Sinus[199], auf der anderen Seite der Gleichung so abgeändert hatte, damit wir reelle Ergebnisse bekommen. Wären die Ergenisse also nicht reell, könnten wir nicht weiter gehen.

- Nun können wir Sinus auf der linken Seite direkt einfügen,

$$2\sin\pi s\prod(s-1)\,\zeta(s)=i\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}dx}{e^{x}-1},$$

und dabei feststellen dass auf der rechten Seite sich außer dem Vorzeichen, und i vor dem ganze Integral, sich nichts geändert hate. Auf der linken Seite hat sich sehr wohl was geändert, denn nicht nur Sinus ist einfügt, sondern ist die linke Seite der Gleichung ansonsten zu der ursprünglichen Form zurückgekehrt. Wir haben die vorige Änderung der linken Seite rückgängig gemacht, bis auf Sinus. Dafür ist auf der rechten Seite das Vorzeichen geändert, und die imaginäre Einheit i für den ganzen Ausdruck eingefügt worden. Damit ist die Identität von Gamma- und Zetafunktion mit Sinus bewiesen.

- Von diesen Vorbereitungen, bzw. Voraussetzungen her wird nun auf der rechten Seite der Gleichung das Integral aufgelöst und in eine Summenformel umgewandelt

---

definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s\log n}$ bei reellem log n hat."

[198] Meschkowski 157: „Funktionalgleichung der Γ-Funktion durch die folgende Bemerkung: […] $\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-x)}$ hat – ebenso wie die Funktion $\sin\pi x$ – die Eigenschaft, für alle ganzen Zahlen zu verschwinden. Das lässt auf eine enge Verwandtschaft dieser Funktionen schließen […] $\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-x)}=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{m}\right)\cdot x\cdot(-x)$, und daraus folgt […] (31) $\sin\pi x=\frac{\pi}{\Gamma(x)\cdot\Gamma(-x)(-x)}$ und (32) $(-x)\Gamma(-x)=\Gamma(1-x)$ […] ergibt sich aus (31) wenn man die Differenzengleichung (21) auf $\Gamma(-x)$ anwendet."

[199] Landau I 277, 285 f, 293 ff.

$$2\sin\pi s\prod(s-1)\zeta(s)=(2\pi)^s\sum n^{s-1}\left((-i)^{s-1}+i^{s-1}\right)$$

Die allerdings wiederum nach einem Zwischenschritt, der hier übersprungen wurde. Dieser Zwischenschritt behandelt den Ausdruck $(2\pi)^s$, der hier etwas vereinfacht der Summenzeichen rechts vorangestellt ist. Wie aber die Gleichung zeigt, ist dieser Teil, es handelt von der Periode[200] von Sinus, , bzw. der komplexen Exponentialfunktion die zuvor durch Sinus ersetzt wurde, $\pm 2\pi i$, zwar eigens abgehandelt worden, aber die beiden Änderung sind sogleich in einem auf der rechten Seite der Gleichung durchgerührt worden, und damit war die Abhandlung dieser zwei Teilfragen in einem Stück tunlich. Mit dieser Summenformel ist man auf der rechten Seite der Gleichung ebenfalls zu der ursprünglichen Form von Euler zurückgesdchwenkt worden, wenn auch etwas abgewandelt und ertgänzt

$$\prod\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\sum\frac{1}{n^s}$$

Man hat gewissermaßen einige Möglichkeiten ausgelotet, und mit der Rückkoppelung alt und neu bestätigt.

- Von hier aus kann der vorige, bisher übersprungener Zwischenschritt, nue gewichtet werden. Im wesentlichen zeigt sich die Gleichung als Beschreibung der Funktion sätigt, bis auf die Perioden $n2\pi i$. Bei der nämlichen Periode wird die Funktion unstätig. Daring nun liegt der ganze Beweis verbrgen $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$. Denn von hier aus und damit wurde die Änderung der Gleichung im vorigen Schritt abgeleitet. Und man kam – zwar mit Abweichungen – aber auf die ursprüngliche Summenformel von Euler zurück. Sinus hat also die Besonderheit, bei ganzzahligen Ergebnisse zu verschwinden (Nullstellen), so dass damit der komplexe Ausdruck

[200] Westermann 405: „Festzuhalten ist folgende Folgerung

(E2) $\boxed{e^{z+2\pi i}=e^z}$ $z\in\mathbb{C}$

Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der komplexen Periode $2\pi i$."

verschwindet, und das Ergebnis wird reell. Diese krktische Stellen nun, wo Sinus – periodisch – ganzzahligen Ergenisse hat, sind die nämlichen Perioden im Sinne der Eulerschen Identität. Es ist nämlich die Eulersche Identität, welche hinter Sinus steht, und periodisch ganzzahlige Ergebnisse liefern, womit Sinus und alles Komplexe Verschwindet, und das Ergebnis reell wird.

