Die Primzahlformel

$[12m(3m \pm 1) + 1]^{1/2}$

als Quantenbedingung der Zahlentheorie

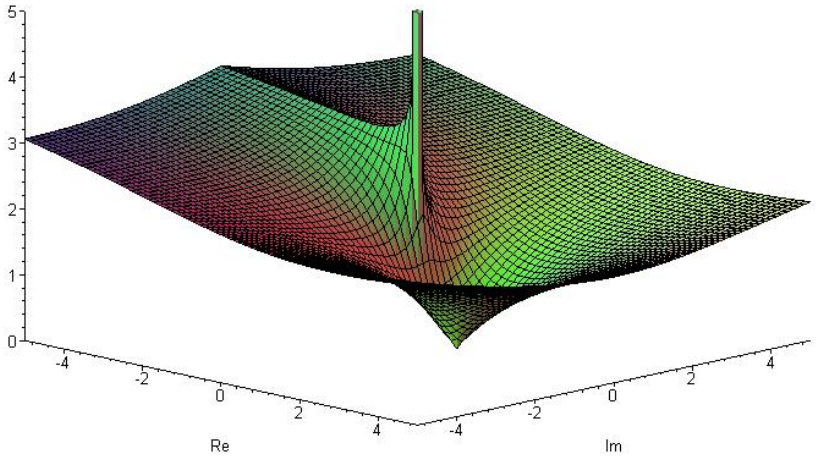
von

Dr. Gabriel Foco

Wien 2009

„Die Riemannsche Vermutung ist eine mathematische Behauptung, wonach sich die Primzahlen in Musik zerlegen lassen. Dass die Primzahlen Musik enthalten, ist eine poetische Form, dieses mathematische Theorem zu beschreiben. Allerdings handelt es sich um hochgradig postmoderne Musik.

Michael Berry, University of Bristol“[1]



Betrag von lnz^2

[1] Sautoy 109.
[2] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.

Zusammenfassung

Die Primzahlformel $(24{\cdot}n + 1)^{1/2} = (4!{\cdot}n + 1)^{1/2} = p$ für reelle Wurzel und ganzzahlige Nulstellen ist eine Abwandlung oder Ableitung der Primzahlformel $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod n$ von Wilson ($p > 2$ ist genau dann eine Primzahl, wenn $(p - 1)! + 1$ durch p teilbar ist), wo dann Clement die gleiche Formel auf die Primzahlzwillinge $4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n + 2)}$, $n > 1$ ausgeweitet hatte. In n! als Urform der Gammafunktion sind die Perioden $6m \pm 1$ und $24n + 1$ implizit berücksichtigt, denn $3! = 1{\cdot}2{\cdot}3 = 6$ und $4! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$. Man kann also auch $(24{\cdot}n + 1)^{1/2} = p = (4!{\cdot}n + 1)^{1/2}$ schreiben. Die Formel $P = (24n + 1)^{\frac{1}{2}} = [12m(3m \pm 1) + 1]^{\frac{1}{2}}$ ist eine Synthese der Formeln $(24{\cdot}n + 1)^{1/2}$ und $6m \pm 1$, indem letzte in erstere eingesetzt wurde. Der Satz von Wilson geht auf einen arabischen Mathematiker (Ibn al-Haytham 965 – 1039/1040) zurück und wurde von Wilson um 1770 lediglich wieder entdeckt, so wie schon durch Leibniz vor 1683, und eine quadratische Form $x^2 \equiv -1 \pmod p$ gilt als Anwendung (Bundschuh). Die Formel $24n + 1$, deren Grundidee und Beweis auf Euler zurückgeht (Waldal), scheint zwar von anderen Mathematikern gelegentlich benützt worden zu sein (Brefeld), ähnlich der Formel im Satz von Wilson oder Clement, doch ist sie bisher nicht als Lösung bzw. Beweis der Riemannschen Hypothese verwendet worden, ebenso wenig wie die Formel $6n \pm 1$. Das ist nun der Fall $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(12\, m(3m\pm1)+1)^{\frac{1}{2}}}$. In der sog. Höheren Mathematik wirde die Bedetung und Tragweite der Formeln bekannt, und man bevorzugt $4n + 1$ und $4n + 1$, weil diese sich für quadratische Formel in der bisherigen Versuchen, die zu keiner Lösung geführt haben, scheinbar beser eigenen. Es wurde dabei übersehen, dass $6n \pm 1$ bei den Primzahlzwilligen auch dann unentbehrlich und die Formel schlechthin ist, wenn für einfache Primzahlen sich die Formel $4n + 1$ besser rechnet.

Inhalt

Zusammenfassung ... 3
Vorwort ... 6
Einleitung ... 40
Die Folge 6n ± 1 ... 61
  Die Folge 6n + 1 ... 83
  Die Folge 6n − 1 ... 88
Die Folge 2n − 1 ... 93
Die Folge 4n + 1 ... 119
  Die Folge $n^2 + n + 1$ ... 128
  Die Folge $n^2 - n - 1$ ... 135
Die Folge 24n + 1 ... 139
Die Folge n^2 ... 180
Die Folge 30n ... 205
Die Folge $x^2 + y^2$ ... 220
Die Folge (n − 1)! + 1 ... 226
Die Folge n = p + [(p − 1)/6] ... 238
  Die Folge $(n^2 - n)/2$ ... 247
  Die Folge $n = a^2 - b^2$ ... 275
  Die Folge $1/n^s$ ... 289
  Spezielle Werte ... 312
    Die Folge $e^{i\pi} + 1$ ... 366
    Die Folge $[(n - 1)/n]^n$ ... 371
Die Folge $(6n)^2$ ... 390
  Die Folge 4(n − 1)! + 2 ... 392

Die Folge 15n 395
Die Folge 60n 405
Die Folge $ae^{k\varphi}$ 418
Die Folge $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ 439
Die Folge $m_r = m_1/2 \pm m_n/2$ 449
Die Folge $y(n + 2) + py(n + 1) + qy(n)$ 473
Die Folge $p^n - 1$ 482
Die Folge $(e^n \pm e^{-n})/2$ 489
Die Folge $n^{½ + ti}$ 515
Die Folge p^{1+ti} 521
Die Folge $(24n + 1)^{1/2}$ 528
Die Folge $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ 569
Die Folge 1/12n 578
Die Folge $6e^{\gamma}/\pi^{1/2}$ 595
Die Folge $n^{1/2}$ 607
Resümee 641
LITERATURVERZEICHNIS 715

Vorwort

Die Zahlentheorie[3] erschöpft sich praktisch in der Fragestellung, ob die als Faktum gegebenen natürlichen Zahlen – außer mit der Zahl 1 und mit sich selbst – teilbar sind, oder nicht und nennt die unteilbaren Primzahlen[4]. Spätere, scheinbar abgehobenere theoretische Ansätze, wie der analytische Ansatz von Euler, nehmen zwar einerseits einen Umweg[5], aber dann – andererseits – wieder Rekurs

[3] Padberg 11 ff, 21 ff; Russell 16 ff; Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >: „Von der Antike bis in das siebzehnte Jahrhundert behauptete sich die Zahlentheorie als grundständige Disziplin und kam ohne andere mathematische Teilgebiete aus. Ihre einzigen Hilfsmittel waren die Eigenschaften der ganzen Zahlen, insbesondere Primfaktorzerlegung (Fundamentalsatz der Arithmetik), Teilbarkeit und das Rechnen mit Kongruenzen. Eine solche *reine* Herangehensweise wird auch als *elementare Zahlentheorie* bezeichnet. Wichtige Resultate, die sich mit Hilfe elementarer Methoden erzielen lassen, sind der kleine Satz von Fermat und dessen Verallgemeinerung, der Satz von Euler, der Chinesische Restsatz, der Satz von Wilson und der Euklidsche Algorithmus.
Auch heute noch wird in einzelnen Fragen zu Teilbarkeit, Kongruenzen und Ähnlichem mit elementaren zahlentheoretischen Methoden geforscht. Ebenso wird versucht, Beweise zur Zahlentheorie, die sich weitergehender Methoden bedienen, in elementare Begriffe zu „übersetzen", woraus sich neue Erkenntnisse ergeben können. Ein Beispiel ist die elementare Betrachtung zahlentheoretischer Funktionen wie der Möbiusfunktion und der Eulerschen Phi-Funktion."

[4] Remmert/Ullrich 5.

[5] Laugwitz 315: „Die mathematische Atmosphäre in Berlin um 1860 beschreibt Leo Koenigsberger (1837-1921) in seinem Buch Mein Leben (Heidelberg 1919, bes. S. 21-57). Er hatte in Berlin ab 1857 studiert und kam unter Weierstrass' Anleitung rasch voran, so dass er schon 1864 auf ein Extraordinariat in Greifswald berufen wurde. Auf S. 54 lesen wir: «Auch wir jüngere Mathematiker hatten damals sämtlich das Gefühl, als ob die Riemannschen Anschauungen und Methoden nicht mehr der strengen Mathematik der Euler, Lagrange, Gauß, Jacobi, Dirichlet u. a. angehörten…» – Eine fundierte, ausführliche Darstellung ist K. Biermann 1988."

auf die natürlichen oder zumindest ganzen Zahlen[6], und deren Essenz in den Primzahlen. Die Frage nach den Primzahlen weist indes über sich hinaus.

Die theoretische Bedeutung der Primzahlen kommt spätestens bei der Einführung der kompelexen[7] Zahlen zum Ausdruck. Sie sind aber unterschwellig schon frührer da, in allem Nichtlinearen bzw. Sphärischen, doch bleiben sie so lange gleichsam unsichtbar bzw. mehr oder minder unentdeckt, bis sie in der einen Dimension der Zahlengerade noch gehandhabt werden könne, und werden entdeckt, als den Rahmen des bisherigen Zahlensystems sprengen. Die komplexen Zahlen[8] sind aus dem Gesichtspunkt der reellen Zahlen ein Paradoxon[9], denn wir sind von den natürlichen Zahlen ausgehend über die rationalen Zahlen die Ebene der reellen Zahlen so erreicht, dass diese auf dieser Route nicht mehr steigerungsfähig, sondern eine rundum bzw. in sich abgeschlossene Einheit sei. Von hier aus wäre also die komplexen Zahlen gar nicht möglich, weil sie in einer Dimension der Zahlengerade nicht mehr darstellbar sind. Wenn man jedoch die komplexen Zahlen als gegeben annimmt, so lässt sich nicht nur analog ein entsprechendes – mehrdimensionales – Zahlensystem definieren, sondern im Gegensatz zu den reellen Zahlen, die von sich aus nicht mehr steigerungsfähig wären, beinhalten die komplexen die reellen Zahlen als integrierende Einheit.

---

[6] Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >; Laugwitz 315: „Bei allein Unterschieden im Einzelnen haben die drei einflussreichen Wissenschaftler eines gemeinsam: Ihre Auffassung von der Mathematik knüpft mehr an Jacobi und Eisenstein an als an Dirichlet, und während sie die Ergebnisse von Riemann und Dedekind anerkennen, bleiben ihnen deren Methoden suspekt. Man zieht es vor, «die Beweise durch Rechnung zu zwingen», um Hilberts Redewendung zu wiederholen. Und entsprechend ist die ablehnende oder zumindest abwartende Haltung zur Veränderung in der Ontologie der Mathematik."

[7] Knopp 401 f.

[8] Hainzl 14 ff.

[9] Knopp 401 f.

Die Grenzen des herkömmlichen Zahlensytems als Gerade sind bereits in der Trigonometire, aber auch schon in den quadratischen Formen, sichtbar geworden, denn Einheitskreis, Dreieck, oder Vieleck lassen sich nur mehreren Dimensionen begreifen. Die mathematik versuchste sich aus der Affäre zu ziehen, indem die mehrere Dimensionen repräsentierende Geometrie aus der Eindimensionalität ausgegrenzt wurde, und die Mathematik zog sich in die splendid isolation einer einzigen Dimension zurück. So wie also die Sphäre den Punkt als Imagination fasse, so begreift der Punkt und/ider die eindimensionale Gerade die Sphäre als imaginär. Um die komplexen Zahlen doch noch notdürftig in der einen Dimension der Zahlengerade auszudrücken, bzw. als Projektion eines Zerrbildes zu fassen, musste die Dreidimenstionalität als Imagination begriffen werden, so oder ähnlich, nur in die umgekehrte Richtung, wie aus dem Gesichtspunkt der Dreiddimensionellen Körper, diese auf der Zahlengrade als die Beschrreibung von Punkten zu fassen, imaginär sei.

Hier also kommt die praktische Bedeutung der Primzahlen und der Zahlentheorie insgesamt zum Ausdruck, indem die bisher als gleichsam atomare Grundeinheiten betrachteten natürlichen Zahlen etwa nunmehr, bezogen auf die Primzahlen, als zusammengesetzte Zahlen begriffen werden, wenn nicht mehr die natürliche Zahlen, sondern die Primzahlen als die eingentliche Grundeinheit dem System zugrunde gelegt werden. Geht man also nicht von den natürlichen Zahlen als Grundebene aus, so stößt man nicht mehr bei den reellen Zahlen auf den Plafond[10]. Vielmehr greifen die Primzahlen als das eigentliche Grundsystem hinter den natürlichen Zahlen einerseits tiefer zurück, und gehen andererseits über die reellen Zahlen hinaus[11]. Insofern also die Primzahlen helfen, die natürlichen Zahlen als zusammengesetzt zu begreifen, indem das Gesetz der Zahlen nicht von den natürlichen sondern von den Primzahlen her begriffen werde, sind nun die komplexen Zahlen[12] trivial.

[10] Hainzl 14 f.
[11] Knopp 402 ff.
[12] Hainzl 14 f.

