Der Absolutbetrag vom Kehrwert der konjugierten Gammafunktion

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

als vermutliche Lösung der Beweisfrage der Riemannschen Vermutung

von
Dr. Gabriel Foco

Wien 2009

Inhaltsverzeichnis

Zeta

Der gesuchte Beweis der Riemannschen Vermutung[1], wonach die nicht trivialen bzw. kritischen (von s = −2q verschiedenen) Nullstellen der Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für σ < 1 dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehören und im komplexen Argument s = σ + ti entlang Realteil σ = ½ seien, hat – über das Euler-Produkt $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ einen praktischen Zugang über eine Primzahlformel. Die vergebliche Suche nach der Primzahlformel allerdings zwang zu anderen Näherungsversuchen, die wiederum aufgrund der für die Zetafunktion vorausgesetzten Identität mit der Primzahlformel jeweils auf die Primzahlen zurück- oder vorgreifen, und ohne die nämliche Primzahlformel zu kurz greifen.

Über den Primzahlsatz[2] $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\frac{1}{\log(x)}} = 1$ konnte zwar mit nicht geringem Aufwand, aber doch so weit auf die Lösung und Beweis vorgegriffen werden, dass diese und eine Reihe ähnlicher Probleme nur

---

[1] Weisstein, Riemann-Hypothesis, in: < URL >: „It is known that the zeros are symmetrically placed about the line $I[s] = 0$. This follows from the fact that, for all complex numbers s,
1. s and the complex conjugate $\bar{s}$ are symmetrically placed about this line.
2. From the definition (1), the Riemann zeta function satisfies $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$, so that if s is a zero, so is $\bar{s}$, since then $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)} = \bar{0} = 0$.
It is also known that the nontrivial zeros are symmetrically placed about the critical line $Re[s] = 1/2$, a result which follows from the functional equation and the symmetry about the line $I[s] = 0$. For if s is a nontrivial zero, then $1 - s$ is also a zero (by the functional equation), and then $\overline{1-s}$ is another zero. But s and $\overline{1-s}$ are symmetrically placed about the line $Re[s] = 1/2$, since $\overline{1-(x+\imath y)} = (1-x) + iy$, and if $x = 1/2 + x'$, then $x = 1/2 + x'$. The Riemann hypothesis is equivalent to $\Lambda \leq 0$, where Λ is the de Bruijn-Newman constant (Csordas *et al.* 1994)."

[2] Landau I 30: „Riemann, dem die Primzahltheorie die genialste und fruchtbarste Abhandlung (aus dem Jahre 1860) verdankt, stellte sich ein verwandtes, aber doch anderes Ziel als Tschebyschef und griff es mit viel kräftigeren Hilfsmittel an. Sein Ziel war, für eine eng mit $\pi(x)$ zusammenhängende, von der Primzahlverteilung abhängige

mit Hilfe der als richtig vorausgesetzten Vermutung von Riemann bewiesen werden konnten. Die überprüfbare Richtigkeit dieser indirekten Beweise hat die Vermutung erhärtet.

Aufgrund der schon von Euler postulierten Identität der Zetafunktion mit dem Produkt von Primzahlen scheint unstrittig, dass die Lösung oder Scheitern der selbigen ursächlich mit dem Primzahlproblem zusammenhänge, zumal Riemann das aus Ausgangsposition für seine Überlegungen für die Zetafunktion genommen hatte, und selbst damit eine Primzahlformel finden wollte. Das Scheitern der Primzahlformel ließ also sozusagen die Zetafunktion in der Schwebe. Und die Forschung hofft durch die Lösung der Zetafunktion den Primzahlen näher zu kommen. Man ist der Ansicht, dass auch wenn die Riemannsche Vermutung bei den Primzahlen und damit such für die Zetafunktion gescheitert sei, so ist damit doch ein Werkzeug[3] geschaffen worden, womit die Hindernisse zu überwinden sein werden.

Funktion einen bestimmten genauen Ausdruck aufzustellen, der ein Glied Li(x) und unendlich viele andere Glieder enthält. Jener genaue, aber recht komplizierte Ausdruck setzt übrigens gar nicht etwa in Evidenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\log(x)} = 1$$

ist; man darf also nicht glauben, dass Riemanns Formel, selbst wenn er sie bewiesen hätte, die Tschebyschefschen Probleme gelöst hätte."

[3] Landau I 30: „Nun ist es aber Riemann keineswegs gelungen, die von ihm vermutete ‚Riemannsche Primzahlformel' zu beweisen; er hat nur das Werkzeug geschaffen. Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen[3] Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion'[3], welche in der Halbebene[3] $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s \log n}$ bei reellem log n hat."

Gamma

Der hier skizzierter Lösungsansatz geht davon aus, dass bereits die Voraussetzungen zur Riemannschen Vermutung unrichtig bzw. überholt waren, und die bekannte Schwierigkeit nur aufgrund der falschen Vorausetzungen entstanden ist, und vermeidbar gewesen wäre, bzw. ist die anderswo zu suchen.

1. Noch 1751 Schrieb Euler resignierend, dass trotz redlicher Mühe die gesuchte Primzahlformel nicht zu finden war, und daher die Erfolglosigkeit der Mühe zu der Einsicht nötige, dass es überhaupt keine Primzahlformel gäbe[4].
2. Die von Euler vermisste Primzahlformel gab es allerdings, wenn auch erst später publiziert. Sie wurde von Waring 1770 bewiesen[5] und veröffentlicht, jener schrieb sie allerdings J. Wilson (1741-193), einem seiner Studenten, zu, unter dessen Namen sie heute bekannt ist[6]. Den

[4] Sautoy 63: „Doch eine einfache Formel, mit der sich alle Primzahlen finden lassen, könnte auch der große Euler nicht finden. 1751 schrieb er: «Es gibt einige Geheimnisse, die der menschliche Geist niemals durchdringen wird. Wir brauchen nur einen Blick auf die Tabelle der Primzahlen zu werfen, und wir sollten erkennen, dass es dort weder Ordnung noch Regeln gibt.» Es erscheint paradox, dass sich gerade die fundamentalen Bausteine dieser Ordnungsgefüllten Welt der Mathematik so wild und unvorhersagbar verhalten."

[5] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.

[6] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >: „Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte."

ersten richtigen Beweis gab allerdings 1773 Lagrange[7], und die Formel war bereits vom islamischen Gelehrten Ibn al-Haytham 700 Jahre früher entdeckt, und unpublizierte Belege zeigten, dass bereits Leibnitz[8] um 1683 von der Formel wußte, aber diese nicht publizierte[9].

3. Euler starb zwar erst 1783, war aber zunächst auf ein Auge und ab 1770 auf beide Augen ganz blind. Seine Arbeiten wurde zwar von seinem Sohn und von seinem Sekretär weiter geschrieben war sein Aktionsradius wohl eingeengt.