- Es folgen nun zwei Zwischenschritte, die zwar ebenfalls so gut wie in einem Stück mit diesem Thema abehandelt werden, sogar in einem Mit der Änderung der Gleichung zum vorigen Schritt, doch der vorige Zwischenritt davor war auf diesen Schritt hingeordnet, während die beiden andern hier zwar verankert sind, aber den wiederum nächsten Schritt etappenweise vorbereiten. Die anderen Zwischenschritte werden damit abgerundet, dass der Ausdruck für die Periode $(2\pi)^s$ etwas abgeändert $\pi^{-\frac{s}{2}}$ von der rechten Seite auf linken Seite geholt wird.

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

  Die Gammafunktion und Zetafunktion bleibt unverändert, wenn (s) in (1 – s) geändert wird. Diese Invarianz ist übergreifendes Thema der hier angesprochenen Zwischenschritte und auch des nächsten Schritts, wo diese Änderung so weiter entfaltet wird, wie das hier bereits vorweggenommen wurde.
- Der nächste Schritt, der eigetnlich die vorigen Halbschritte zu einem Schritt abrundet, bestätigt, dass die tragfähigen Eigenschaften der Funktion die Änderung von $\prod(s-1)$ in $\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)$ veranlasst haben, und damit die Zetafunktion $\zeta(s)$ (auf der anderen Seite der Gleichung) $\sum\frac{1}{n^s}$ sozusagen komplettiert worden sei, vor allem für weitere Verbesserungen dieser Art der Weg geebnet sei.
- Damit ändert sich wieder so von der linken Seite her komplettierte rechte Seite zum Integral,

$$\frac{1}{n^s}\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^\infty e^{-nn\pi x}\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

enthält einige Modifikationen und ladet gleichsam zur weiteren Entfaltung ein. Es wird ein Teil in eine Kurzform gebaucht,

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

und eingesetzt

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_{0}^{\infty} \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

um wiederum das Integral aufzulösen

$$2\psi(x)+1 = x^{\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),$$ (Jacobi, Fund. S. 184)

und weiter zu gehen. Hier angekommen geht es ein Stück in die Breite

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_{1}^{\infty} \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_{1}^{\infty} \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left(x^{\frac{s-3}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_{1}^{\infty} \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right) dx.$$

und die Sache bekommt einen entscheidenden Zusatz $\frac{1}{s(s-1)}$, über den noch zu sprechen sein wird. Es gilt dabei festzustellen, dass trotz der Ausführlichkeit und dem relativ großem Umfang dies alles nur einen Schritt darstellt, auch und gerade wenn in zwei Version, wo einmal das Integral gekürzt und dann aufgelöst und einmal sogar noch ausgeweitet wurde.

- Nun wird es mit dem nächsten Schritt, bzw. mit zwei Halbschritten, spanned, denn Rieman setzt einerseits gleichsam ohne Vorwarnugn für $s = \frac{1}{2} + ti$, und gibt damit vor, was gesucht wird.

Und andererseits setzt er das im vorigen Schritt angewachsene Integral mit dem Ausdruck $\xi(t)$ gleich

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(tt+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx=4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{-\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}x^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx$$

und kürzt es auf ein Zeichen $\xi(t)$ ab.

- Nun argumentiert Riemann im nächsten (Halb)Schritt, wobei er wieder auf die ursprüngliche Formel von Euler $\log\zeta(s)=-\sum\log(1-p^{-s})$ zurückgreift, allerdings logarithmiert, dass die Änderungen die „gute" Konvergenz verbessert bzw. verschärft haben, und damit alle Werte endlich seien, so dass die Nullstellen von $\xi(t)$ den Imaginärteil 1/2 bis −1/2 haben müssen.
- Kaum hat allerding Rieman die Endlichkeit und damit Berechenbarkeit, begibt er sich in eine Endlosschleife, bzw. gibt er die mühsam erkämpfte Endlichkeit der Werte auf, und greift nach der Unendlichkeit. Der Schlüsselsatz bei Rimann ist, dass er die Suche an dem nämlichen Beweis, der seitdem vermisst wird, aufgab, weil er weiter gehen wollte, und vermeinte, von hier aus den Bogen spannen zu können. Doch genau das Gegenteil war und ist der Fall. Dieser erster Teil seiner Arbeit handelt von endlichen, reellen Werten, für die andere Rechenregel gelten als für die unendlichen. Bist zu dem letzten Schritt hatte Riemann durchgehalten und ist sozusagen in der Spur geblieben. Im letzten Punkt (Schritt) jedoch, über die hier entbehrliche bis hinderliche bzw. irreführende bis abwegige Auslassungen über Statistik gemachte, hatte er sich selbst und andere in die Irre geführt, weil dasd mit dem Problem nichts zu tun habe. Sondern mit der zweiten Hälfte seiner Arbeit, die aber hier aus diesem Grunde gar nicht mehr zitierte werde.