„Als erster bemerkte Euler, dass man Methoden der Analysis und Funktionentheorie benutzen konnte, um zahlentheoretische Fragestellungen zu lösen. Eine solche Herangehensweise bezeichnet man als analytische Zahlentheorie. Wichtige Probleme, die mit analytischen Methoden gelöst wurden, betreffen meist statistische Fragen nach der Verteilung von Primzahlen und der Asymptotik, wie zum Beispiel der von Gauß vermutete, aber erst Ende des 19. Jahrhunderts bewiesene Primzahlsatz und der dirichletsche Satz[13] über Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Daneben dienten analytische Methoden auch dazu, die Transzendenz von Zahlen wie der Kreiszahl π oder der eulerschen Zahl e nachzuweisen. Im Zusammenhang mit dem Primzahlsatz tauchten auch die Zeta-Funktionen zuerst auf, die heute Gegenstand sowohl analytischer als auch algebraischer Forschung sind. Die wohl berühmteste Zeta-Funktion ist die Riemannsche Zeta-Funktion, Ausgangspunkt der Riemannschen Vermutung."[14]

Die Eulerschen Identität $e^{i\pi} = -1$ oder $e^{i\pi} + 1 = 0$ bzw. die i Mal pi-te Potenz von e plus 1 eine Nullstelle der Euler-Gleichung[15] und kommt nach einer imaginären Schleife über der reellen Ebene zu den natürlichen Zahlen zurück[16].

„2.6.4 Die Euler-Gleichung

Hier erfolgt der Brückenschlag zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen. Besonders schöne Spezialfälle ergeben sich, wenn wir $z = 2\pi i, \pi i, \frac{\pi}{2} i$ setzen (diese lassen sich bereits aus der Formel e^{iy} ableiten):

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

[13] Wikipedia, Dirichletreihe, In: Wikipedia, Versions-ID: 59560154, Bearbeitungsstand: 30. April 2009, < URL >.
[14] Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >; Trost 62 ff.
[15] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Arndt/Haenel 13; Prachar 61 ff.
[16] Vgl Laugwitz 315 f.

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

Die zweite Beziehung liefert eine Formel, die die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander verbindet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Hier sind Arithmetik durch 0 und 1 repräsentiert, Algebra durch i, Geometrie durch π und schließlich die Analysis durch e. Außerdem enthält diese Formel die drei bedeutendsten mathematischen Operationen: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren."[17]

Selbst der Absolutbetrag der imaginären Zahl |i| wäre eine natürliche Zahl, aber mit der Identität der imaginären pi-ten Potenz mit minus 1 erweist sich die rationale, reelle und komplexe Ebene[18], man spricht nicht zufällig von Realteil und Imaginärteil[19], als Reflexion und/oder Projektion, also eine Art Verzerrung der natürlichen Zahlen[20].

Damit kann Zahlentheorie praktisch auf die Primzahlen beschränkt werden[21], auch wenn das aus der Perspektive der Theorie zu kurz greife. Die Lage der Forschung mutet insofern betrüblich an, als die

[17] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >
[18] Russell 74 ff; Arndt/Haenel 13; Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.
[19] Gaubitzer 74 f; Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.
[20] Vgl Laugwitz 315 f.
[21] Padberg 11 ff, 21 ff.

Zahlen einerseits gleichsam als Ausdruck bzw. Manifestation der Gesetzmäßigkeiten der Natur[22] schlechthin gelten möchten, aber andererseits sich in den elementaren Grundlagen auf weiten Strecken scheinbar bedeckt halten[23], so weit den Mathematikern in der Praxis zu glauben sei. Allerdings trügt der Schein insofern, als in dieser Sicht der Dinge die praktische Handhabung der Gesetze mit dem Gesetz selbst verwechselt werde[24], und die Mathematik als Instrument[25] sich nicht als Dienerin der „Kunst" der Zahlen, bzw. der ihnen zugrundeliegenden Gesetze[26] (der Natur[27]), sondern als

[22] Pfeifer 71 ff; Ostermann 100 ff; Timerding 29 ff.

[23] Sautoy 63: „Doch eine einfache Formel, mit der sich alle Primzahlen finden lassen, könnte auch der große Euler nicht finden. 1751 schrieb er: «Es gibt einige Geheimnisse, die der menschliche Geist niemals durchdringen wird. Wir brauchen nur einen Blick auf die Tabelle der Primzahlen zu werfen, und wir sollten erkennen, dass es dort weder Ordnung noch Regeln gibt.» Es erscheint paradox, dass sich gerade die fundamentalen Bausteine dieser Ordnungsgefüllten Welt der Mathematik so wild und unvorhersagbar verhalten."

[24] Hirschberger II 49 f: „Wie schon die Titel seiner Werke verraten, betreibt Bacon eine Neuorientierung der Wissenschaft. Bezeichnend dafür ist sein Wort ‚Wissen ist Macht'. [...] Das Wissen steht also im Dienste der technischen Utilität. Seit Aristoteles und seiner Gefolgschaft waren auf Jahrhunderte hinaus das Wissen und die Weisheit um ihrer selbst willen da, waren Schau der Wahrheit und Schau der Werte; bedeuteten darum ein Hauptelement jener Kultur, die dem Menschen seine Würde gab, weil sie ihm seine Freiheit gab, indem sie ihn zu sich selbst brachte und so über der Welt stehen ließ. [...] So gesehen diente, was Bacon mit seiner neuen wissenschaftstheoretischen Zielsetzung erstrebte, nicht gerade der Vermenschlichung des Menschen."

[25] Leinfellner (1965) 11: „Die Wissenschaftstheorie und Erkenntnistheorie sind Teildisziplinen der Philosophie und zum Teil Metawissenschaften zu den Einzelwissenschaften. Die Erkenntnistheorie behandelt das Alltagserkennen, die ästhetische Welterkenntnis und Welterfahrung, die wertende Erkenntnis der Welt, bzw. die Theorie des Handelns und Entscheidens, die wissenschaftliche Erkenntnis der inneren und äußeren Welt und Logik, Mathematik und Statistik insofern, als diese der Erkenntnis dienen. Die Wissenschaftstheorie, die sich an vielen Punkten mit der Erkenntnistheorie überschneidet, ist grundsätzlich eine Metawissenschaft zu den kognitiven (erkennenden) Wissenschaften; sie behandelt darüber hinaus im Gegensatz zur Erkenntnistheorie auch die Grundlagen der reinen (nicht-kognitiven) oder Formalwissenschaften, wie reine Mathematik, reine Logik, reine Statistik."

[26] Görland, Der Begriff der Lüge im System der Ethiker von Spinoza bis zur Gegenwart, in: Lipmann/Plaut 131 ff.

[27] Pfeifer 71 ff; Ostermann 100 ff; Timerding 29 ff.

Herrin der Zahlen verstehe[28], als Herrin der Natur[29], die vermeint, mit der Berechenbarkeit der Zahlen, mit der Berechenbarkeit der Naturgesetze[30], Herrin der Natur (geworden) zu sein, und nicht mehr ihre Dienerin[31].

Nun gilt (seit Baco) Wissen als Macht[32] und der Wissende ist vom Diener des Gewussten zum Herrn und zum Machthaber des Wissens sowohl wie auch der Natur geworden. Die in Selbstherrlichkeit[33]

---

[28] (cr), Netzwelt, Hrsg.: Lösung der Riemann-Hypothese steht bevor, Wie Mathematik die Internetsicherheit bedroht, in: < URL >: „Die Auswirkungen wären fatal. Kein aktuelles Verschlüsselungsverfahren wäre auch nur ansatzweise sicher. Die Berechenbarkeit von Primzahlen erlaubt die Rekombination der "Atome der Mathematik". Und der Herr über die Atome ist auch der Herr über die Schöpfung. Jedenfalls nach Ansicht vieler Wissenschaftler."

[29] Hirschberger II 49 f.

[30] Pfeifer 71 ff.

[31] Yourgrau 11 f: „Noch vor seiner Flucht aus Deutschland war Einstein zum Mathematikflüchtling geworden. Später erklärte er, er habe in jenem Garten der vielen Wege nicht den Weg zu finden vermocht, der ihn zu dem geführt hätte, was wesentlich ist. Er wandte sich dem eher irdischen Feld der Physik zu, wo wie er fand, der weg zum Eigentlichen deutlicher erkennbar war. Seine Abneigung gegen die Mathematik brachte ihm von seinem Lehrer Hermann Minkowski den Titel «fauler Hund» ein. (Derselbe Minkowski sollte kurz darauf die spezielle Relativitätstheorie des «faulen Hundes» in ihre bekannte vierdimensionale Form bringen.) «Wissen Sie, wenn man zu rechnen anfängt», spottete Einstein, «b'scheisst man unwillkürlich.» Gödels Reise dagegen verlief in genau die entgegengesetzte Richtung. Als Gödels Freund erklärte Einstein schließlich, jetzt wisse er, dass man auch in der Mathematik den Weg zum Wesentlichen finden könne."

[32] Sloterdijk (1987) 120; ders., Wirklichkeit des Verschwindens, Notiz zur Zeitgeschichte des Nichts, in: Liessmann (1991/2000) 260 ff; Sloterdijk (1983) I 8: „Seit einem Jahrhundert liegt die Philosophie im Sterben und kann es nicht, weil ihre Aufgabe nicht erfüllt ist. So muss sich ihr Abschied quälend in die Länge ziehen. Wo sie nicht in bloßer Gedankenverwaltung zugrunde ging, schleppt sie sich dahin in einer glitzernden Agonie, in der ihr einfällt, was sie zeitlebens zu sagen vergaß. Angesichts des Endes möchte sie ehrlich werden und ihr letztes Geheimnis preisgeben. Sie gesteht: die großen Themen, das waren Ausflüchte und halbe Wahrheiten. [...] Die geständniswillige letzte Philosophie behandelt dergleichen in der historischen Rubrik – zusammen mit den Jugendsünden. Deren Zeit ist um. In unserem Denken ist kein Funke mehr vom Aufschwung der Begriffe und von den Ekstasen des Verstehens. Wir sind

aufgeklärt, wir sind apathisch. Von der *Liebe* zur Weisheit ist weiter keine Rede. Es gibt kein Wissen mehr, dessen Freund (philos) man sein könnte. [...] Was hier unter einem auf große Traditionen anspielenden Titel vorgelegt wird, ist eine Meditation über den Satz: »Wissen ist Macht«; er ist es, der im 19. Jahrhundert zum Totengräber der Philosophie wurde. Er resümiert die Philosophie und ist zugleich ihr erstes Geständnis, mit dem die hundertjährige Agonie beginnt. Mit ihm endet die Tradition eines Wissens, das, wie sein Name anzeigt, erotische Theorie war – Wahrheitsliebe und Liebeswahrheit. Aus der Leiche der Philosophie entstiegen im 19. Jahrhundert die modernen Wissenschaften und die Theorien der Macht – als Politologie, als Theorie der Klassenkämpfe, als Technokratie, als Vitalismus – in jener Gestalt bis an die Zähne berüstet, »Wissen ist Macht«. Dies setzte den Punkt hinter die unvermeidliche Politisierung des Denkens. Wer den Satz ausspricht, verrät einerseits die Wahrheit. Doch mit dem Aussprechen will er mehr erreichen als Wahrheit: ins Spiel der Macht eingreifen."

[33] Görland, Der Begriff der Lüge im System der Ethiker von Spinoza bis zur Gegenwart, in: Lipmann/Plaut 131 ff: „Wir gehen von einem (uns scheinbar auf das ‚ethische' Gebiet einengenden) Problembegriff aus, der in der neueren Rechtslehre geprägt ist, obwohl das zugrunde liegende Problem zeitlos ist; dieser Begriff ist der des ‚Überzeugungsverbrechers'; um einen solchen soll es sich handeln, wenn der Täter ausschlaggebend dadurch bestimmt wurde, dass er sich zu der Tat ‚auf Grund seiner sittlichen, religiösen und politischen Überzeugungen für verpflichtet hielt'. (Radbruch).

‚Sich verpflichtet halten' heißt (im kantischen Sprachgebrauch): als (allgemeines) Gesetz für das Handeln in meine (subjektive) Maxime aufnehmen; oder bedeutet, dass ich mein Handeln bestimmt sein lasse durch ein, meiner Rechtfertigung enthobenes Gesetz. Nun spricht der Begriff des ‚Überzeugungsverbrechers' eine Doppelverpflichtung aus, die zum inneren Widerspruch, zur Zersetzung des handelnden Menschen führt, und zwar weil zwei Gesetzbereiche, die jede Geltung beanspruchen, sich widersprechen. [...] Wir weisen hin auf die methodischen Maximen, durch die unter dem Aspekt der (dialektischen oder geschichtlichen) ‚Entwicklung' dieses Problem erfasst und beruhigt werden sollte und das Denken Hegels kennzeichnet, dessen von Fichte übernommenes ‚dialektisches Schema' von Position und Negation auch die Soziologie Karl Marx bestimmt. Und schließlich haben wir die Methodologie der Entwicklung zu beachten, die Kant schafft im Begriff einer kopernikanischen ‚Revolution der Denkungsart'. [...] Unter ‚Geschichte' verstehen wir den Wandel zwischen tatsächlich Geltendem und Einem, das den Anspruch der Geltung erhebt und jenes tatsächlich Geltende zu verdrängen sucht. Darnach ist Geschichte ein beständiger Wechsel des Zustandes durch den Wechsel des Geltenden. [...] Wenn aber zwei Geltungsansprüche im unentschiedenen Kampf um die Herrschaft über das Tatsächliche sich gegenüber stehen, dann leben wir in Zeiten der ‚Revolution' und der Konflikte. Die solchergestalt tatsächliche Geltung erstrebenden Unternehmungen heißen ‚Überzeugungsverbrechen', die entweder propa-

begründete Selbstgerechtigkeit der Usurpatorin kommt angesichts des sich erhebenden Widerspruchs zu dem scheinbar logischen Schluss, dass die Zahlen ihrer nicht würdig wären[34], zumal ja die Logik der Zahlen der Logik der Macht widerspreche.

Die Arbeit stellt sich praktisch gegen den Mythos, wonach angeblich die Unregelmäßigkeit der Primzahlgesetze die Mathematik überfordert hätte[35], und daher – im Zirkel – die angebliche mathematische Unsicherheit[36] bzw. Unklarheit die Lösung aller Sicherheitsprobleme in der Nachrichtenverschlüsselung sei[37]. Demnach wäre die Unsicherheit (in) der Mathematik proportional der Sicherheit im verschlüsselten Geldverkehr. Desto größer die Unsicherheit in der Mathematik desto größer der Sicherheit in der durch Rechnungs-Schlüssel besicherten Wirtschafts- bzw. Geld- und Datenverkehr. Das bedeutet, dass nur die totale mathematische Unsicherheit für die totale Sicherheit im Geldverkehr sorgen könne.