Überliefert ist von Euler also, dass er 1751 erklärt hatte, was damals scheinbar mangels Publikation durch Leibnitz, einerseits, und vor der Publikation von Waring (1770) und vor dem Beweis durch Lagrange (1773) gestimmt haben mag, das die Primzahlformel nicht existiere und voraussichtlich unauffindbar sei[10]. Weiter ist überliefert, dass sich Euler auf dieser Grundlage, wonach Eine Primzahlformel angeblich fehle, sich mit den Primzahlen – und angrenzenden Probleme befasst hatte.

Als nun Riemann seinen berühmten Aufsatz 1859/1861 vorlegte, ging er von der nämlichen Eulerschen Position aus und sein erklärtes Ziel war ausdrücklich im Sinne Eulers die Primzahlformel zu finden, die von Euler als nicht auffindbar pustuliert wurden[11]. Es ist auch einigermaßen folgerichtig,

---

[7] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

[8] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl $m > 1$ ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz $(m - 1)! \equiv -1 \pmod{m}$ besteht. […] die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft […] Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den Wilsonschen Satz bereits vor 1683 gekannt haben muss. Publiziert wurde das Resultat offenbar zuerst von E. Warig (Meditationes Algebraicae, Cambridge 1770), der es seinem Schüler J. Wilson zuschrieb. Erst J. L. Lagarange (Oeuvres III, 423-438) scheint dann 1771 wirklich einen Beweis für den Wilsonschen Satz gefunden zu haben. Der angegebene Beweis geht auf Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 77) zurück."

[9] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

[10] Bundschuh 102 f.

[11] Sautoy 63.

dass die Riemannsche Vermutung, auf dieser Eulerschen Grundlage, ihres Beweises harre, zumal diese Vermutung (und Beweis) nach der Intention von Riemann die von Euler als nicht vorhanden postulierte Primzahlformel zum Beweis voraussetzte.

Allerdings vermittelt Riemanns Ansatz deswegen eine größere Nähe zur Primzahlformel, weil die Zetafunktion Riemanns auf die Gammafunktion zurückgehe[12], und daher den Satz von Wilson, der Ebenfalls eine Version der Gammafunktion sei, also die Primzahlformel, latent bzw. unterschwellig auch die Vermutung von Riemann impliziere.

Den Satz von Wilson[13] $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, hat dann Clement auf die Primzahlzwillinge $4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \; [\mathrm{mod}\; n(n + 2)]$, $n > 1$) ausgeweitet[14]. Da die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft, kann man bei $p \geq 5$ die Menge der Zahlen 2, 3, …, p – 2 in ½(p – 3) Paare zueinander modulo p reziproker Partner zerlegen, so dass $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p - 2) \equiv 1 \pmod{p}$ gilt[15].

---

[12] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Riemann kam auf seine Vermutung bei der Untersuchung des Produkts der Zetafunktion mit der Gammafunktion

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

die bei der Vertauschung von s mit $(1 - s)$ invariant ist, das heißt, sie erfüllt die Funktionalgleichung:

$$\xi(s) = \zeta(1 - s)$$

Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung ebenfalls invariant."

[13] Pieper 52 ff.

[14] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.

[15] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl m > 1 ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz $(m - 1)! \equiv -1 \pmod{m}$ besteht. […] die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod{p}$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$ zutrifft […] Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den Wilsonschen Satz bereits vor 1683 gekannt haben muss. Publiziert wurde das Resultat offenbar zuerst von E. Warig (Meditationes Algebraicae,

So weit also der Satz von Wilson als bewiesen gilt[16], erübrigt sich hier ein – weiterer – Beweis, zumal der Satz auf einen arabischen Mathematiker aus dem 11. Jahrhundert zurückgeht und von Wilson lediglich wieder entdeckt wurde[17]. Die Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den sogenannten Satz von Wilson[18] bereits vor 1683 gekannt habe[19]. Die Folge $p^2 = 24n + 1$ ist eine Ableitung vom Satz von Wilson[20], bzw. ist dessen Beweis als $a^2 \equiv -1 \pmod p$ für ganzes a, und eine echte und vollständige Primzahlformel für Ergebnisse mit ganzen Zahlen[21]. So kann das Ergebnis der Forschung bestätigt werden, dass der Satz von Wilson eine Primzahl näher bestimmt[22], und der Kontrollbeweis vom Satz von Wilson in der quadratischen Form ebenfalls eine vollkommene und vollständige, also die Primzahlformel schlechthin, sei[23]. Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ in der Form

---

Cambridge 1770), der es seinem Schüler J. Wilson zuschrieb. Erst J. L. Lagarange (Oeuvres III, 423-438) scheint dann 1771 wirklich einen Beweis für den Wilsonschen Satz gefunden zu haben. Der angegebene Beweis geht auf Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 77) zurück."

[16] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

[17] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >: „Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte."

[18] Pieper 52 ff.

[19] Bundschuh 102 f; Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

[20] Pieper 52 ff.

[21] Bundschuh 103; vgl Waldal 81.

[22] Bundschuh 103.

[23] Bundschuh 102 f.

$\Gamma(n) = (n - 1)!$ für ganze Zahlen dient als Ausgangsgröße[24] für Riemanns Zetafunktion und für seine Hypothese[25] und zeigte die Verbindung zum Satz von Wilson[26] $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, wo in der quadratischen Form $n^2 \equiv 1 \pmod{p}$ auch die Formel $(n - 1)!$ angewendet werde[27] und für $p^2 = 24n + 1$ gelte.

[24] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; Trost 62 ff.
[25] Landau I 30 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[26] Pieper 52 ff.
[27] Bundschuh 102 f; vgl Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

Riemanns Aufsatz anno 1859

Nachstehend wird nur die este Hälfte des berühmten Aufsatzes von Riemann[28] zitiert, weil die erste Hälfte der Arbeit schließt mit der nämlichen Vermutung, die Geschichte machte, und zwar mit der Begründung, dass die nämliche Vermutung für den zweiten Teil, also für die zweite Hälfte des Aufsatzes, nicht benötigt werde. Auch wenn das nicht ganz stimmt, denn auch für den zweiten Teil manches vorausgesetzt werden muss, so wird es dort nicht mehr behandelt, und auch nicht unbedingt direkt berührt, während die erste Hälfte des Aufsatzes eigentlich von der nämlichen Vermtung direkt handelt.