Methodisch baut die ganze Arbeit Riemans auf den Ausdruck $\sin \pi s$ mit Sinus auf, weil das aller Kriterien hat und alle Voraussetzungen erfüllt. So lange dieser Ausdrück da ist, ist alles gelöst bzw. trivial. Wichtig ist allerdings, dass Sinus in der zitierten Form und die Periode $2\pi i$ miteinander korresponieren und eine integrierende Einheit bilden. So lange diese Periode $2\pi i$, sei sie noch so modifizhiert, vorhanden ist, ist im Prinzip auch $\sin \pi s$ der eigentliche Ausdruck, der Inhalt der Periode, vorhanden, wenn nicht ein Fehler gemacht wurde. Entscheidend ist also, dass Rieman in dem Schlussatz zu disem Teil und also in dem Satz über die Vermutung, die nämliche Periode zitiert. Das bedeutet, dass die Sache steht, bzw. eigentich trivial ist. Auch wenn sie formal noch einen sogeannten Beweis bedarf.

Technisch kann man den gesuchten, man könnte meinen, vermissten, Beweis[201], führen, über eine analoge Identität wie die Eulersche, nur für die Gammfunktion.

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x) \cdot \Gamma(-x)(-x)}$$

Der am Schluss vermisste Ausdruck mit Sinus, und damit vermisste Beweis, versteckt sich also hinter der Gammafunktion. So lange jedoch eine Gammafunktion im Ausdruck vorkommt, ist der Beweis trivial. In diesem Ausdruck kommt zugleich die Rolle des Vorzeichns zum Vorschein, und warum diese geändert werden musste, in einer urpsprunglich für positive ganze Zahlen ausgelegte Fakultät. Irritierend bzw. irreführend bei der Suche nach Beweisen ist, dass die Gammafunktion keine Nullstellen hat, bzw. nie verschwindet. Das gilt jedoch, und das ist der Punkt, nicht für den Kehrwert der Gammafunktion

---

[201] Meschkowski 157: „Funktionalgleichung der Γ-Funktion durch die folgende Bemerkung: […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)}$ hat – ebenso wie die Funktion $\sin \pi x$ – die Eigenschaft, für alle ganzen Zahlen zu verschwinden. Das lässt auf eine enge Verwandtschaft dieser Funktionen schließen […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{m}\right) \cdot x \cdot (-x)$, und daraus folgt […] (31) $\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x) \cdot \Gamma(-x)(-x)}$ und (32) $(-x)\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$ […] ergibt sich aus (31) wenn man die Differenzengleichung (21) auf $\Gamma(-x)$ anwendet."

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)}$$

Vielmehr verschwindet die konjugierte Gammafunktion genau so wie $\sin \pi x$, und bildet damit eine echte Identität. Es gilt also nur mehr zu beweisen, dass die Periode $2\pi i$ ganzzalige Werte zeige, also die Nullstellen markiere. Dazu ein Zitat:

> „Hier erfolgt der Brückenschlag zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen. Besonders schöne Spezialfälle ergeben sich, wenn wir $z = 2\pi i, \pi i, \frac{\pi}{2} i$ setzen (diese lassen sich bereits aus der Formel e^{iy} ableiten):
>
> $$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$
> $$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$
> $$e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$
>
> Die zweite Beziehung liefert eine Formel, die die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander verbindet:
>
> $$e^{i\pi} + 1 = 0$$
>
> Hier sind Arithmetik durch 0 und 1 repräsentiert, Algebra durch i, Geometrie durch π und schließlich die Analysis durch e. Außerdem enthält diese Formel die drei bedeutendsten mathematischen Operationen: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren."

Die zitierte Periode zeigt also nicht nur ganzzahlige Ergebnisse, sondern 1 und −1 sowie i. Vor allem wird gezeigt, dass sogar die Version $\sin \frac{\pi}{2}$ und $e^{\frac{\pi}{2} i}$ ganzzahlig ist und sogar als $e^{\frac{\pi}{2} i} = i$ geschrieben werden kann. Man muss also auf die Funktion

$$\left(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}\right) = \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

vor der Ableitung bzw. Umrechnung in $\sin \pi x$ zurückgreifen. Man muss auch vergegenwärtigen, dass schon Riemann berechnet hatte, dass die Lösung der Zetafunktion s = −2q sei, und die Periode $-n2\pi i$ in $e^{-\pi s i}$ ziemlich gut getroffen wurde. Dadurch also, so kann man zusammenfassen, dass einerseits die Periode $2\pi i$ im Schlusssatz zur Riemannschen Vermutng als der kritische Punkt vorkommt, und andererseits der Kehrwert der Gammafunktion mit $\sin \pi x$ identisch ist, wäre alles bewiesen. Man könnte aber die Sache zb mit „$\left(e^{\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = i$" ausschmücken, oder mit $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon_{\chi_0^*} \cdot 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$. Auch der später etwas modifiziert auftretende Periode $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$ könnte als Identität beschrieben werden. Anschaulich ist auch, wie die Periode arbeitet: „$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$"[202]

[202] Schönhacker, Die Zahl e, S.44, in: < URL >.