---

gierend oder reaktiv sein können. [...] Denn auch in der Geschichte der Mathematik entstehen solche ‚Konflikte', auch in der Physik; in jedem Sinngebiete des Geistes brechen Konflikte auf zwischen ‚ptolemäischer' und ‚kopernikanischer' Sinngebung und Normierung des Geschehens; dies Geschehen zwar bleibt ‚an sich' immer Ein und Dasselbe; aber der Wandel der Sinngebung ändert es in seiner Bedeutung von einer ‚Welt' in eine andere ‚Welt'. Um Konflikte der ‚Bedeutung', um Konflikte in geistigen Setzungen, der Wissenschaften also handelt es sich bei diesen geschichtlichen Kollisionen."

[34] Sextus, Empiricus: Gegen die Dogmatiker, Adversus mathematikos, libri 7-11: Nicht zufällig titelt das „Hauptwerk" bzw. Standardwerk der des Skeptizismus mit „Gegen die Mathematiker"… Argumentiert dabei scheinbar „mathematisch", bzw. schiebt mathematische Argumente als Alibi der Anti-Mathematik vor, um die Unberechenbarkeit der der Mathematiker scheinbar vorzurechnen. Auch heute trägt die Mengenlehre scheinbar ein mathematisches Gewand, das sie der Mathematik in einer großzügigen Geste vermachte, und so die Mathematik des Kaisers neue Kleider anhabe.

[35] Kowol 70 ff; Waldal 79.

[36] Paschinger 3 f; Schwarz, Wolfgang (1985) 103 ff; Baxa V; Rapf 115 f.

[37] Zagier, Primzahlen: Theorie und Anwendung, in: Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften: Vorträge N 370, S. 35 ff, 49 f.

Abgesehen davon, dass die Unlösbarkeit[38] als Lösung der Sicherheitsfrage darzustellen, schon ein Widerspruch in sich ist[39], und zwar auch dann, wenn die Unlösbarkeit[40] nicht nur ein Bluff[41] wäre, so ist diese Fragestellung zwar in mancher Hinsicht allzu clever, d. h. die Undurchsichtigkeit sich etwa für undurchsichtige Geschäfte rechne, aber aus dem mathematischen Gesichtspunkt ist das ein Rechenfehler, schon allein die Rechnung auf die Unberechenbarkeit der Berechnung zu gründen[42]. So nach dem Motto, desto unberechenbarer, desto höher die Rechnung. Es mag schon sein, dass die Primzahlen[43] in mancher Hinsicht a priori unberechenbar erscheinen möchten, aber die Apriori sind eine andere Baustelle[44].

---

[38] Bornstein u. a. 370 ff; Landau I 4 f.
[39] Vgl Waldal 79: „Regel-mäßiges weniger Regel-mäßiges kann nicht völlig regellos werden".
[40] Ehrenfels 1.
[41] Gaubitzer 40 ff.
[42] Ehrenfels 1 ff, 35 ff, 46 ff; vgl Waldal 79 ff.
[43] Bornstein u. a. 370 ff.
[44] Waldal 79 ff; Yourgrau 10: „Heisenberg vertrat die Schule des logischen Positivismus, die sich in der Quantenmechanik der «Kopenhagener Deutung» niederschlug, so benannt zu Ehren seines Mentors, des dänischen Physikers Niels Bohr. Was in Einsteins spezieller Relativitätstheorie schlicht ein heuristisches Prinzip gewesen war – das Wesen der Wirklichkeit aus der Beschränktheit menschlichen Erkennens herzuleiten –, wurde für Heisenberg zu einer Art Religion, der weder Gödel noch Einstein betreten wollten." Vgl Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 4 f < URL >: „Das Fundamentalproblem des Übergangs von der klassischen Physik zur Quantenphysik war natürlich schon den Vätern der Quantenphysik bekannt, allen voran E. Schrödinger [2]. Es wurde nur im Laufe der Zeit immer mehr verdrängt, weil die Erfolge der Quantenphysik (insbesondere der QED) derart überwältigend sind, dass man leicht vergessen kann, über ihr Fundament nachzudenken. Aber gerade danach stellt jeder mitdenkende Schüler viele Fragen. Es sind oft die gleichen Fragen, die auch die moderne Forschung (z. B. die Quantenoptik) nun wieder nachdrücklich stellt. Und es gibt nur *einen* Ansatz zu ihrer Beantwortung, nur eine Brücke führt von der klassischen Physik zur Quantenphysik: ‚die Mechanisierung eines Problems'. Das bedeutet die Beschreibung der (universellen) Physik in der Sprache der theoretischen Mechanik. Wir haben *keinen* anderen Zugang. Wir *müssen* jede grundlegende Gleichung in

Die angebliche Unberechenbarkeit der Primzahlen[45] beruht auf eine – eingangs angedeutete Verwechslung[46]. Es gibt einerseits die sog. Formeln, oder in Formeln gefasste Regeln, die der Theorie zugerechnet werden, und es gibt Primzahlkriterien für die praktische Anwendung[47]. Wegen der Übergröße jüngst verwendeter Primzahlen in der Kryptografie[48] versucht damit die Praxis sozusagen die Theorie zu verschlüsseln, um so die eigene vermeintliche Unlösbarkeit[49] über die quasi Verschlüsselung der Theorie über die Distanz zu halten. Entsprechend der Zweiteilung in Theorie und Praxis gibt es in der Praxis eine analoge Zweiteilung, je nach dem, ob die Ergebnisse bei der Anwendung der Primzahlkriterien bestimmt bzw. deterministisch sind, oder probabilistisch. Es klingt zunächst vielleicht anspruchsvoller, doch handelt es sich auch beim Letzteren um eine konkrete Bestimmung der Primzahlen, allerdings in zwei Stufen, indem die erste Stufe die Primzahlen in eine engere Auswahl einreiht, und dort eine zweite, etwas genauere Methode anwendet. Der Unterschied könnte bildlich mit dem Unterschied zwischen Zweitaktmotor und/oder Viertaktmotor vergleichen

---

der Sprache der Mechanik aufstellen. Wir *können* allerdings bei der Interpretation versuchen, dieses Fundament zu verlassen. Doch bevor wir bedingungslos (grundlos, bodenlos) ‚axiomatische Quantenphysik' betreiben, sollten wir uns Rechenschaft darüber ablegen, dass es nur zwei Pfeiler gibt, die die gesamte Physik tragen: das *Wirkungsprinzip* und das *Huygenssche Prinzip*. Wer diese beiden Pfeiler ignoriert oder gar einreißt, landet unweigerlich im Welle-Teilchen-Dualismus. Er schreibt zwar $\psi = \sum_j e^{iS_j/\hbar}$, weiß aber nicht mehr, was es bedeutet. Schrödinger und Dirac [3] wussten es noch und R. P. F. – der Meister der Pfad- und Wirkungsintegrale – natürlich auch. Nur hat Meister Feynman das Wirkungsprinzip wohl so verinnerlicht, dass er es in seinen populärwissenschaftlichen Veröffentlichungen kaum noch erwähnt."

[45] Sautoy 63.
[46] Waldal 79 ff.
[47] More 23.
[48] Gaubitzer 67 f, 71 f; Bornstein u. a. 386 ff.
[49] Padberg 81 ff.

werden[50], wo die Leistungen doch einigermaßen vergleichbar wären, obgleich der Viertaktmotor scheinbar einen doppelten Aufwand treibt, bzw. doppelt so viel leistet.

Historisch brandet die kritische Fragestellung der Zahlentheorie jeweils rund um die Einführung und Geltung der Zahl Null[51], so wie dann nach und nach um die Einführung negativer Zahlen, dann der irrationalen[52] bzw. reellen Zahlen und schließlich der imaginären Zahlen[53]. Einigkeit herrscht über die sog. natürlichen Zahlen 1, 2, 3, … als Grundlage, bzw. als Fundament und heute gilt als „gegeben", dass spätestens mit der Einführung der negativen Zahlen –1, –2, –3, … die Null unentbehrlich geworden sei[54], wollte man die Rationale Zahlen als Einheit auf der Zahlengerade begreifen[55]. Man kann sich also über die Bestimmung des Überbaus durchaus streiten oder anderer Ansicht sein, doch das tragende Fundament als Unterbau – in dem Körper der natürlichen Zahlen – lässt man einstimmig gelten.

Diese Art der Entwicklung ließ sich zwar nicht reibungsfrei, aber doch so weit berechenbar bis zu der neueren Mathematik durchhalten, bzw. nachvollziehen[56], während in der neueren Mathematik, die

---

[50] More 23.
[51] Remmert/Ullrich 13 ff; Kracher 4; Wikipedia, Natürliche Zahl, In: < URL >.
[52] Remmert/Ullrich 42 ff; Stelzner, Der Goldene Schnitt, in: < URL > S. 21 ff.
[53] Sautoy 88 ff.
[54] Wikipedia, Natürliche Zahl, In: < URL >.
[55] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >: „Die **Integralrechnung** ist neben der Differentialrechnung der wichtigste Zweig der mathematischen Disziplin der Analysis. Sie entstand aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung. Das **Integral** selbst ist eine lineare Abbildung, die einer Funktion einen Zahlwert oder eine Funktion zuordnet, je nachdem, ob ein konkreter oder ein unbestimmter Integrationsbereich betrachtet wird."
[56] Aristoteles, Organon IV, in: Philosophische Schriften I 1 ff: „Alles vernünftige Lehren und Lernen geschieht aus einer vorangehenden Erkenntnis. Man sieht das, wenn man es im Einzelnen betrachtet. Denn wie die mathematischen Wissenschaften auf diese Weise erworben werden, so auch jede der übrigen Künste."

zumindest mit der sog. Mengenlehre verzahnt ist[57], wenn nicht von dort her neu begründet, bzw. auf ein neues Fundament gestellt wurde[58], von wo an beginnend es fortan den Anschein hat, verliert sich die Spur, so als sei man am Ende der Mathematik, und damit – sozusagen – auch am Ende der Zahlengerade[59] angekommen … falls es die Zahlen überhaupt gegeben habe[60], die von der Mengen-

[57] Russell 16 f: Von Frege wurde die Zahl und damit Mathematik als Mengenlehre so neu definiert, als ob überhaupt erst jetzt die Zahl definiert worden wäre, doch ist damit eine neue Mathematik so begründet worden, die mit der alten Mathematik inkompatibel sei.

[58] Kuba/Götz 18 f: „In der modernen Mathematik werden die Zahlen, so wie alle mathematischen Gegenstäde, entweder genetisch oder axiomatisch eingeführt. Wir werden auf die axiomatische Einführung der Zahlen zwar kurz eingehen, bedienen uns jedoch aus didaktischen Gründen der genetischen Methode. Genetisch heißt allgemein, dass die Begriffe eines Theoriegebäudes, aus denen logisch deduktiv die Theoreme abgeleitet werden, mit Hilfe als bekannt auszusehender Elementarbegriffe definiert werden. Speziell stützt sich die genetische Einführung der Zahlen auf die Elementarbegriffe der Mengenlehre. Dabei stellt sich allerdings schon die Frage, ob man ausgerechnet den Zahlbegriff, der Jahrtausedne alt und als der mathematische Grundbegriff schlechthin anzusehen ist, im Rahmen der modernen Mengenlehre begrüden soll. Was die natürlichen Zahlen betrifft, ist dieser Einwand durchaus bereichtig, und es gibt auch eine moderne Axiomatik(vgl. 2.4), die dem archaischen Charakter der natürlichen Zahlen angemessen ist."

[59] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >: „Im Gegensatz zur Differentiation existiert für die Integration auch elementarer Funktionen kein einfacher und kein alle Fälle abdeckender Algorithmus. Integration erfordert trainiertes Raten, Benutzung spezieller Umformungen (Integration durch Substitution, partielle Integration), Nachschlagen in einer Integraltafel oder Benutzung spezieller Computer-Software."

[60] Ebbinghaus, „Krisis der Wissenschaft oder Krisis der Wissenschaftler?" in: Gesammelte Schriften I 196: „Unnütz zu sagen, dass dieser Tatendurst nach entsprechenden Taten auch in der Wissenschaft verlangte. Von allen Seiten liefen die Wasser von den Bergen, um sich zu einem Strome von drohenden Forderungen gegen das, was bisher in ihr gegolten hatte, zu vereinigen. Zusammenbruch der klassischen Mechanik! Annahme der Vorbestimmtheit des Geschehens nach Gesetzen der Kausalität überholt! Keine Möglichkeit anschaulicher Vorstellung der Elemente der Materie! Ja sogar die durch Jahrtausende als unverbrüchlich anerkannten Gesetze des Denkens selber schienen durch Entdeckungen gewisser Sachverhalte auf dem Gebiete unendlicher Mengen ins Wanken gebracht. Und schon regte sich in den Kreisen derer, die statt mit den Paradoxien der Mengenlehre mit den Paradoxien des Glaubens befasst sind, und wir vernahmen, dass wir ohne Schwierigkeit die unglaublichsten Dinge glaublich finden würden, wenn wir uns nur

lehre her kaum greifbar wären[61]. Und so stünde man vor einem Neuanfang, falls man das so etwas wie Stehen bezeichnen könnte. Man muss sozusagen neu rechnen lernen, geschweige denn alles neu berechnen, denn alles was bisher war, ist bestenfalls relativ[62]. Man kann sich, vorsichtig ausgedrückt, nicht sicher sein, ob man noch bis drei zählen könne. Um das möglichst exakt zu erreichen, definiert man zB die Definition (d. h. den Definitionsbereich) als undefinierbar[63]. Mit der

---

entscheiden könnten, die zeitliche Bedingtheit der Logik, der uns zu bedienen wir gewöhnt sind, einzusehen. Überhaupt gelte es zu verstehen, dass keine Wahrheit, in deren Besitz die Menschen gekommen zu sein sich einbildeten, dem Schicksale, eines Tages falsch zu werden oder in gewisser Weise immer falsch gewesen zu sein, entgehen könnte. So scheint man endlich mit dem großen Problem zu Rande zu kommen, warum die Wissenschaft der Menschen bisher mit keinem ihres großen Problems zu Rande kommen konnte. Sie konnte es nicht, so lautet die Antwort, weil sie es niemals können wird."