„Die Quelle: Riemann, Bernhard: Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Berlin 1959, in: Berliner Monatsberichte, 1859, November (Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859):

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubnis baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch die Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

[28] Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL > 1 ff.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden[29]. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergieren, dargestellt wird, bezeichne ich durch ζ(s). Beide convergieren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck[30] der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung[31]

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

---

[29] Landau I 126 f: „Satz: Für s > 1 ist

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

[…] also, da für s > 1 und jede Primzahl p […] $1-\frac{1}{p^s} = e^{-\frac{1}{p^s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^{2s}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^{3s}}-\cdots} = e^{-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}$, $\zeta(s) = \prod_p e^{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}} = e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}$, wo die Doppelreihe mit positiven Gliedern im Exponenten beliebig geordnet werden".

[30] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „The (complete) gamma function Γ(n) is […] a slightly unfortunate notation due to Legendre which is now universally used instead of Gauss's simpler $\Pi(n) = n!$ (Gauss 1812; Edwards 2001, p. 8)."

[31] Landau I 290: „$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$". Vgl Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „Integrating equation […] $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} d$"

erhält man[32] zunächst

$$\prod (s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

von +∞ bis +∞ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergibt sich dieses leicht[33] gleich

$$\left(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}\right) \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function[34] $(-1)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von −x so bestimmt[35] worden ist, dass er für ein negatives x reell wird[36]. Man hat daher

---

[32] Landau I 290: „$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$." vgl Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „$\frac{x}{(e^x-1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1}B_n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$ […] konvergiert für alle x mit einem Betrag kleiner als 2π."

[33] Wikipedia, Sinus und Kosinus, In: < URL >: „Dieser Ansatz […] ist aus der Eulerformel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. […] Für beliebige komplexe Zahlen z definiert man analog $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$".

[34] Landau I 30: „Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion', welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$2\sin\pi s\prod(s-1)\zeta(s)=i\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden[37].

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s\log n}$ bei reellem log n hat.“ Vgl Bundschuh 38: „**Rimannsche Zetafunktion**. Bei $n\in\mathbb{N}$ und $s\in\mathbb{C}$ definiert man wie üblich die komplexe Zahl n^{-s} durch exp(–s log n), wobei log den reellen Logarithmus und (im weiteren) Re s den Ralteil von s bedeutet.“

[35] Meschkowski 150: „Durch Logarithmieren der Gleichung (IX,17) (für reelles Argument x) erhält man wegen der Stetigkeit der Logarithmus-Funktion

(1) $$\ln\sin\pi x=\ln\pi x+\sum_{\mu=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{\mu^2}\right).$$

Durch formale Differentiation der Summe in (1) entsteht die unendliche Reihe

(2) $$S(x)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{2x}{\mu^2+x^2}.$$“

[36] Meschkowski 136: „Man kann zeigen, dass die durch ein solches unendliches Produkt definierte Funktion F(z) = Q(z) in jedem beschränkten Bereich analytisch ist. […] z. B. in $f_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)$ eine analytische Funktion, die genau an der Stelle z = n² (n = 1, 2, 3, …) verschwindet. Man kann auch leicht eine Funktion konstruieren, die *alle* ganzen Zahlen *n* zu Nullstellen hat. […] $f_2(z)=z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ […] hat dieselben Nullstellen wie die Funktion $\sin\pi z$, nämlich 0, ±1, ±2, ±3, … […] $\sin\pi z=\pi z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$“.

[37] Meschkowski 157: „Funktionalgleichung der Γ-Funktion durch die folgende Bemerkung: […] $\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-x)}$ hat – ebenso wie die Funktion $\sin\pi x$ – die Eigenschaft, für alle ganzen Zahlen zu verschwinden. Das lässt auf eine enge Verwandtschaft dieser Funktionen schließen […] $\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-x)}=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{m}\right)\cdot x\cdot(-x)$, und daraus folgt […] (31) $\sin\pi x=\frac{\pi}{\Gamma(x)\cdot\Gamma(-x)(-x)}$ und (32) $(-x)\Gamma(-x)=\Gamma(1-x)$ […] ergibt sich aus (31) wenn man die Differenzengleichung (21) auf $\Gamma(-x)$ anwendet.“

Diese Gleichung gibt nun den Werth der Function ζ(s) für jedes beliebige complexe s und zeigt[38], dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet[39], wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird[40] und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n2\pi i$ aber ist $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, man erhält daher

---

[38] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Der Ergänzungssatz der Gammafunktion

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \text{ für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$$

ermöglicht die Berechnung von Werten der Gammafunktion aus bereits bekannten Funktionswerten ebenso wie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\cdot\Gamma(x).$$

Diese ist ein Spezialfall der Gaußschen Multiplikationsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{z-1/2}}\cdot\Gamma(x) \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots$$"

[39] Meschkowski 156 f.

[40] Westermann 405: „Festzuhalten ist folgende Folgerung

(E2) $\boxed{e^{z+2\pi i} = e^{z}}$ $z \in \mathbb{C}$

Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der komplexen Periode $2\pi i$."

$$2\sin\pi s\prod(s-1)\,\zeta(s)=(2\pi)^s\sum n^{s-1}\left((-i)^{s-1}+i^{s-1}\right)$$

also eine Relation zwischen ζ(s) und ζ(1 – s), welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt[41]:

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in 1 – s verwandelt wird[42].

---

[41] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Die Gammafunktion besitzt folgende Beziehung zur Riemannsche ζ-Funktion, was von Riemann mit Hilfe der Funktionentheorie abgeleitet wurde.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$"

[42] Havil 69 ff: „Aus dem Kehrwert von $\Gamma(x)$ hat man

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(-x)}=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Mit Hilfe der magischen Eulerschen Formel

$$\sin(\pi x)=\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots$$

erhalten wir

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(-x)}=\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

die Komplementformel

$$\Gamma(x)\Gamma(-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

die gilt, wenn x und 1 – x weder 0 noch negative ganze Zahlen sind. Eine „Spiegelungsformel" für die Funktion f(x) setzt die Konstante a von f(x) und f(a – x) zueinander in Beziehung. Die Komplementformel ist also die Spiegelungsformel der Gamma-Funktion für a = 1."

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\prod(s-1)$ das Integral $\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum\frac{1}{n^s}$ einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^\infty e^{-nn\pi x}\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

also, wenn man

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x}=\psi(x)$$

setzt,

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_0^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

oder da

$$2\psi(x)+1=x^{\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),$$ (Jacobi, Fund. S. 184)

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_1^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{\frac{s-3}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.$$

Ich setzte[43] nun $s=\frac{1}{2}+ti$ und

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t),$$

so dass

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(tt+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx$$

oder auch

$$\xi(t)=4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{-\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}x^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx.$$

---

[43] Landau I 286 ff: „Für gerades negatives s hatten wir schon oben Null gefunden; […] daher ist $\zeta(-(2q-1))=\frac{2}{2^{2q}}(-1)^q(2q-1)!\frac{2^{2q-1}B_q}{(2q)!}=\frac{(-1)^qB_q}{2^{2q}}$, […] Wird in der ganzen Funktion $\xi(s)$ statt s […] $s=\frac{1}{2}+zi$ eingeführt und $\xi(s)=\xi\left(\frac{1}{2}+zi\right)=\Xi(z)$ gesetzt, so geht wegen $\xi(1-s)=\xi\left(\frac{1}{2}-zi\right)=\Xi(-z)$ die Funktionalgleichung $\xi(1-s)=\xi(s)$ in $\Xi(-z)=\Xi(z)$ über, d. h. $\Xi(z)$ ist eine gerade ganze Funktion[…].“

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergierende Reihe entwickeln. Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden[44], wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt[45]. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t) = 0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

denn das Integral $\int d\log\xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt[46], ist (bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$) gleich $\left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right)i$; dieses

---

[44] Landau I 288: „Was wissen wir über die Nullstellen von $\xi(s)$, d. h. von $\Xi(z)$? Wegen

$$\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(s)$$

ist jede Nullstelle von $\xi(s)$ Nullstelle eines Faktors links. $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ hat keine Nullstelle; weder s = 0 noch s = 1 ist eine Nullstelle von $\xi(s)$, da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ bzw. $\zeta(s)$ dort einen Pol hat; die negativen Nullstellen (erster Ordnung) – 2q von $\zeta(s)$ auch nicht, da $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ dort einen Pol hat. Resultat: Die Nullstellen von $\xi(s)$ sind identisch mit dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehörigen, übrigens nicht reellen und nicht auf dem Rande des Streifens gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$; natürlich tritt jede mehrfache Nullstelle in derselben Vielfachheit bei beiden Funktionen auf."

[45] Landau I 288 f: „$\Xi(z)$ hat also nicht nur rein imaginäre Nullstellen, z_0, deren Imaginärer Teil zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ liegt (sogar exkl. Der Grenzen), und die Nullstellen s_0 von $\zeta(s)$ im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ sind eben die Punkte $s_0 = \frac{1}{2} + z_0 i$."

[46] Landau I 288 f.

Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen[47], und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind[48]. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen[49]; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen[50], da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien. […]"[51]

---

[47] Landau I 289: „$z^2 = x$ gesetzt, so […] $\Xi(z) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ […] bemerke noch, dass die a_n sämtlich reell sind. In der Tat ist $\xi(s) = \xi(1-s)$, [..] speziell […] $\xi\left(\frac{1}{2} + vi\right) = \xi\left(\frac{1}{2} - vi\right)$; […] andererseits $\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + vi\right)$ zu $\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} - vi\right)$ konjugiert ist, ist $\xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + vi\right)$ reell, folglich $\Xi(z)$ für reelle z reell."

[48] Landau I 288 f.

[49] Landau I 286 ff, 312 ff, 378 f.

[50] Wikipedia, Konjugation, In: Wikipedia, Versions-ID: 59801280/Bearbeitungsstand: 7. Mai 2009, < URL >: „In der Mathematik bezeichnet man als **komplexe Konjugation** die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = a + b \cdot i \longmapsto \bar{z} = a - b \cdot i$ im Körper der komplexen Zahlen. […] Die zu $z = a + b \cdot i$ **konjugierte Zahl** $\bar{z} = a - b \cdot i$ hat also denselben Realteil, aber den entgegengesetzten Imaginärteil. […] Für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2, z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$b = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 \text{ […]"}$$

[51] Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL > 1 ff.

ANMERKUNGEN

Es wäre zunächst allgemeint anzumerken, bzw. voranzustellen, dass Riemann[52] die heute nicht mehr gebräuchliche Schreibweise von Gauß $\prod(n) = n!$ übernahm statt der heute üblichen Schreibweise $\Gamma(n) = (n-1)!$ von Legendre[53]. Überall wo $\prod(n)$ steht, wäre im heutigen Verständnis $n\Gamma(n)$ zu lesen. Das gilt noch andere ältere Schreibweisen wie ln statt log.

1. Rieman geht von der Eulerschen Formel[54] aus

---

[52] Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, in: < URL > 1 ff.

[53] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „The (complete) gamma function $\Gamma(n)$ is […] a slightly unfortunate notation due to Legendre which is now universally used instead of Gauss's simpler $\prod(n) = n!$ (Gauss 1812; Edwards 2001, p. 8).“

[54] Landau I 101: „Satz: Für s > 1 ist

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Beweis: Die Konvergenz des unendlichen Produkts steht fest, da

$$\sum_p \frac{1}{p^s}$$

als Teilreihe von $\zeta(s)$ konvergiert. Nun ist für alle s > 1 […] wo n in Σ' alle Zahlen durchläuft, deren Primzahlfaktoren sämtlich $\leqq x$ sind. Da zu diesen alle Zahlen $\leqq x$ gehören, ist […]

$$\lim_{x\to\infty} \prod_{p\leqq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} = \sum \frac{1}{n^s} = \zeta(s).“$$

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

und entfaltet die Zetafunktion[55] $\zeta(s)$ von der Primzahlformel her.

2. Die von Riemann einleitend vorangestellte Gleichung[56]

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1} dx = \frac{\prod(s-1)}{n^s}$$

meint also die – modifizierte – Gammafunktion[57]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} d.$$

während $1/n^s$ die Zetafunktion meint.

3. Als Riemann daraus die nächste Gleichung erhält

---

[55] Landau I 153 f: „Wir hatten schon in § 33 für s > 1 die Identität (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$. Satz: Die Identität (1) gilt für $\sigma > 1$. […] ist $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$, also wegen der absoluten Konvergenz dieser Reihe und wegen der für $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ offenbar gültigen Relation $n_1^s n_2^s = (n_1 n_2)^s$ $\prod_{p \leqq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, wo n alle Zahlen durchläuft, deren Primfaktoren sämtlich $\leqq x$ sind."

[56] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >: „Integrating equation […] $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} d$"

[57] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Die **Gammafunktion** ist in der Mathematik eine Funktion, die definiert wird als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

für $x > 0$."

$$\prod (s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}.$$

Ist auf der linken Seite das zuvor beschriebene Nebeneinander von Gamma und Zeta und auf der rechten Seite das Integral der Bernoulli-Zahlen[58]

$$\frac{x}{(e^x - 1)}$$

ebenfalls etwas modifiziert.