[61] Kuba/Götz 41 f: Man schließt per Definition aus, dass man eine Endlosschleife gerät, doch ist schon die Definition eine Endlosschleife, bzw. setzt diese voraus. Kraft der Endlosschleife erschein nun das Hineinkommen in eine Endlossdchelife ausgeschlossen schon allen deswegen ausgeschlossen, weil man schon drin ist, und man kann also nicht mehr hineinkommen. So ist die Definition richtig, das man nicht in eine Endlosschleife kommen kann, weil man schon drin ist.

[62] Yourgrau 44: „Einem anderen Credo Machs stand Einstein allerdings beifälliger gegenüber: der Ablehnung des übermäßigen Gebrauchs von abstrakter Mathematik in der theoretischen Physik. Machs ausschließliche Fixierung auf die Daten unserer Sinneserfahrung ließ ihn den Höhenflügen der mathematischen Phantasie höchst argwöhnisch gegenüberstehen. Er hatte die Mathematiker in Verdacht, sich der eigentlichen Arbeit des empirischen Prüfens und Bestätigens durch die kunstvolle Manipulation von Symbolen entziehen zu wollen. Einstein hatte dafür volles Verständnis. Die Mathematik seiner revolutionären Arbeit über die spezielle Relativität war vergleichsweise elementar, und zu Beginn wehrte er sich gegen deren Neuformulierung zu einer vierdimensionalen Raumzeit durch seinen einstigen Lehrer Hermann Minkowski und beklagte sich: «Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehen ich sie selbst nicht mehr.» Im Unterschied zu Mach kam er jedoch rasch zur Vernunft, und das war sein Glück, denn der Schritt von der speziellen Relativität zur allgemeinen – Einsteins Meisterstück – wäre ohne Minkowskis mathematische Neuformulierung nicht möglich gewesen."

[63] Scheid 139: „Den Begriff der Menge verwendet man im Mathematikunterricht in der Schule und in alen Anwendungsbereichen der Mathematik, ohne diesen Begriff streng zu definieren. Auch wie haben in den Kapiteln I und II

Definierung als undefinierbar ist das undefiniert Definierte aus der Mathematik ausgegliedert und der Weltanschauung eingegliedert. So weit es gelang, die Mathematik in der Mengenlehre neu zu begründen, gehört die Mathematik dem Undefinierbaren an. B. Russel wies süffisant mit einem Barbier, der mehr oder minder alle Männer rasiert hätte, oder auch nicht, nach, dass die neue Mathematik ein Unding sei[64], bzw. im Bilde des zitierten Barbier – im Dienste der neueren Mathematik – über das Einseifen in der Rasur kaum hinausgekommen sei. Er kam zu dem streng mathematisch begründeten zwingenden Schluss, dass mithilfe der neueren Mathematik ein Wissenschaftler von einem Rührei nicht zu unterscheiden sei[65]. Die Transformation der Rechnung ins Unberechenbare erfolgte in mehreren Stufen der Entfremdung und ist so in sich selbst verschachtelt, als würde eine Schlange

---

diesen Begriff ohne nähere Erklärung benutzt. Das soll auch weiterhin so bleiben; der Begriff der Menge ist für uns wie auch für die Mehrzahl aller Mathematiker ein undefinierter Grundbegriff, von dem wir voraussetzen, dass jeder gutwillige Mensch weiß, was er bedeutet. Von Georg Cantor (1845-1918), dem begründer der transfiniten Mengenlehre, stammt folgende Erklärung: ‚Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassng von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganze.' Dies ist keine Defnition, bestenfalls eine vage Beschreibung des Mengenbegriffs; denn was ist eine ‚Zusammenfassng', was ist ‚wohlunterschiedene Objekte'? Cantor hat obige Erklärung auch nicht als Definitio ausgegeben, sondern höchstens as Beschreibung eines Begriffs, den ohnehin jeder Mensch kennt."

[64] Röd 483: „Antinomien in der Mengenlehre hatten bereits die Mathematiker Georg Cantor und Cesare Burali-Forti entdeckt. […] Bilden man nun die Menge aller normalen Mengen – sie möge «R» heißen –, dann ist eine Menge x genau dann ein Element von R, wenn sie eine normale ist, d. h. sich nicht selbst als Element enthält. Das gilt auch für R: R ist in R genau dann enthalten, wenn R nicht in R enthalten ist. Nimmt man an, dass R sich selbst als Element enthält, dann kann R sich nicht enthalten, und nimmt man an, dass R sich nicht als Element enthält, dann muss R sich selbst enthalten. Dieser Widerspruch hat Frege, den Russell von seinen Überlegungen unterrichtete, stark verunsichert. (Bekannt ist folgende scherzhafte Einkleidung der Antinomie: In einem Dorf gibt es einen Barbier, die alle Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren, – und nur sie – rasiert. Wie verhält es sich nun mit dem Barbier selbst. Da er ein Dorfbewohner ist, rasiert er sich selbst, wenn er sich nicht selbst rasiert; da er aber nur diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren, rasiert er sich nicht selbst.)"

[65] Koehne 122.

sich am Schwanz packen und verschlingen. Eine Art introvertierte Entfremdung. Die Euklidsche Mathematik und Geometrie bilden eine integrierende Einheit, und zwar auf Grundlage der Unabdingbarkeit der Dreidimensionalität[66]. Aus dieser Perspektive waren Axiome trivial. Mit der Einführung der Koordinatensysteme ist die Dreidimensionalität auf maximal zwei Dimensionen beschränkt worden, wobei selbst die zweite Dimension lediglich als eine Funktion, also Schein zu begreifen sei, und die so wurde die Eindimensionalität die alles bestimmende Wirklichkeiten, auf die projiziert alles begreifbar gemacht wurde[67]. Wollte man nun die Dreidimensionalität begreiflich machen, müsste diese zunächst auf die Eindimensionalität reduziert, und von dort in drei eindimensionale Teile so zerlegt werden, dass zwar dreimal je eine Dimension begreifbar war, oder auch nicht, niemals jedoch die Dreidimensionalität. Auch wenn man dann die je eindimensionalen Darstellungen wiederum rückprojizieren und mit Hilfe von Computerprogrammen dreidimensional darstellen kann, so schon diese Visualisierung jenseits der der Mathematik, die sich die Dreidimensionalität beraubt und sich auf die Zahlengerade so zurückgezogen habe[68], als wäre dort überhaupt eine Unendlichkeit vorstellbar und damit (be)greifbar[69], was aber nicht der Fall sein kann… War also schon die Analysis[70] eine

---

[66] Hainzl 14 f.
[67] Hainzl 14 f.
[68] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >.
[69] Meschkowski 11: „Verbindet man die Glieder einer Zahlenfolge a_n (1, 2, 3, …) durch Pluszeichen, so entsteht eine unendliche Reihe:
(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \sum_{\nu}^{\infty} a_{\nu}.$$
In der Theorie der reellen oder der komplexen Zahlen ist aber nur das Rechnen mit endlichen Summen axiomatisch begründet. Man kann nicht erwarten, dass man mit formal gebildeten unendlichen Summen vom Typ (1) wie mit gewöhnlichen Summen rechnen kann. […] Dieses einfache Beispiel zeigt, dass man die Rechenregeln für endliche Summen nicht ohne weiteres auf formal gebildete unendliche Reihen übertragen kann. […] Die Beweise findet man in allen Lehrbüchern der Analysis.“
[70] Vgl Artin 26; vgl Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >.

Entfremdung der Dreidimensionalität in die Scheinwelt der projizierten Gerade oder des Punktes[71], und wurde so die Mathematik ihres Realitätsbezugs, ihrer Identität, beraubt, d. h. abgehoben[72], so überbot diese Entwicklung die Mengenlehre[73] mit dem Kunstgriff der Neuerschaffung einer Dreidimensionalität aus (k)einer Dimension[74], was aber nur möglich war auf dem Umweg über die nullte Dimension[75]. Die Mengenlehre gründet also im Griff nach der Mehrdimensionalität in der Null, ist dort sozusagen zu Salzsäule erstarrt, denn über diesen Griff nach der Unendlichkeit[76] vom Boden der nullten Dimension aus, kam die Mengenlehre (in Bezug auf die Realität) nicht hinaus[77]. Die Mengenlehre hat also eine Dreidimensionalität für die Mathematik verfügbar gemacht, die es nicht gibt, bzw. erschuf die Mengenlehre das gesamte Universum in ichrem Bilde neu. Um in der neuen Mathematik begreifbar, geschweige denn berechenbar, zu sein, bzw. werden, muss man durch die Null gleichsam transformiert werden[78], so ähnlich manche Kinofilme durch ein schwarzes Loch in einem Paralleluniversum landen, wo man zumindest die Zeit an Orientierungsgröße hinter sich gelassen hat. Die mangelnde Orientierung eröffnet so neue Perspektiven, um nicht zu sagen ungeahnte Möglichkeiten, und sind so dem Begreifen des Unbegreiflichen keine Grenzen gesetzt. Vielmehr trat das Unbegreifliche über die Ufer. Die Dreidimensionalität wird in einer Dimension oder gar weniger begriffen, und damit überboten. Der Punkt, wo die Mengenlehre über sich und über alles was war,

[71] Wikipedia, Riemann-Integral, In: < URL >.
[72] Kuba/Götz 18 f.
[73] Russell 17 ff.
[74] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[75] Kuba/Götz 39 ff.
[76] Meschkowski 11 ff.
[77] Kuba/Götz 18 f, 39 ff.
[78] Kuba/Götz 18 f, 39 ff.

alles was ist, und alles was sein wird, hinaus geht, ist der Begriff der Unendlichkeit[79]. Ab der nullten Unendlichkeit[80] sollte das zwar scheinbar kein Problem sein, aber man kann mehr daraus machen[81].

Die Mengenlehre[82] indes scheint – mehr oder minder direkt – auf die Rechenkunst der alten Ägypter zurückzugehen[83], oder das zumindest versucht zu haben, und kann, man könnte meinen, will, nicht mit negativen Zahlen rechnen[84], bzw. ist die Mengenlehre auf jeden Fall mit den negativen Zahlen nicht kompatibel, und daher gegenüber unserem abendländischen Zahlenbegriff abgehoben[85]. Obwohl in diese – einer Organtransplantation ähnlich – verpflanzt wurde. In dem Moment, als die neuere Mathematik mit Russell – in einem bildlichen Vergleich – jene Männer im Dorf in die Berechnung mit einbezieht, die vom Barbier NICHT rasiert werden, kommt die Berechnung der negativen Rasur in Teufels Küche, ob mit oder ohne das von Russell – als negative Lösung – kredenztes Rührei[86]. Allerdings konnte Russell – und andere – nur jene Negativität zu Widerspruch führen, und damit eigentlich die Mengenlehre insgesamt aus den Angeln heben, die auf sich selbst bezogen sind, bzw.

---

[79] Kuba/Götz 40 f.

[80] Vgl. Russell 29: „Jetzt können wir folgende Definition aufstellen: Die ‚natürlichen Zahlen' sind die Nachkommenschaft der 0 hinsichtlich der Beziehung ‚unmittelbarer Vorgänger' (was die Inverse von ‚Nachfolger' ist)." Das impliziert einen unerschöpflichen Vorrat an Null, bzw. setzt diese voraus. Das wiederum erlaubt, aus dem Vollen zu schöpfen. Jede Menge Null fruchtet also beliebige Mengen Null, ob die nun abzählbar sind oder nicht. Es gibt aber auch den mathematisch(näher bestimmt)en Ort, der mit zwei Nullen „00" als Charakteristikum auskomme, ähnlich wie man jede Menge Zeichen für § mit zwei Zeichen „§§" dieser Art charakterisieren könne.

[81] Russell 25 ff.

[82] Vgl Russell 180 ff.

[83] Remmert/Ullrich 50 ff; Sautoy 88 ff; Arndt/Haenel 200 f.

[84] Russell 16 f: Von Frege wurde die Zahl und damit Mathematik als Mengenlehre so neu definiert, als ob überhaupt erst jetzt die Zahl definiert worden wäre, doch ist damit eine neue Mathematik so begründet worden, die mit der alten Mathematik inkompatibel sei.

[85] Kuba/Götz 18 f, 39 ff.

[86] Koehne 122.

Mengen, die Teil von sich selbst wären. Ist aber die Problematik einmal transparent[87], und ist ohnehin das ganze System in Frage gestellt, bzw. gekippt, so lässt sich spätestens ab dem Moment die Fragestellung verallgemeinern, wenn auch diesmal nicht mehr unbedingt mit den Mitteln der Mengenlehre selbst. Der Beweis der Unhaltbarkeit der modernen Mathematik von Russell ist deswegen etwas Besonderes, weil er mit den Mitteln der Mengenlehre diese ad absurdum geführt, d. h. in den Grundlagen aufgehoben hatte. Mit den Mitteln der herkömmlichen Mathematik ist das vielleicht in der Ausführung nicht so elegant[88], aber unter dem Strich lässt sich das Ergebnis sehen: dass nämlich nichts zu sehen ist. Und das ist schon zu viel gesagt.

Die zunächst berechenbar anmutenden Nichtrasierten wären eine negative Menge, die es jedoch nicht gibt, zumindest nicht berechenbar. Wollte man mathematisch exakt sein, so müsste eine negative Menge exakt so definiert werden, die es nicht gibt, was jedoch nicht gleich sein kann mit einer negativen Zahl, oder mit etwas Negativem allgemein, und schon gar nicht mit der Null[89]. Eine leere Menge ist und bleibt ein Mysterium, dicht gefolgt vom Rührei Russells, denn sie rechnet sich nicht, ja ist die Unberechenbarkeit schlechthin, auf der alle im System beruht. Das Paradoxon ist, das kaum eine der Begriffe oder Definitionen der Mengenlehre eindeutig ist[90], weil das gar nicht eindeutig sein könnte, dass wiederum um so eindeutiger. Man kann sich widerspruchsfrei selbst widersprechen. Und das mathematisch exakt. Denn das, was die Mengenlehr scheinbar widerspruchsfrei erklärt, ist zumindest mit der Zahlentheorie nicht kompatibel, allzu oft aber auch mit den Voraussetzungen der Mengenlehre selst auch nicht[91]. Insofern also die Unberechenbarkeit der Primzah-

[87] Kuba/Götz 18 f, 39 ff.
[88] Kuba/Götz 18 f, 39 ff.
[89] Russell 29 ff.
[90] Kuba/Götz 18 f, 39 ff.
[91] Kuba/Götz 18 f, 39 ff.

len, und damit der Zahlen insgesamt[92], oder vielmehr die Kryptologie, als „gegeben" gilt, bzw. als integrierenden Teil der Mathematik diese mit berücksichtige, ist und bleibt die Zahl für immer verschlüsselt. Sie ist somit a priori unberechenbar. Die absolute Null. Quod erat demonstrandum.