4. Als nächstes ladet Riemann zur Betrachtung des abermals modifizierten Integrals

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

das aber diesmal nur um das Vorzeichen von x in –x auf der rechten Seite verändert wurde. Diese Änderung um das nämliche Vorzeichen leuchtet so weit sofort ein, wenn die Bernoulli-Zahlen

$$\frac{x}{(e^x - 1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$$

ebenfalls mit in die Betrachtung einbezogen werden. Hierauf folgen dann noch zwei Schritte so, dass die drei als eine Einheit zu betrachten sind, zumindest wir die Änderung des Vorzeichens nicht hier, sondern zweit Schritte weiter erklärt. Es ist also davor noch ein Zwischenschritt zu mache, obwohl die Vorzeichenänderung hier vorweggenommen wurde.

5. Nachdem also zuvor die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung in Richtung Bernoulli-Zahlen bzw. Eulerzahlen[59] abgeändert wurde, wird nun, als Zwischenschritt vor der eigentlichen

---

[58] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „$\frac{x}{(e^x-1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$ […] konvergiert für alle x mit einem Betrag kleiner als 2π."

Änderung des Vorzeichens, die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung in Richtung Sinus geändert[60]

$$\left(e^{-\pi si} - e^{\pi si}\right) \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

Mit diesem Sinus hat es allerdings so ein Bewandtnis[61]

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Davon einmal abgesehen, dass er ebenfalls modifiziert ist. Diese Besonderheit – durch das Fehlen von $\frac{1}{2i}$ – kommt allerdings wiederum erst nach einem neuerlichen Zwischenschritt zum Vorschein, indem dort deswegen $2\sin z$ geschrieben werden muss, was aber hier schon beweist, dass hier $\frac{1}{2i}$ fehlen.

---

[59] Wikipedia, Eulersche Zahlen, Versions-ID: 57160924 / 26. Februar 2009, 09:51 UTC, in: < URL >.

[60] Wikipedia, Sinus und Kosinus, In: < URL >: „Dieser Ansatz […] ist aus der Eulerformel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. […] Für beliebige komplexe Zahlen z definiert man analog $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$".

[61] Wikipedia, Eulersche Zahlen, Versions-ID: 57160924 / 26. Februar 2009, 09:51 UTC, in: < URL >: „Die **eulerschen Zahlen** oder **Euler-Zahlen** (nach Leonhard Euler) sind eine Folge E_n ganzer Zahlen, die durch die Taylorentwicklung der Hyperbelfunktion *Secans hyperbolicus*

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}$$

definiert sind. […] Alle eulerschen Zahlen mit ungeradem Index sind Null, während diejenigen mit geraden Index alternierende Vorzeichen haben. Die Dezimalen Endziffern von E_{2n} sind abwechselnd 1 und 5."

6. Die Veränderung auf der linken Seite der Gleichung in Richtung Sinus hatte die Voraussetzung, dass der Vorzeichen von x auf der rechten Seite negativ wird, damit in der vieldeutigen Function $(-1)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von –x für ein negatives x reell wird[62]. Die Zwischenschritte ergaben ähnlich wie im Dreivierteltakt des Walzer (ein zurück zwei vor) insofern einen Sinn, als das nämliche Vorzeichen die Voraussetzung erstens für Sinus, und zweitens für ein reelles Ergebnis mit komplexen Zahlen war[63]. Dieses Geheimnis liegt also einerseits in Sinus, wo die nämlichen Nullstellen für ganzzahlige Ergebnisse aufscheinen[64], diese wiederum setzen die Änderung des Vorzeichens auf der anderen Seite der Gleichung im obigen Sinne voraus[65]. Im Prinzip liegt also hier der gesuchte Beweis der Riemannschen

---

[62] Meschkowski 136: „Man kann zeigen, dass die durch ein solches unendliches Produkt definierte Funktion F(z) = Q(z) in jedem beschränkten Bereich analytisch ist. […] z. B. in $f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)$ eine analytische Funktion, die genau an der Stelle z = n² (n = 1, 2, 3, …) verschwindet. Man kann auch leicht eine Funktion konstruieren, die *alle* ganzen Zahlen *n* zu Nullstellen hat. […] $f_2(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ […] hat dieselben Nullstellen wie die Funktion $\sin \pi z$, nämlich 0, ±1, ±2, ±3, … […] $\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$".

[63] Landau I 30: „Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion', welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s \log n}$ bei reellem log *n* hat."

[64] Meschkowski 157: „Funktionalgleichung der Γ-Funktion durch die folgende Bemerkung: […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)}$ hat – ebenso wie die Funktion $\sin \pi x$ – die Eigenschaft, für alle ganzen Zahlen zu verschwinden. Das lässt auf eine enge Verwandtschaft dieser Funktionen schließen […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{m}\right) \cdot x \cdot (-x)$, und daraus folgt […] (31) $\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x) \cdot \Gamma(-x)(-x)}$ und (32) $(-x)\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$ […] ergibt sich aus (31) wenn man die Differenzengleichung (21) auf $\Gamma(-x)$ anwendet."

[65] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Der Ergänzungssatz der Gammafunktion

$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Vermutung, indem wie das Vorzeichen, fein Abgestimmt bzw. rückgekoppelt mit Sinus[66], auf der anderen Seite der Gleichung so abgeändert hatte, damit wir reelle Ergebnisse bekommen. Wären die Ergebnisse also nicht reell, könnten wir hier nicht weiter gehen.

7. Nun können wir Sinus auf der linken Seite direkt einfügen,

$$2\sin\pi s\prod(s-1)\,\zeta(s) = i\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}dx}{e^{x}-1},$$

und dabei feststellen dass auf der rechten Seite sich außer dem Vorzeichen, und i vor dem ganzen Integral, sich nichts geändert hatte. Auf der linken Seite hat sich sehr wohl was geändert, denn nicht nur Sinus ist einfügt, sondern ist die linke Seite der Gleichung ansonsten zu der ursprünglichen Form zurückgekehrt. Wir haben die vorige Änderung der linken Seite rückgängig gemacht, bis auf Sinus. Dafür ist auf der rechten Seite das Vorzeichen geändert, und die imaginäre Einheit i für den ganzen Ausdruck eingefügt worden. Damit ist die Identität von Gamma- und Zetafunktion mit Sinus bewiesen[67].

---

ermöglicht die Berechnung von Werten der Gammafunktion aus bereits bekannten Funktionswerten ebenso wie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\cdot\Gamma(x).$$

Diese ist ein Spezialfall der Gaußschen Multiplikationsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{z-1/2}}\cdot\Gamma(x)$$ für n = 2, 3, 4, …"

[66] Landau I 277, 285 f, 293 ff.

[67] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Der Ergänzungssatz der Gammafunktion

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

ermöglicht die Berechnung von Werten der Gammafunktion aus bereits bekannten Funktionswerten ebenso wie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\cdot\Gamma(x).$$

Diese ist ein Spezialfall der Gaußschen Multiplikationsformel

8. Von diesen Vorbereitungen, bzw. Voraussetzungen her wird nun auf der rechten Seite der Gleichung das Integral aufgelöst und in eine Summenformel umgewandelt

$$2\sin\pi s\prod(s-1)\zeta(s)=(2\pi)^s\sum n^{s-1}\left((-i)^{s-1}+i^{s-1}\right)$$

Die allerdings wiederum nach einem Zwischenschritt, der hier übersprungen wurde. Dieser Zwischenschritt behandelt den Ausdruck $(2\pi)^s$, der hier etwas vereinfacht der Summenzeichen rechts vorangestellt ist. Wie aber die Gleichung zeigt, ist dieser Teil, es handelt von der Periode[68] von Sinus, , bzw. der komplexen Exponentialfunktion die zuvor durch Sinus ersetzt wurde, $\pm 2\pi i$, zwar eigens abgehandelt worden, aber die beiden Änderung sind sogleich in einem auf der rechten Seite der Gleichung durchgerührt worden, und damit war die Abhandlung dieser zwei Teilfragen in einem Stück tunlich. Mit dieser Summenformel ist man auf der rechten Seite der Gleichung ebenfalls zu der ursprünglichen Form von Euler zurückgeschwenkt worden, wenn auch etwas abgewandelt und ergänzt

$$\prod\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\sum\frac{1}{n^s}$$

Man hat gewissermaßen einige Möglichkeiten ausgelotet, und mit der Rückkoppelung alt und neu bestätigt.

9. Von hier aus kann der vorige, bisher übersprungene, Zwischenschritt, neu gewichtet werden. Im Wesentlichen zeigt sich die Gleichung als Beschreibung der Funktion stetig, bis auf die Perioden $n2\pi i$. Bei der nämlichen Periode wird die Funktion unstätig. Daring nun liegt der ganze Beweis verbrgen $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$. Denn von hier aus und damit wurde die Änderung der

---

$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{z-1/2}}\cdot\Gamma(x)$ für n = 2, 3, 4, …"

[68] Westermann 405: „Festzuhalten ist folgende Folgerung

(E2) $\boxed{e^{z+2\pi i}=e^z}$ $z\in\mathbb{C}$

Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der komplexen Periode $2\pi i$."

Gleichung im vorigen Schritt abgeleitet. Und man kam – zwar mit Abweichungen – aber auf die ursprüngliche Summenformel von Euler zurück. Sinus hat also die Besonderheit, bei ganzzahligen Ergebnissen zu verschwinden (Nullstellen), so dass damit der komplexe Ausdruck verschwindet, und das Ergebnis wird reell. Diese kritischen Stellen nun, wo Sinus – periodisch – ganzzahligen Ergebnisse hat, sind die nämlichen Perioden im Sinne der Eulerschen Identität. Es ist nämlich die Eulersche Identität, welche hinter Sinus steht, und periodisch ganzzahlige Ergebnisse liefern, womit Sinus und alles Komplexe verschwindet, und das Ergebnis reell wird.

10. Es folgen nun zwei Zwischenschritte, die zwar ebenfalls so gut wie in einem Stück mit diesem Thema abgehandelt werden, sogar in einem Stück mit der Änderung der Gleichung zum vorigen Schritt, doch der vorige Zwischenritt davor war auf diesen Schritt hingeordnet, während die beiden andern hier zwar verankert sind, aber den wiederum nächsten Schritt etappenweise vorbereiten. Die anderen Zwischenschritte werden damit abgerundet, dass der Ausdruck für die Periode $(2\pi)^s$ etwas abgeändert $\pi^{-\frac{s}{2}}$ (wäre auch als $\pi^{-\frac{s}{2}} = \left(\pi^{\frac{1}{2}}\right)^{-s} = \left(\prod\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-s}$ schreibbar) von der rechten Seite auf linken die Seite geholt wird.

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

Die Gammafunktion und Zetafunktion bleibt unverändert, wenn (s) in (1 – s) geändert wird. Diese Invarianz ist übergreifendes Thema der hier angesprochenen Zwischenschritte und auch des nächsten Schritts, wo diese Änderung so weiter entfaltet wird, wie das hier bereits vorweggenommen wurde.

11. Der nächste Schritt, der eigentlich die vorigen Halbschritte zu einem Schritt abrundet, bestätigt, dass die tragfähigen Eigenschaften der Funktion die Änderung von $\prod(s-1)$ in $\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)$ veranlasst haben, und damit die Zetafunktion $\zeta(s)$ (auf der anderen Seite der Gleichung) $\sum\frac{1}{n^s}$ sozusagen komplettiert worden sei, vor allem für weitere Verbesserungen dieser Art der Weg geebnet sei.

12. Damit ändert sich wieder so von der linken Seite her komplettierte rechte Seite zum Integral,

$$\frac{1}{n^s}\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^\infty e^{-nn\pi x}\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

enthält einige Modifikationen und ladet gleichsam zur weiteren Entfaltung ein. Es wird ein Teil in eine Kurzform gebaucht,

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x}=\psi(x)$$

und eingesetzt

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_0^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx$$

um wiederum das Integral aufzulösen

$$2\psi(x)+1=x^{\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),\ \text{(Jacobi, Fund. S. 184)}$$

und weiter zu gehen. Hier angekommen geht es ein Stück in die Breite

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_1^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(x^{\frac{s-3}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.$$

und die Sache bekommt einen entscheidenden Zusatz $\frac{1}{s(s-1)}$, über den noch zu sprechen sein wird[69]. Es gilt dabei festzustellen, dass trotz der Ausführlichkeit und dem relativ großen Umfang dies alles nur einen Schritt darstellt, auch und gerade wenn in zwei Versionen, wo einmal das Integral gekürzt und dann aufgelöst und einmal sogar noch ausgeweitet wurde.

13. Nun wird es mit dem nächsten Schritt, bzw. mit zwei Halbschritten, spanend, denn Riemann setzt einerseits für $s = \frac{1}{2} + ti$, und gibt damit vor, was gesucht wird. Und andererseits setzt er das im vorigen Schritt angewachsene Integral mit dem Ausdruck $\xi(t)$ gleich

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t) = \frac{1}{2} - \left(tt + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{-\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}x^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx$$

und kürzt es auf ein Zeichen $\xi(t)$ ab. Neu in dem Ausdruck ist

---

[69] Landau I 101: „Wegen den für $n \geqq 2$ gültigen Entwicklung

$$-\log\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots \leqq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots = \frac{1}{n(n-1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

konvergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\log\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\log n} = A_1$$

mit der Restabschätzung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\log\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\log n} = A_1 + \mathcal{O}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n} = [\ldots] = A_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\log n}\right);$$

analog ist [...] $A_2 + \mathcal{O}\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n} = [\ldots] = A_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)$; [...]".

$$\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)$$

auf der rechten Seite der Gleichung. Augenscheinlich hängt diese Neuigkeit mit $s = \frac{1}{2} + ti$ als andere Neuigkeit zusammen[70], die sonst nicht zu sehen ist.