In der klassischen Mathematik hat man freilich die Zahl berechnet, ja die Zahl wurde begriffen, als würde sie sich rechnen, auch wenn man das vielleicht nicht immer gleich in eine entsprechende Form fassen konnte, oder die Berechnung etwas länger geraten sei, ähnlich dem Tropfstein bis zur Verfestigung und Ausdruck in der Form. Von der Mangelhaftigkeit der Formel jedoch auf die Mangelhaftigkeit der Zahlen zu schließen, ist jenseits der mathematischen Logik.

Gut charakterisiert die Überwindung (der Berechenbarkeit) der neueren Mathematik die falsche Zitierung von Gödel, der zwar später publiziert aber zu dem analogen Schluss gekommen ist wie Russell[93]: Nun wird Gödel durch verfälschte Zitate das Gegenteil dessen unterstellt, was er sagte,

[92] Russell 29 f: „Die Zahl 0 ist die Zahl der Elemente einer Menge, die keine Mitglieder besitzt, d. h. der sogenanten ‚Nullmenge'. Nach der allgemeinen Definition der Zahl ist die Zahl der Elemente der Nullmenge die Menge aller Mengen, die der Nullmenge äquivalent sind, d. h . (wie leicht zu beweisen) die Menge, die nur aus der Nullmenge selbst besteht, d. h. die Menge, deren einziges Mitglied die Nullmenge ist. (Sie ist nicht etwa identisch mit der Nullmenge, denn sie hat ein Element, nämlich die Nullmenge selbst, wogegen die Nullmenge kein Element besitzt. Eine Menge mit einem Element ist niemals identisch mit diesem einen Element. […] Wir haben also die folgende rein logische Defintion: 0 ist die Menge, deren einziges Element die Nullmenge ist. […] Die Zahl 0 ist die Zahl der Elemente einer Menge, die keine Mitglieder besitzt, d. h. der sogenanten ‚Nullmenge'. Nach der allgemeinen Definition der Zahl ist die Zahl der Elemente der Nullmenge die Menge aller Mengen, die der Nullmenge äquivalent sind, d. h. (wie leicht zu beweisen) die Menge, die nur aus der Nullmenge selbst besteht, d. h. die Menge, deren einziges Mitglied die Nullmenge ist. (Sie ist nicht etwa identisch mit der Nullmenge, denn sie hat ein Element, nämlich die Nullmenge selbst, wogegen die Nullmenge kein Element besitzt. Eine Menge mit einem Element ist niemals identisch mit diesem einen Element. […] Wir haben also die folgende rein logische Defintion: 0 ist die Menge, deren einziges Element die Nullmenge ist."

[93] Sautoy 221 ff.

und vor allem nachwies. Gödel wies nach, dass in der neuen Mathematik, die er unternahm zu bewiesen bzw. zu bestätigen, nachweisbar nichts nachweisbar ist. Das hieße im Sinne von Russell und im Sinne von Gödel, dass die frühere Mathematik älter sei, zumal berechenbar, doch die Literatur zitiert nun Gödel falsch und unterstellt ihm, die frühere Mathematik erledigt bzw. aufgehoben zu haben[94], so als hätte Gödel die Mathematik verschlüsselt und den Schlüssel weggeworfen. Die neuere Mathematik lebt von und für den Mythos, dass jene Mathematiker wir Gödel, die den Schwindel der neuen Mathematik aufgedeckt haben, nicht diese, sondern die alte Mathematik denunziert hätten, und sonach exakt berechenbar, bzw. nicht berechenbar, die Täter die Opfer und die Opfer die Täter wären.

Es ist also wiederum durch die neuere Mathematik (durch falsche Zitate) verschlüsselt, dass Gödel – wie Russell – die neuere Mathematik entschlüsselt habe[95]. Und die nämliche Verschlüsselung

[94] Sautoy 222 ff.

[95] Vgl Yourgrau 165 f: „Heisenbergs Unschärferelation war die schönste Blüte, die die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik hervorgebracht hatte, das Lieblingskind des Positivismus. Sie stand für eine maximale Unbestimmtheit in der Physik – letztlich eine Zurückweisung des von Gödel so geliebten Prinzips des zureichenden Grundsatzes von Leibniz – und bildete den Inbegriff des Irrealismus in den physikalischen Wissenschaften. Und damit war gerade sie Einstein wie Gödel ein Dorn im Auge. Gödel meinte dazu: «Insbesondere hat diese Entwicklung in der Physik gerade in unserer Zeit einen Höhepunkt erreicht, indem weitgehend die Möglichkeit einer Erkenntnis der objektiven Sachverhalte bestritten [wird], und [es] behauptet wird, dass man sich begnügen muss, Beobachtungsresultate vorauszusagen; was eigentlich das Ende der theoretischen Wissenschaft im üblichen Sinne ist...» [...] Zum einen bemühten sich beide Denker sehr darum, Methoden anzuwenden, die auch der nüchterne Positivist epistemologisch anerkennen musste: Im Fall von Gödels Satz waren es formale Systeme, im Fall der Unschärferelation direkte empirische Beobachtungen. Außerdem zogen beide Theoretiker ontologische Schlussfolgerungen aus epistemologischen Prämissen, die die immanenten Beschränkungen der erkenntnistheoretisch akzeptablen Methoden, die sie angewandt hatten, aufzeigen. Eine solche Beweisführung ist freilich charakteristisch für den Positivismus. Sie ist auch kennzeichnend für Einsteins spezielle Relativitätstheorie, eine Tatsache, mit der Heisenberg (vergeblich) versucht hat, Einstein zu beeindrucken. Dass die Schlussfolgerungen Gödels auf einen mathematischen Realismus hinweisen während Hei-

unterstellt Gödel, dass Gödel angeblich alles verschlüsselt und den Schlüssel weggeworfen habe. So weit also der neueren Mathematik zu glauben wäre, ist und bleibt die Zahl, zumal ihre Berechenbarkeit, für immer verschlüsselt[96], selbst wenn sie berechenbar wäre, weil die Mathematik den Schlüssel weggeworfen hätte. Was bleibt, ist das Axiom der Unberechenbarkeit der Zahlen. Und das a priori absolut[97]. Im Zirkelschluss lässt sich auch – gleichsam als Leichenschändung – zeigen, dass mathematisch gesehen die alte Mathematik die Flucht ergriffen hätte, bzw. verschwunden sei, weil sie nicht Opfer sondern Täterin sei: Die Mathematik habe auf sich selbst einen Selbstmordanschlag so verübt, dass dabei alle Spuren verwischt wurden.

Sowohl die Lösung des Unlösbaren wie auch die Unlösbarkeit der Lösung[98] kann in der Zahlentheorie bildlich als die Quadratur des Kreises[99] beschrieben werden. Dies ist, und darin besteht Übereinstim-

---

senberg für einen physikalischen Irrealismus eintrat, ändert nichts an der Tatsache, dass sich beide Denker einen ontologischen Weg durch das Diktat der Erkenntnistheorie bahnten und jeder dabei eine intellektuelle Revolution einleitete, deren volle Bedeutung erst noch richtig verstanden werden muss."

[96] Sautoy 63.

[97] Vgl Yourgrau 165 f.

[98] Vgl Yourgrau 10: „Was in Einsteins spezieller Relativitätstheorie schlicht ein heuristisches Prinzip gewesen war – das Wesen der Wirklichkeit aus der Beschränktheit menschlichen Erkennens herzuleiten –, wurde für Heisenberg zu einer Art Religion, der weder Gödel noch Einstein betreten wollten."

[99] Wikipedia, Quadratur des Kreises, in: < URL >: „Eine ausführliche Abhandlung mit dem Titel *Kreismessung* ist von Archimedes überliefert. Archimedes beweist in dieser Arbeit drei grundlegende Sätze:

1. Die Fläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Kreisradius als der einen und dem Kreisumfang als der anderen Kathete. Berechnen lässt sich die Kreisfläche also als ½ · Radius · Umfang.
2. Die Fläche eines Kreises verhält sich zum Quadrat seines Durchmessers nahezu wie $^{11}/_{14}$.
3. Der Umfang eines Kreises ist größer als $3^{10}/_{71}$ und kleiner als $3^{1}/_{7}$ des Durchmessers.

Mit dem ersten Satz ist das Problem der Quadratur des Kreises auf die Frage nach der Konstruierbarkeit des Umfangs eines Kreises aus dem vorgegebenen Radius und damit auf die Konstruierbarkeit von π zurückgeführt. Im dritten Satz gibt Archimedes gleich eine ebenso einfache wie genaue Näherung dieser Zahl, nämlich $^{22}/_{7}$, ein Wert (~3.143), der für praktische Zwecke noch heute Verwendung findet. Der zweite Satz ist ein

mung, der Inbegriff, ein Synonym des Unlösbaren[100], schon allein aufgrund der Tradition, und so hätte man die Frage der Unlösbarkeit zumindest terminologisch gelöst. Die Lösung bietet sich allerdings aufgrund der Ähnlichkeit der Funktion des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ und der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ doch an[101].

Um es nicht allein bei der Kritik der neueren Mathematik bewenden zu lassen, so sollte hier der mit Euler begründeten neuen Mathematimatik[102] das Wort geredet werden, die seiner Zeit so weit voraus war und noch ist, dass sie bis heute nicht eingeholt werden konnte. Euler hatte mathematisch den Begriff des Feldes vorweggenomemn, und die Newtonsche Punktmechanik auf ganz neue Grundlagen gestellt, bzw. auf eine andere Ebene gehoben, und eine neue Dimention bzw. mit der Berechenbarkeit des Feldes in die Dreidimensionalität rücktransformiert.

Euler wurde und wird deswegen missverstanden und oder missinterpretiert, weil er nicht die Eindimensionalität als Ausgangspostion nahm und vor dort her eine Dreidimenstionalität nachbilden wollte, wie seine Vorgänger, sonern umgekehrt, er ging von der Dreidimenstionalität aus, hinterfragte kritisch die Eindimensionalität[103] der Darstellung in der Mathematik, und suchte der Dreidimensionalität gerecht zu werden. Das ist ihm auf weiten Strecken gelungen. Weniger gelungen ist allerdings, ihn zu verstehen.

---

einfaches Korollar aus den beiden anderen; dass sich die Fläche eines Kreises proportional zum Quadrat seines Durchmessers verhält, war bereits Euklid bekannt, Archimedes gibt hier den Wert der Proportionalitätskonstanten an.“

[100] Wikipedia, Quadratur des Kreises, in: < URL >: „Ferdinand von Lindemann konnte 1882 schließlich beweisen, dass π nicht algebraisch, sondern transzendent ist. Deshalb ist π nicht konstruierbar und die Quadratur des Kreises unmöglich.“

[101] Knopp 205 ff; Wikipedia, Kreis- und Hyperbelfunktionen, in: < URL >.

[102] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.

[103] Hainzl 14 ff.

Wenn und so weit man die Trigonometrie mit der Funktion des Einheitskreises als Abbildung der zweiten Dimension in einer Dimenstion der reellen Zahlen vergegenwärtig, so kann die Trigonometrie als ein Vorgriff auf die Dreidimensionalität verstanden werden, wenn auch begrentz im Einheitskreis mit der Formel $x^2 + y^2 = 1$ und auf zwei Dimensionen. Das sogenannte Koordinatensystem der Vorgänger von Euler hatte also ermöglichst, in andere Dimenstionen zwar allerdings nur einen eindimensionalen Blick zu riskieren. Diese Koordnatensyteme beruhen auf der Idee des unbewegten Raumes, so ähnlich wie vor dem heliozentrischen Weltbild des Kopernikus der Beobachter unbeweglich im Mittelpunkt des Universums stand. Die auf noch so vielen Zahlengeraden im Raum beruhenden Koordinatensyteme könne und wollen den Reaum nur eindimenstional fassen, und ihr Vorzug besteht darin, die Dreidimenationalität auf eine Dimension zu reduzieren, und so für die Mathematik zugänglich zu machen. Dies man gür die eine Dimenstion der Mathematik in mancher Hinsicht anschaulich wirken, allerdings um einen Preis, der Höher liegt als die gewonnene Anshauung bringt. Euler hingegen ist zwar weniger anschaulich, bingt aber einen unermesslichen Gewinn, so ähnlich wie man der neueren Astronomie mit dem Fernroht eine Erweiterung des Horizonts ins Unermessliche unterstellt.

„Die zwei Teilkurven der impliziten Funktion $x^y - y^x = 0$ schneiden sich im Punkt $P(e / e)$. Mehrdimensionale Verallgemeinerungen dieser Funktion setzen sich im n-dimensionalen Raum aus $\frac{n^2-n}{2} + 1$ Teilkurven zusammen, die sich alle in einem Punkt schneiden, dessen Koordinaten sämtlich e betragen. Der Beweis hierfür ist nicht leicht zu führen.“[104]

Die sog Eulersche Identität rechtnet die Eindimensionalität in die Zweidimensionalität der Trigonometrie so um, dass in dieser Umrechnung mit den komplexen Zahlen die dritte Dimenstion implizit

[104] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.

enthalten ist. Die Exponentialfunktion[105] geht zwar darüber noch hianaus, erlaubt aber von der größeren Distanz her einen weiteren Blickwinkel.

„Definition über die Exponentialfunktion

Die Definitionen von Kreis- und Hyperbelfunktionen über die Exponentialfunktion erlauben es, das Funktionsverhalten auf eine bekannte Funktion[106] zurückzuführen. Sie werden daher viel benutzt.

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Herleitung

Aus der Eulerschen Identität lässt sich die Schreibweise des sin(z) und des cos(z) als Summe von Exponentialfunktionen herleiten. Die Eulersche Identität lautet:

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + i\, sin\varphi$$
$$e^{-i\varphi} = cos\varphi - i\, sin\varphi$$

[105] Wikipedia, Kreis- und Hyperbelfunktionen, in: < URL >; vgl Lang/Pucker 597 ff.
[106] Westermann 407 f; Knopp 431 ff; Meschkowski 122 ff; Hainzl 142 ff.

Die zweite Gleichung folgt aus der Eulerschen Identität: Man potenziert die Eulersche Identität mit -1 und erweitert den Bruch so, dass man die 3. Binomische Formel anwenden kann und lässt den Nenner mit Hilfe des Trigonometrischen Pythagoras verschwinden.

Wenn man nun die zweite Gleichung von der Ersten subtrahiert und sin φ isoliert, dann erhält man die oben genannte Gleichung für sin(*z*). Die Formel für cos(*z*) erhält man analog. Die beiden Gleichungen müssen dann aber addiert werden.

Definition über Reihenentwicklung

Die Taylorreihen mit dem Entwicklungspunkt *z*=0 unterscheiden sich nur in den Vorzeichen jedes zweiten Summengliedes. Bei den Hyperbelfunktionen werden alle Reihenglieder addiert; bei den Kreisfunktionen wird jedes zweite Reihenglied subtrahiert.

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Hier steht der Ausdruck *n*! für die Fakultät von *n*, das Produkt der ersten *n* natürlichen Zahlen:

n! = 1·2·…·n speziell auch 0! = 1.“[107]

Ohne allerdings die Frage auch inhaltlich unbedingt gelöst zu haben, lässt sich in diesem Bild – anhand der Bewegung entlang von Raumbahnen – darstellen, dass sich im Kreis mit natürlichen und/oder mit ganzen, d. h. mit rationalen Zahlen, das berechnen lässt, was sich in der Geraden dann nicht mehr „rationell“ oder gar „natürlich“ darstellen lässt[108]. Dem steht zwar schon die

[107] Wikipedia, Kreis- und Hyperbelfunktionen, in: < URL >: „Umwandlung zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen
Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:
sin(i·z) = i·sinh(z)
sinh(i·z) = i·sin(z)
cos(i·z) = i·cosh(z)
cosh(i·z) = i·cos(z)
beziehungsweise:
sin(z) =w –i·sinh(i·z)
sinh(z) = –i·sin(i·z)
cos(z) = cosh(i·z)
cosh(z) = cos(i·z)
Eine andere Möglichkeit die Kreis- und Hyperbelfunktionen ineinander umzuwandeln bietet die Gudermannfunktion. Der Vorteil ist dabei, dass der Umweg über die Komplexen Zahlen vermieden werden kann.
sinh(x) = tan(gd(x))
cosh(x) = sec(gd(x))
tanh(x) = sin(gd(x))
sech(x) = cos(gd(x))
csch(x) = cot(gd(x))
coth(x) = csc(gd(x))“ Vgl Lang/Pucker 597 ff.

[108] Stelzner, Der Goldene Schnitt, in: < URL > S. 21 ff; Schoenebeck, IX. Kapitel. Die Relativitätstheorie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 907: „Da die Erde gegen den Fixsternhimmel neben einer Translation auch eine Rotation ausführt, besitzt dieser Himmelskörper gegenüber dem im Fixsternhimmel verankerten Koordinatensystemen eine (Normal)-Beschleunigung (vgl. Bd., I, Nr. 11). Daher kann die Gl. (IX, 1) auf der Erde nicht gelten und geeignete Experimente müssten prinzipielle Abweichungen von Gl. (IX, 1) aufzeigen. Das bekannteste mechanische Experiment

Trigonometrie entgegen, wo bei bestimmten Winkeln auf der Kreisbahn natürliche Zahlen vom Kreis auf die Gerade projiziert werden[109], doch argumentiert die Skepsis schon bei den natürlichen Zahlen angesichts der Gegenüberstellung zu den reellen Zahlen, dass die natürlichen Zahlen im Vergleich lückenhaft, währende die reellen Zahlen in diesem Vergleich, gemessen an den natürlichen Zahlen[110], unvollkommen wären.

- Wären die natürlichen Zahlen[111] die einzig Gegebenen und die Abweichungen davon widernatürlich, oder allenfalls übernatürlich, so trifft das insbesondere auf den Kreisumfang π (Pi), in den Einheiten des (geraden) Radius r gemessen, zu[112].
- Eine andere Widernatürlichkeit oder Irrationalität[113] kennt die Mathematik nicht, denn scheinbare Unregelmäßigkeiten, die darüber hinaus gehen, sind aus diesen Elementen zusammengesetzt (Kegelschnitte).
- Demnach wäre auch eine Spur, die ein Rad auf einer geraden Fläche hinterlässt[114], eine Gerade eben, widernatürlich. Auf jeden Fall in der Sprache der neuen Mathematik[115]. Allerdings zeigte

---

dieser Art ist der berühmte Foucaultsche Pendelversuch (vgl. Bd. I, Nr. 40), der die prinzipiellen Abweichungen von Gl. (IX, 1) in Form der Zentrifugal- und Corioliskraft angibt. Daher bezieht sich das Relativitätsprinzip von Galilei nur auf Translationsbewegungen, nicht aber auf Rotationsvorgänge, die durch mechanische Versuche nachgewiesen werden können. Versuche im Bereich der Optik, die ebenfalls Rotationsvorgänge zu erkennen gestatten, werden in Nr. IX, 9 besprochen werden."

[109] Riesenhuber 47 ff.
[110] Remmert/Ullrich 13 ff.
[111] Remmert/Ullrich 13 ff.
[112] Remmert/Ullrich 42 ff; Arndt/Haenel 1 ff.
[113] Stelzner, Der Goldene Schnitt, in: < URL > S. 21 ff.
[114] Riesenhuber 47 ff.
[115] Lang/Pucker 62: Der Riemannsche Kugel ist vielleicht ein hinkender Vergleich, doch handelt sie von der Endlichkeit der Komplexen Zahlen einerseits und von der Notwendigkeit, in der neueren Mathematik für die

die Eulerschen Identität n $e^{ix} = cos(x) + i\ sin(x)$ mit $e^{i\pi} = -1$ oder $e^{i\pi} + 1 = 0$ den Übergang[116]: $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ mit der Hyperbel.

- Analog widerspräche allem was berechenbar ist, wenn ein gerader Zweig gebogen wäre, sei es im Kreis oder im Bogen[117], so als wären Pfeil und Bogen eine mathematische Unmöglichkeit par Exzelllenze.

Die Unlösbarkeit beginnt dort, wo auf einen Teil der dieser Dualität von Kreis und Gerade[118] verzichtet wird und die eine die Rolle des jeweils anderen übernehmen soll[119], und hört dort auf, wo man diese Dualität bestehen lässt[120]. Insofern es also eine Unlösbarkeit der Mathematik für uns gibt,

---

Berechnung einen Punkt als Unendliche anzunehmen, was schon ein Widerspruch in sich sei. Das dabei das Unendliche wirklich als Punkt gefasst bzw. dargestellt wird, zeigt die Projektion.

[116] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff; Lang/Pucker 595 ff.

[117] Riesenhuber 47 ff.

[118] Riesenhuber 47 ff.

[119] Vgl Schoenebeck, IX. Kapitel. Die Relativitätstheorie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 938: „In Abschnitt Nr. IX, 5 ist zu erkennen, dass die grundlegende Lorentz-Transformation und damit das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik (Einsteinsches Prinzip) sich ausdrücklich auf Translationsbewegungen bezieht. Dies gilt auch für die bisherigen Folgerungen aus diesen Grundlagen und für alle bisher betrachteten Experimente. Es wurden stets Systeme Σ und Σ' betrachtet, deren Relativbewegung durch eine konstante Translationsgeschwindigkeit beschrieben wurde. Aus der Mechanik ist bekannt, dass Naturvorgänge in einem rotierenden System anders als in einem nicht rotierenden verlaufen. Das ergibt z. B. der Foucaultsche Pendelversuch (vgl. Bd. I, Nr. 40), mit dem die Rotation der Erde nachgewiesen werden kann. In der Mechanik werden daher die Bewegungsgleichungen im rotierenden System abgeändert, indem zu den tatsächlich wirkenden Kräften sog. Scheinkräfte (Zentrifugalkraft und Corioliskraft) eingeführt werden. Formal bleiben dabei die Bewegungsgleichungen auch im rotierenden System gültig."

[120] Vgl Bergmann/Schäfer I (1975) 95 ff: Die Trägheitsmomente von Rotationskörper stehen im Verhältnis von ganzen Zahlen J = (x/y)MR² zueinander: J = (1/2)MR² für Kreisscheibe äquatorial; J = (1/4)MR² für Kreisscheibe polar; J = (2/5)MR² für Kugel und Halbkugel; J = (1/3)ML² für zylindrischen Stab senkrecht zur Zylinderachse; J =

so müsste sich diese auf der Zahlengerade befinden[121], und wir bewegen uns sozusagen im Kreis. An dem Punkt angekommen, dass man – etwa auf der Zahlengerade – nicht weiter kommt, außer man dreht sich im Kreis[122], könnte man die Richtung ändern, bzw. Kreisbahn als Bezugsystem akzeptieren[123], und trotzdem weitergehen, oder man ändert etwa die Dimension. Ein erster Lösungsansatz möge sein, dass die scheinbaren Probleme zumindest teils kommunikativer Natur seien, weil sphärische bzw. dreidimensionale Wirklichkeiten, die sich rechnerisch nur in drei Dimensionen zum Ausdruck bringen könnten, auf eine zweidimensionale Fläche, oder auf eine eindimensionale Zahlengerade, projiziert wären[124]. Auf der Zahlengerade (projiziert) werden die natürlichen Zahlen gleichsam ihrer Natur entkleidet[125], denn diese ist immer und ausschließlich dreidimensional, und lässt sich, wie die Mathematik bezeugt, in weniger Dimensionen – als drei – kaum bis gar nicht adäquat darstellen. Die Mengenlehre ist hingegegen steht maximal eine Dimension, oder wenn man die Zahlengerade als eine Dimension annimmt, so ist jede Menge gleich eine Art Reduktio ad absurdum

---

(1/12)ML² für zylindrischen Stab durch die Achse des Zylinders; J = (3/10)MR² für Kegel; J = (3/2)MR² für zylindrische Scheibe; J = (1/3)ML² für zylindrischen Stab senkrecht zur Zylinderachse aber außerhalb dem Schwerpunkt.

[121] Yourgrau 152: „Im zweiten Schritt erinnert uns Gödel daran, dass die spezielle Relativitätstheorie «etwas Besonderes» ist, weil sie nur eine träge, das heißt, unbeschleunigte Bewegung auf einer geraden Bahn kennt. Das schließt eine beschleunigte, der Schwerkraft unterworfene Bewegung aus."

[122] Vgl Riesenhuber 47 ff.

[123] Lang/Pucker 62.

[124] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Eine weitere Idee aus der Physik, die in Zusammenhang mit der Riemannvermutung diskutiert wurde, sind die „Yang-Lee-Nullstellen" der ins Komplexe analytisch fortgesetzten Zustandssumme in Modellen der statistischen Mechanik. Chen Ning Yang und Tsung-Dao Lee bewiesen unter Verwendung eines Resultats von George Polya aus der Theorie der Zetafunktion, auf das sie Mark Kac aufmerksam machte, dass in bestimmten Modellen die Nullstellen auf einem Kreis lagen, bei anderen Modellen liegen sie auf einer Geraden. Die Lage der Nullstellen bestimmt das Verhalten in Phasenübergängen ähnlich, wie die Nullstellen auf der kritischen Geraden die Feinverteilung der Primzahlen steuern."

[125] Hainzl 14 f.

und die nullte Dimention in form eines Punktes, bzw. mehrerer Punkte, die nicht einmal eine Dimension[126] fassen können.

Ein besonders delikater Vorgriff auf die Imagination, also ein (Vor)Griff hinter die Dimension der Zahlengerade, gelang Archimedes, der das nämliche Versagen beim Umfang und Fläche des Kreises, d. h. angesichts der Irrationalität von π in der Gerade (oder in der zweiten Dimension der Fläche), mit einem radikalen Richtungswechsel bzw. Dimension-Wechsel bei der Problemstellung, hin zum Volumen, also in einer anderen Dimension, gelöst hatte[127].

- Er stellt fest, dass linear[128] bzw. auf der (eindimensionalen und/oder maximal zweidimensionalen) Zahlengerade nicht mit „natürlichen" Zahlen berechenbaren geometrischen Formen beim Volumen (d. i. die Dreidimensionalität bzw. die Sphäre) wiederum in einem natürlichen Verhältnis zueinander stehen. Lediglich die Projektion der dreidimensionalen Sphäre auf eine oder zwei Dimensionen zeigt irrationale Zwischenergebnisse[129].
- Das Volumen von Zylinder, Halbkugel und Kegel, mit gleichem Radius und Höhe, verhält sich wie 1:2:3. In der dritten Dimension lässt sich also das mühelos mit natürlichen Zahlen darstellen, was zweidimensional irrational wenn nicht imaginär erscheint[130].
- Damit ist also gelungen, mit natürlichen Zahlen das ansonsten „Unberechenbare" doch berechenbar zu machen[131], und es wäre damit die Unlösbarkeit im antiken Verständnis sozusagen wegrationalisiert.

---

[126] Hainzl 14 f.
[127] Haber 15 ff.
[128] Hainzl 14 f.
[129] Lang/Pucker 62.
[130] Haber 16 ff.
[131] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff; Lang/Pucker 595 ff.

- Der Unterschied zwischen Kugel und Zylinder gleichen Radius und gleicher Höhe ist lediglich die gerade Seitenlänge des Zylinders im Vergleich zur kreisförmigen Höhe der Kugel[132].
- Allerdings muss man einräumen, dass sowohl bei der Halbkugel, wie auch bei dem Kegel und beim Zylinder eine identische Kreisfläche gibt. Also bei einem Quadrat der Vergleich nicht mehr so einfach wäre. Und doch lässt sich der Kreis mit Hilfe der sogenannten Trigonometrie[133] auf die Gerade umrechnen[134]. Wenn auch nicht so frappant, wie das Archimedes in drei Dimensionen gelang.