14. Nun argumentiert Riemann im nächsten (Halb)Schritt, wobei er wieder auf die ursprüngliche Formel von Euler $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ zurückgreift, allerdings logarithmiert, dass die Änderungen die „gute" Konvergenz verbessert bzw. verschärft haben, und damit alle Werte endlich seien, so dass die Nullstellen von $\xi(t)$ den Imaginärteil 1/2 bis –1/2 haben[71] müssen.

---

[70] Landau I 277 f: „Wenn $s = \sigma + ti$ eine komplexe Variable ist, ist

$$e^{-\pi x s^2 - 2\pi\alpha x s}$$

eine ganze transzendente Funktion von s, also

$$\frac{e^{-\pi x s^2 - 2\pi\alpha x s}}{e^{2\pi i s} - 1}$$

eine meromorphe Funktion von s, welche alle ganzen Zahlen s = n (und nur diese) zu Polen hat, und zwar ist s = n ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\frac{1}{2\pi i} e^{-n^2\pi x - 2n\pi\alpha x};$$

das ist, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{2\pi i}$, das allgemeinte Glied der zu untersuchenden Reihe auf der linken Seite von (3); den Wert deieser linken Seite nenne ich $\Omega(x)$."

[71] Landau I 277 f: „Die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf das Rechteck mit den Ecken $N + \frac{1}{2} \pm i$, $-\left(N + \frac{1}{2}\right) \pm i$, wo N eine positive ganze Zahl ist, ergibt also bei Integration im positiven Sinne

$$\int \frac{e^{-\pi x s^2 - 2\pi\alpha x s}}{e^{2\pi i s} - 1} ds = \sum_{n=-N}^{N} e^{-n^2\pi x - 2n\pi\alpha x}.$$

15. Kaum hat allerdings Riemann die Endlichkeit und damit Berechenbarkeit, begibt er sich in eine Endlosschleife, bzw. gibt er die mühsam erkämpfte Endlichkeit der Werte auf, und greift nach der Unendlichkeit. Der Schlüsselsatz bei Riemann ist, dass er die Suche an dem nämlichen Beweis, der seitdem vermisst wird, aufgab, weil er weiter gehen wollte, und vermeinte, von hier aus den Bogen spannen zu können. Doch genau das Gegenteil war und ist der Fall. Dieser erste Teil seiner Arbeit handelt von endlichen, reellen Werten, für die andere Rechenregel gelten als für die unendlichen. Bist zu dem letzten Schritt hatte Riemann durchgehalten und ist sozusagen in der Spur geblieben. Im letzten Punkt (Schritt) jedoch, über die hier entbehrliche bis hinderliche bzw. irreführende bis abwegige Auslassungen über Statistik gemachte, hatte er sich selbst und andere in die Irre geführt, weil das mit dem Problem nichts zu tun habe. Sondern mit der zweiten Hälfte seiner Arbeit, die aber hier aus diesem Grunde gar nicht mehr zitierte werde.

Methodisch baut die ganze Arbeit Riemanns auf den Ausdruck $\sin \pi s$ mit Sinus auf[72], weil das aller Kriterien hat und alle Voraussetzungen erfüllt. Solange dieser Ausdruck da ist, ist alles gelöst bzw. trivial, man könnte meinen, „bewiesen". Wichtig ist allerdings, dass Sinus in der zitierten Form ($\sin \pi s$) und die Periode $2\pi i$ miteinander korresponieren und eine integrierende Einheit bilden. So

---

Die rechte Seite konvergiert für $N = \infty$ gegen $\Omega(x)$."

[72] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Der Ergänzungssatz der Gammafunktion

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$$

ermöglicht die Berechnung von Werten der Gammafunktion aus bereits bekannten Funktionswerten ebenso wie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \cdot \Gamma(x).$$

Diese ist ein Spezialfall der Gaußschen Multiplikationsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{z-1/2}} \cdot \Gamma(x) \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots$$"

lange diese Periode $2\pi i$, sei sie noch so modifiziert, vorhanden ist, ist im Prinzip auch $\sin \pi s$ der eigentliche Ausdruck, der Inhalt der Periode, vorhanden, wenn nicht ein Fehler gemacht wurde. Entscheidend ist also, dass Riemann in dem Schlusssatz zu diesem Teil und also in dem Satz über die Vermutung, die nämliche Periode zitiert[73]. Das bedeutet, dass die Sache steht, bzw. eigentlich trivial ist. Auch wenn sie formal – an diesem Punkt – noch scheinbar einen sogenannten Beweis bedarf.

Technisch kann man den gesuchten, man könnte meinen, vermissten, Beweis[74], führen, über eine analoge Identität wie die Eulersche, nur für die Gammafunktion.

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x) \cdot \Gamma(-x)(-x)}$$

---

[73] Landau I 277 f: „**Satz:** Für alle $x > 0$ und alle reellen α ist

(2) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \cos(2n\pi\alpha)$$

$\sqrt{x}$ bedeutet natürlich hierin den positiven Wert, und (1) ist für $\alpha = 0$ in (2) enthalten. Die (absolute) Konvergenz beider Seiten von (2) ist von vornherein klar.

Beweis: Die Behauptung (2) lässt sich auch so schreiben:

(3) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x - 2n\pi\alpha x} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\pi\alpha^2 x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{x} - 2n\pi\alpha x};$$

denn die rechts hinzugefügte Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{x}} i \sin(2n\pi\alpha)$$

verschwindet natürlich, da der Summand eine ungerade Funktion von n ist."

[74] Meschkowski 157: „Funktionalgleichung der Γ-Funktion durch die folgende Bemerkung: […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)}$ hat – ebenso wie die Funktion $\sin \pi x$ – die Eigenschaft, für alle ganzen Zahlen zu verschwinden. Das lässt auf eine enge Verwandtschaft dieser Funktionen schließen […] $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)\left(1 - \frac{x}{m}\right) \cdot x \cdot (-x)$, und daraus folgt […] (31) $\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x) \cdot \Gamma(-x)(-x)}$ und (32) $(-x)\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$ […] ergibt sich aus (31) wenn man die Differenzengleichung (21) auf $\Gamma(-x)$ anwendet."