Das also, was auf der Zahlengerade unmöglich erscheint, bzw. unberechenbar, ist trivial in der Sphäre, um nicht zu sagen wieder „natürlich", so als könnte die Mathematik wieder bis drei zählen.

Die Lehre aus der Geschichte ist, dass Archimedes dafür aus der damals prominentesten Hochschule der Welt verwiesen wurde, wie uns die Geschichte als Lehrmeister darüber unterrichtet:

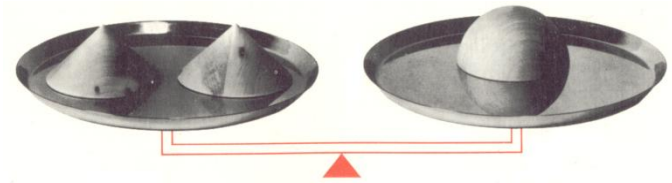
»An Stelle dröhnenden Applauses empfing Archimedes eisiges Schweigen. Schließlich, nach einer Minute peinlicher Stille, erhob sich ein 14jähriger Knabe. Es war Apollonius von Perga, trotz seiner Jugend bereits ein berühmter Mathematiker und Fakultätsmitglied. Schon in jungen Jahren hatte er für seine Arbeiten über die Kegelschnitte großen Ruhm geerntet. Er hatte die Eigenschaften dieser Kurven beschrieben und ihnen ihre Namen gegeben: Ellipse, Parabel und Hyperbel[135]. Diesen erstaunlichen Leistungen verdankte er eine Stellung an der Universität, als er noch ein Junge war. Und nun hören wir, was er sagte, nachdem Archimedes seine Demonstration beendet hatte: „Euer

[132] Vgl Bergmann/Schäfer I (1975) 95 ff.
[133] Wikipedia, Trigonometrie, in: Wikipedia, < URL >.
[134] Riesenhuber 47 ff.
[135] Wikipedia, Hyperbel (Mathematik), In: < URL >.

Magnifizenz, geehrte Kollegen! Ich stelle den Antrag, dass Archimedes für immer der Universität verwiesen werde, da er den reinen Geist der Mathematik mit schmutziger Materie besudelt hat."

Nach dieser Niederlage wurde die Stellung des Archimedes in Alexandrien unhaltbar; er hatte das schlimmste Verbrechen gegen den Geist der Mathematik begangen. Man durfte keinesfalls einen mathematischen Beweis mit Hilfe eines Experimentes liefern - dies musste auf der Basis reiner Logik geschehen. Archimedes kehrte in seine Heimatstadt zurück, wo er seine glänzende Karriere als Mathematiker und Erfinder fortsetzte.

Die griechische Mathematik besaß noch nicht die mathematischen Werkzeuge, die Volumen dieser Körper zu berechnen, wenn nur ihre linearen Dimensionen gegeben waren. Als Archimedes sich mit diesem Problem vergnügte, fiel ihm plötzlich auf, dass eine einfache Beziehung zwischen den Volumina eines Kegels, einer Halbkugel und eines Zylinders bestehen müsse. Wenn die Radien der Grundflächen und die Höhen dieser drei Körper gleich waren, mussten sich ihre Volumina wie „1" zu „2" zu „3" verhalten. [...] Da er jedoch keinen strengen mathematischen Beweis für diese Lösung führen konnte, überlegte er sich einen genialen experimentellen Beweis. Er ging in die Tischlerwerkstatt der Universität, wählte ein Stück feinsten Holzes aus und ließ sich drei Kegel, eine Halbkugel und einen Zylinder drehen, die alle dieselbe kreisförmige Grundfläche und dieselbe Höhe hatten (Bild 4).



Archimedes kündigte zuerst sein Resultat an und schrieb die folgenden einfachen Proportionen auf:

Kegel = I
Halbkugel = 2
Zylinder = 3

[...] Zunächst wog er die drei Kegel gegen den Zylinder aus — und sie waren gleich schwer (Bild 5). Dann vertauschte er zwei seiner Kegel mit der Halbkugel – und die Waage blieb im Gleichgewicht (Bild 6).

Schließlich verglich er zwei seiner Kegel mit der Halbkugel – und auch sie hielten sich die Waage (Bild 7).«[136]

Die Antike weiß also schon von einer – ähnlicher – Unvereinbarkeit der Theorie mit der Praxis[137], als Archimedes für eine mathematische Beweisführung von der damals renomiertesten Bildungseinrichtung verwiesen wurde[138]. Für uns berechnen sich auch die runden Flächen mit Quadraten, und die Kuben lassen sich mit dem gleichen Quadrat berechnen, der unsere Aufmerksamkeit gelte[139].

[136] Haber 16 ff.
[137] Haber 15.
[138] Haber 17
[139] Waldal 81, 86.

Einleitung

Es gibt zahlreiche mehr oder minder anspruchsvolle Lösungsversuche zum sog. Primzahlproblem[140]. Die Mehrzahl, durchwegs die Anspruchsvolleren[141], entfernt sich von einem Lösungsansatz[142], etwa proportional zum erhobenen Anspruch[143]. Zum Beispiel geht Landau[144] in seinem Standardwerk über Primzahlen von dem Primzahlsatz mit der Formel aus

---

[140] Landau I 3 ff; Mund (1943) 1 f; Pieper 14 ff.

[141] Arslanagić/Janous 2: „Die Beweise sind auch zum Großteil ‚elementar' in dem Sinn, dass die *Kenntnis einfacher Aussagen* über die Teilbarkeit, über Reihen bzw. über topologische Räume zu ihrem Verständnis ausreicht. Inwieweit sie besonders elegant (in der Diktion von *Erdös*. Vgl. [1]) sind, überlasse ich dem Geschmack des Lesers."

[142] Landau I 3 f: Geht von der Richtigkeit des Beweises von Euklid aus, wonach es unendlich viele Primzahlen p_n gibt, weil $p_n! + 1$ immer eine Primzahl sei (vgl Arslanagić/Janous 1 f; Kracher 19 f; Wikipedia, Primorial, In: Wikipedia, Versions-ID: 54990259, 6. Januar 2009, < URL >); Fischer, D. 127 ff; vgl Pieper 23: …ist nachzulesen, dass der nämliche (An)Satz und Beweis von Euklid irrig sind: (0 + 1=1); (1 + 1 = 2); 2 + 1 = 3; 2·3 + 1 = 7; 2·3·5 + 1 = 31; 2·3·5·7 + 1 = 211; 2·3·5·7·11 + 1 = 2311; 2·3·5·7·11·13 + 1 = 30031; 2·3·5·7·11·13·17 + 1 = 510511, …usw. Demnach sind zwar 3, 7, 31, 211, 2311, wieder Primzahlen, jedoch ist 30031 = 59·509 und somit keine Primzahl. Damit ist nicht nur der Beweis und der Satz von Euklid, wonach es unendlich viele Primzahlen gibt, fraglich, sondern auch alle Arbeiten, die – wie Landau – von dieser Voraussetzung ausgehen, vorweg fragmentiert.

[143] Landau I 36; Stäckel/Weinreich 3 ff; Arslanagić/Janous 1 f: „Für manche mathematische Aussagen gibt es ‚über die Jahre' eine Vielzahl von Beweisen – es gehörte gewissermaßen ‚zum guten Ton' für bestimmte Sätze einen neuen Beweis anzugeben.

Beispiele dafür sind etwa:

- *Der pythagoreische Lehrsatz*.

[…]

- *Der Fundamentalsatz der Algebra.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

die er als „das wichtigste Theorem der Primzahltheorie" bezeichnet, wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen ≤ x und ln x den natürlichen Logarithmus von x bezeichnet[145]. Seine Formel, deren Abhandlung er zwei dicke Bänder widmet, also die umfassendste, auf jeden Fall die ausführlichste, deutschspra-

---

Auch für ihn wurden seit *Gauß*ens erstem Beweis im Jahr 1799 – er findet sich in seiner Doktorarbeit – unüberschaubar viele weitere Beweiswege erdacht.

Auch der im Titel erwähnte Satz, den erstmals Euklid in seinen Elementen formuliert und nachgewiesen hat, zählt zu dieser Kategorie. (Selbst heute noch werden für alle diese Resultate in diversen Zeitschriften zum Teil überraschende neue Beweise veröffentlicht.)

Welches Interesse besteht eigentlich daran, eine altbekannte und elementare Tatsache immer wieder neu zu bestätigen? Wie wir beim Satz Euklid sehen werden, sind viele der Beweise das Ergebnis von weitergehenden Überlegungen, z. B. über die Verteilung der Primzahlen: Der neue Beweis ist dann die Illustration einer neuen Idee oder eines neuen Konzepts einer schwierigen allgemeineren Theorie. Beim Satz von Euklid kommen jedoch auch noch kulturelle und ästhetische Motive hinzu, wie *Ribenboim* ([13], S. 3) bemerkt: ‚I shall give several proofs of this theorem […] by famous, but also forgotten, mathematicians. Some proofs suggest interesting developments; other proofs are just clever or curious.' Solche Motive spielen gerade bei elementaren Resultaten eine große Rolle.

[…]

In dieser Arbeit sollen einige solcher Nachweise für den Satz vorgestellt werden, den bereits *Euklid* in seinen *Elementen* formuliert und bewiesen hat (und den Immanuel *Kant* in seiner *Kritik der reinen Vernunft* als ein Meisterwerk des menschlichen Geistes bezeichnete). Sie verlaufen zumeist indirekt, d. h. sie nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen und leiten daraus einen Widerspruch her."

[144] Landau I S. VII.

[145] Prachar 3; vgl Rohringer 42 f; Remmert/Ullrich 73; Bartholomé/Rung/Kern 83 f; Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 8; Padberg 80.

chige Darstellung zum Thema, geht von der Richtigkeit des Euklidschen Beweises der Unendlichkeit von Primzahlen aus[146], der aber als irrig[147] bzw. zumindest als fraglich nachgewiesen wurde[148]. Im übrigen besagt die Formel, dass die Anzahl der Primzahlen durch ein Verhältnis der Potenz von e (d. h. e^x) sei[149], also mit endlichen Größen ausgeführt werde. Die ursprüngliche Formel stammt von Legendre[150]

---

[146] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f.

[147] Schwarz, Wolfgang (1969) 135: „Euklids Beweis der Unendlichkeit von ***P*** ist – von wenigen Spezialfällen abgesehen – nicht geeignet, die Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Folgen zu zeigen."

[148] Schwarz, Werner 44 ff, 86 ff; Pieper 23; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >: „Je größere Zahlen man betrachtet, desto weniger Primzahlen findet man dort. Obwohl unendlich viele Primzahlen existieren, ist es ungewiss, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Zwar veröffentlichten die Mathematiker Dan Goldston und Cem Yıldırım 2003 einen Beweis, mit dem sie zeigen wollten, dass es in der unendlichen Folge der Primzahlen immer wieder kleine Abstände zwischen zwei aufeinander folgenden Primzahlen gibt, doch Andrew Granville fand noch im selben Jahr einen Fehler in dem 25-seitigen Beweis. Im Mai 2005 konnten Goldston und Yıldırım et al. eine Korrektur vorlegen. Diese wurde von den damaligen Fehlerfindern überprüft und als korrekt gewertet. Der neue, nun saubere Beweis zeigt zudem eine neue Methode auf, die es ermöglichen sollte, den endgültigen Beweis zur Anzahl der Primzahlzwillinge abzuschließen und gilt daher als großer Durchbruch.

Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen ist divergent, jedoch hat Viggo Brun im Jahr 1919 bewiesen, dass die Summe der Kehrwerte der Primzahlzwillinge konvergiert. Aus dieser Tatsache kann man nicht schließen, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Der Grenzwert der Summe wird Brunsche Konstante genannt und beträgt nach der neuesten Schätzung von 2002 etwa 1,902160583104."

[149] Trost 62 ff.

[150] Kracher 43 f, Simmel 7.

$$\pi(n) = \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1 + \left[\frac{n}{1}\right] - \sum_{P_i \leq \sqrt{n}} \left[\frac{n}{P_i}\right] + \sum_{\substack{P_i, P_j, P_k \leq \sqrt{n} \\ P_i \neq P_j}} \left[\frac{n}{P_i P_j}\right] - \sum_{\substack{P_i, P_j \leq \sqrt{n} \\ P_i \neq P_j \neq P_k}} \left[\frac{n}{P_i P_j P_k}\right] + \ldots$$

Man sieht sofort, dass die Formel für großen sehr aufwendig wird, „da sehr viele Summen zu berechnen sind. Diese Schwierigkeiten lassen durch theoretische Überlegungen verringern. (zB Formel von Meissel) Da die Formel $\pi(n)$ jedoch rekursiv angibt, dh unter Rückgriff auf $\pi\left(\sqrt{n}\right)$, lässt sich daraus das allgemeine Verhalten der Funktion $\pi(n)$, insbesonder für n nach unendlich nicht ableiten."[151] Es hatte also den Anschein, als würde das Unendlichkeitspostulat zu kurz greifen[152].

Nachstehender Versuch verglich die Lösungsmodelle[153] und fand, dass das Wesen der Mathematik in der Vereinfachung liege[154], die oft und gerne als Ergebnis bezeichnet wird, und bescheidet sich mit der denkbar einfachsten Lösung[155].