Der am Schluss vermisste Ausdruck mit Sinus, und damit vermisste Beweis, versteckt sich also hinter der Gammafunktion. Solange jedoch eine Gammafunktion im Ausdruck vorkommt, ist der Beweis trivial. Man kann in diesem Zusammenhang auf die andere (Eulersche) Identität mit $(e^{-\pi si} - e^{\pi si})$ verweisen, wo es optisch auch nicht gleich trivial wäre, was mit erbrachtem Beweis ist. Zugleich kann auch aufgezeigt werden, dass die originale Form $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ den örtlichen Gegebenheiten entsprechend geändert bzw. modifiziert wurde, und der hier noch fehlende Ausdruck $\frac{1}{2i}$ dann noch an einer anderen Stelle wieder auftaucht, bzw. wird schon dadurch vorweggenommen dass $2\sin\pi s$ statt $\sin\pi s$ geschrieben werde. Nachdem allerdings Sinus $\sin\pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\cdot\Gamma(-x)(-x)}$ in den Kehrwert des Absolutbetrages von der konjugierten Gammafunktion umgewandelt wurde, und man nicht mehr $2\sin\pi s$ statt $\sin\pi s$ schrieb, musste wieder $\frac{1}{2i}$ als gestaltendes Element auftreten.

In diesem Ausdruck für den Kehrwert der konjugierten Gammafunktion kommt zugleich die Rolle des (zuvor konstituierend für die Erreichung von reellen Ergebnissen) geänderten Vorzeichens zum Vorschein, … und warum diese geändert werden musste, in einer ursprünglich für positive ganze Zahlen ausgelegte Fakultät. Irritierend bzw. irreführend bei der Suche nach Beweisen ist, dass die Gammafunktion grundsätzlich keine Nullstellen hat, bzw. nie verschwindet. Das gilt jedoch, und das ist der Punkt, nicht für den Betrag der – konjugierten – Kehrwert der Gammafunktion

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)}$$

Also verschwindet der Betrag der konjugierten Gammafunktion genau so wie $\sin\pi x$, und bildet damit eine echte Identität. Es gilt also nur mehr zu beweisen, bzw. den Beweis zu zeigen, dass die Periode $2\pi i$ ganzzalige Werte zeige, also die Nullstellen für $\sin\pi x$ und für den Kehrwert der konjugierten Gammafunktion markiere. Dazu ein Zitat:

„Hier erfolgt der Brückenschlag zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen. Besonders schöne Spezialfälle ergeben sich, wenn wir $z = 2\pi i, \pi i, \frac{\pi}{2} i$ setzen (diese lassen sich bereits aus der Formel e^{iy} ableiten):

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$
$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$
$$e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

Die zweite Beziehung liefert eine Formel, die die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander verbindet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Hier sind Arithmetik durch 0 und 1 repräsentiert, Algebra durch i, Geometrie durch π und schließlich die Analysis durch e. Außerdem enthält diese Formel die drei bedeutendsten mathematischen Operationen: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren."

Die zitierte Periode zeigt also nicht nur ganzzahlige Ergebnisse, sondern 1 und −1 sowie i. Vor allem wird gezeigt, dass sogar die Version $\sin \frac{\pi}{2}$ und $e^{\frac{\pi}{2} i}$ ganzzahlig ist und sogar als $e^{\frac{\pi}{2} i} = i$ geschrieben werden kann. Man muss also auf die Gleichung

$$\left(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}\right) \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

vor der Ableitung bzw. Umrechnung in $\sin \pi x$ zurückgreifen und vergegenwärtigen, dass schon Riemann berechnet hatte, dass die Lösung der Zetafunktion s = −2q sei, und die Periode $-n2\pi i$ in $e^{-\pi s i}$ ziemlich gut getroffen wurde. Dadurch also, so kann man zusammenfassen, dass einerseits die

Periode $2\pi i$ im Schlusssatz zur Riemannschen Vermutng als der kritische Punkt vorkommt, und andererseits der Kehrwert der Gammafunktion $\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)}$ mit $\sin \pi x$ identisch ist, wäre alles bewiesen[75].

Man könnte noch diskutieren, ob die Sache zB mit $\left(e^{\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = i$ um der Anschaulichkeit willen ausschmücken wäre, oder mit $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon_{\chi_0^*} \cdot 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$. Auch die später etwas modifiziert auftretende Periode[76] $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$ könnte als – weitere – Identität beschrieben werden[77]. Anschaulich ist auch, wie die Periode arbeitet: „$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$"[78], womit man allerdings vom Aufsatz von Riemann etwas entfernen könnte, oder sich in dem zweiten Teil befinden, der hier gar nicht zitiert wurde. Offen also wäre die Frage, ob und wie weit der zweite Teil, der posthypothetische, in die Betachtung, bzw. in die Diskussion, einbezogen werden möchte.

---

[75] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Der Ergänzungssatz der Gammafunktion

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$$

ermöglicht die Berechnung von Werten der Gammafunktion aus bereits bekannten Funktionswerten ebenso wie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \cdot \Gamma(x).$$

Diese ist ein Spezialfall der Gaußschen Multiplikationsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{z-1/2}} \cdot \Gamma(x) \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots$$"

[76] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >: „Die Gammafunktion genügt der Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \text{ mit } \Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$"

[77] Arndt/Haenel 215, 222; Havil 82; Artin 17 f: Die Formel $\zeta(2)\Gamma(2) = \pi^2/6$ beinhaltet $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ und $\Gamma(2)$, sowie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \pi^{1/2}$ und π^2.

[78] Schönhacker, Die Zahl e, S.44, in: < URL >.

Die klassische Form der Konjugation[79] ist die Änderung des Vorzeichens ist die Eulergleichung[80]. Hier nachstehend allerdings die Exponenten $z = 2\pi i, \pi i, \frac{\pi}{2} i$ den Zahlenwerten +1, −1, i, gegenüber gestellt[81].

$$e^{2\pi i} = 1$$
$$e^{\pi i} = -1$$
$$e^{\frac{\pi}{2} i} = i$$

oder noch mit

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$$

ergänzt. Eine andere Periode[82] zeigt sich in $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, $i^9 = i$, $i^{10} = -1$, $i^{11} = -i$, …

---

[79] Weisstein, Riemann-Hypothesis, in: < URL >; Detering, Konjugation (Mathematik), in: < URL >.

[80] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >: „Hier erfolgt der Brückenschlag zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen. Besonders schöne Spezialfälle ergeben sich, wenn wir $z = 2\pi i, \pi i, \frac{\pi}{2} i$ setzen (diese lassen sich bereits aus der Formel e^{iy} ableiten):

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$
$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$
$$e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

Die zweite Beziehung liefert eine Formel, die die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander verbindet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Hier sind Arithmetik durch 0 und 1 repräsentiert, Algebra durch i, Geometrie durch π und schließlich die Analysis durch e."

[81] Knopp 428: „$e^{2\pi i} = 1,\ e^{\pi i} = -1,\ e^{\frac{\pi i}{2}} = i,\ e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$."

[82] Westermann 404.