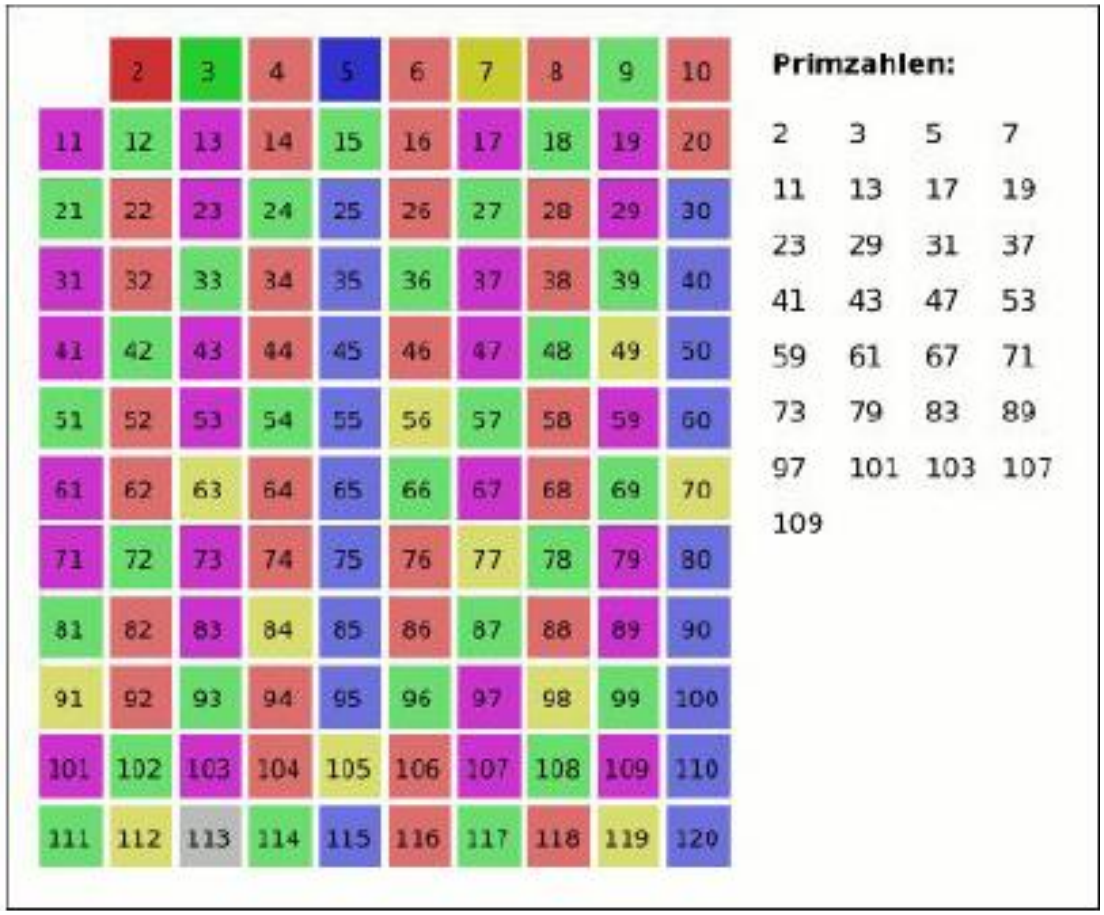
> „Bereits im Altertum war eine Methode bekannt, um sämtliche Primzahlen unterhalb einer vorgegebenen Schranke *n* zu bestimmen. Sie wird von Nikomachos erläutert und stammt von Eratosthenes (276-ca. 194 v. Chr.). Interessant ist, dass sie ursprünglich anscheinend genau dazu gedacht war, um allgemeiner zu einer Zahl *m* alle relativen primen ≤ n zu finden. Ist etwa m = 15 und n = 20, so schreibt man sämtliche Zahlen bis 20 auf, und streicht dann wegen 15 = 3·5 alle Vielfachen von 3 bzw. 5 weg. […] Ganz ähnlich geht man vor, will man sämtliche

[151] Kracher 44; vgl Schwarz, Wolfgang (1969) 135.
[152] Landau I S. VII, 3 ff; Ehrenfels 46.
[153] Landau I 3 ff.
[154] Stäckel/Weinreich 3 ff.
[155] Vgl Christof 4 f.

Primzahlen p ≤ n bestimmen. Man schreibt alle Zahlen größer 1 bis n auf und streicht alle zusammengesetzten."[156]

Das Sieb des Eratosthenes[157] geht immer von einer endlichen Anzahl von Zahlen aus, um in diesem begrenzten Intervall die Primzahlen auszusieben[158]. Das Vorgehen ist im Prinzip denkbar einfach[159].

[156] Kowol 42 f.
[157] Reiss/Schmieder 102 ff; Bornstein u. a. 370; Paschinger 3 f; Pittner 98 f; Trost 9 f; Gonzalez, Zahlentheorie, Arithmetik und Algebra, in: < URL > 6; Wimmer 2; Lackner 75; Gaubitzer 26 f.
[158] Vgl Kracher 43 f; Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.
[159] Stäckel/Weinreich 3& ff.



Sieb des Eratosthenes[160]

Schon Eratosthenes[161] bemerkte, dass sobald die Menge der Primzahlen als endlich angenommen werde, kann innerhalb dieser endlichen Zahl die Gruppe der Primzahlen durch Selektion angenähert

[160] Gonzalez, Zahlentheorie, Arithmetik und Algebra, in: < URL > 6.
[161] Simmel 6 ff.

und in abzählbar endlichen Mengen auch näher bestimmt werden[162]. Das hat leider wenig daran geändert, dass die Deduktion[163] von einer größeren Zahl der Mathematiker gering geschätzt wurde, und nur die Intuition als der höheren Mathematik genügende Methode anerkannt, um nicht zu sagen – zugelassen – wurde[164].

Mit zunehmendem Abstand zwischen Theorie und Praxis wächst auch die Distanz zwischen den Methoden Deduktion[165] und Induktion[166], und zwar auf Kosten der Synthese, die beide als integrierende Bestandteile voraussetzte[167]. Die Anhänger der einen oder andere Seite blenden zwar die jeweils andere Methode ein, aber gewöhnlich nur, um sich von den Unzulänglichkeiten der jeweils anderen Methode zu distanzieren, oder wird schon nonverbal eine Distanz so vorausgesetzt, dass sich ein Spagat dazwischen sich nicht – mehr – rechnen würde. Entsprechend kurz kommt dann auf beiden Seiten die Synthese. Auch wenn man die praktischen Vorteile der Vorgehensweise außer Streit gestellt werden, sich jeweils im Konkreten auf eine Methode zu beschränken, so setzt aber jeder der beiden Methoden implizit die andere als integrierenden Bestandteil so voraus, dass eine Synthese ohne die jeweils andere eine halbe Sache sei[168].

Die Erläuterungen zu den Tabellen im nachstehend zitierten Sieb sind nach vorn verschöben worden, aber das Zitat ist ansonsten so weit wörtlich[169].

---

[162] Kowol 42 ff.
[163] Russell 6, 162 ff, 214.
[164] Bergholz, Induktion und Deduktion, in: < URL >.
[165] Russell 6, 162 ff, 214.
[166] Russell 10.
[167] Bergholz, Induktion und Deduktion, in: < URL >; vgl Remmert/Ullrich 18 ff.
[168] Russell 217 ff.
[169] Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < ÛRL >.

„Sieb des Eratosthenes [*] (nicht Erathostenes):

Dieses funktioniert nach folgendem Prinzip:

Schreibt man eine Liste aller natürlichen Zahlen auf, die man überprüfen will, dann sieht das nachher z. B. so aus:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Nun streicht man als erstes die 1 weg, da es sich bei 1 um keine Primzahl handelt.
b) Es folgt die 2. 2 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 2 als Primzahl.
c) Wir streichen nun alle durch 2 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. (Sie hätten jeweils die Teiler 1,2 und sich selbst)
d) Die 3 ist nun die nächste ungestrichene Zahl! Wir markieren 3 als Primzahl.
e) Wir streichen nun alle durch 3 teilbaren Zahlen, weil diese ebenfalls keine Primzahlen mehr sein können.
f) Nun wiederholen wir Schritt d) und e) bis alle Zahlen entweder als Primzahlen markiert, bzw. als Nichtprimzahlen durchgestrichen sind. **Achtung:** Diese Schritte müssen nur bis zur Zahl durchgeführt werden, die größer oder gleich der

Wurzel des zu überprüfenden Bereich ist. z. B. 10 bei 100, 32 bei 1000, da $10 \cdot 10 = 100$ bzw. $32 \cdot 32 = 1024 > 1000$

Man erhält in dem oberen Beispiel nun eine Liste von Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Komplexe Darstellung:

Schreibt man eine Liste aller natürlichen Zahlen auf, die man überprüfen will. Hier im Beispiel bis 660.

- Es werden nur ungestrichene Zahlen beachtet.
- **Achtung:** Diese Schritte müssen nur bis zur Zahl durchgeführt werden, die größer oder gleich der Wurzel des zu überprüfenden Bereich ist. z. B. 10 bei 100, 32 bei 1000, da $10 \cdot 10 = 100$ bzw. $32 \cdot 32 = 1024 > 1000$. Hier bei 660 bis **26**. Nun streicht man als erstes die 1 weg, da es sich bei 1 um keine Primzahl handelt.
- Es folgt die 2. Die Zahl 2 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 2 als Primzahl und streichen nun alle durch 2 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 2. Sie liegen alle auf Geraden.
- Es folgt die 3. Die Zahl 3 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 3 als Primzahl und streichen nun alle durch 3 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 3. Sie liegen alle auf Geraden.
- Es folgt die 5. Die Zahl 5 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 5 als Primzahl und streichen nun alle durch 5 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 5. Sie liegen alle auf Geraden.
- Es folgt die 7. Die Zahl 7 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 7 als Primzahl und streichen nun alle durch 7 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 7. Sie liegen alle auf Geraden.
- Es folgt die 11. Die Zahl 11 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 11 als Primzahl und streichen nun alle durch 11 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 11. Sie liegen alle auf Geraden.

- Es folgt die 13. Die Zahl 13 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 13 als Primzahl und streichen nun alle durch 13 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 13. Sie liegen alle auf Geraden.
- Es folgt die 17. Die Zahl 17 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 17 als Primzahl und streichen nun alle durch 17 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 17. Sie liegen alle auf Geraden.
- Es folgt die 19. Die Zahl 19 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 19 als Primzahl und streichen nun alle durch 19 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 19. Sie liegen alle auf Geraden.
- Es folgt die 23. Die Zahl 23 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb Primzahl. Wir markieren 23 als Primzahl und streichen nun alle durch 23 teilbaren Zahlen, weil diese nicht Primzahlen sein können. Sie hätten jeweils den Teiler 23. Sie liegen alle auf Geraden.
- Die Zahlen 24, 25 und 26 sind schon gestrichen. Jetzt ist das Ziel erreicht. Alle noch nicht gestrichenen Zahlen sind Primzahlen (siehe oben).

Wir markieren die restlichen Zahlen als Primzahlen.

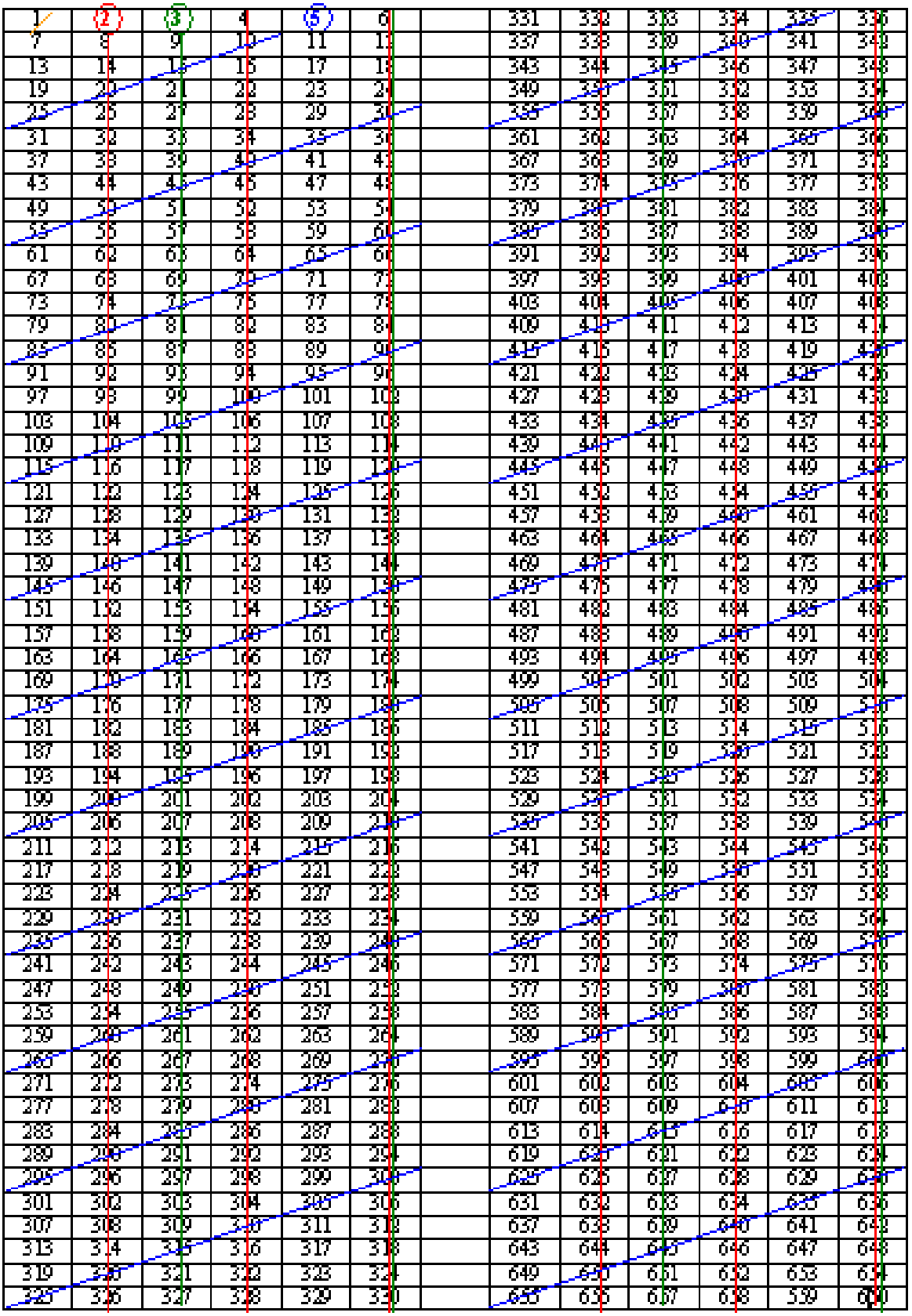
---

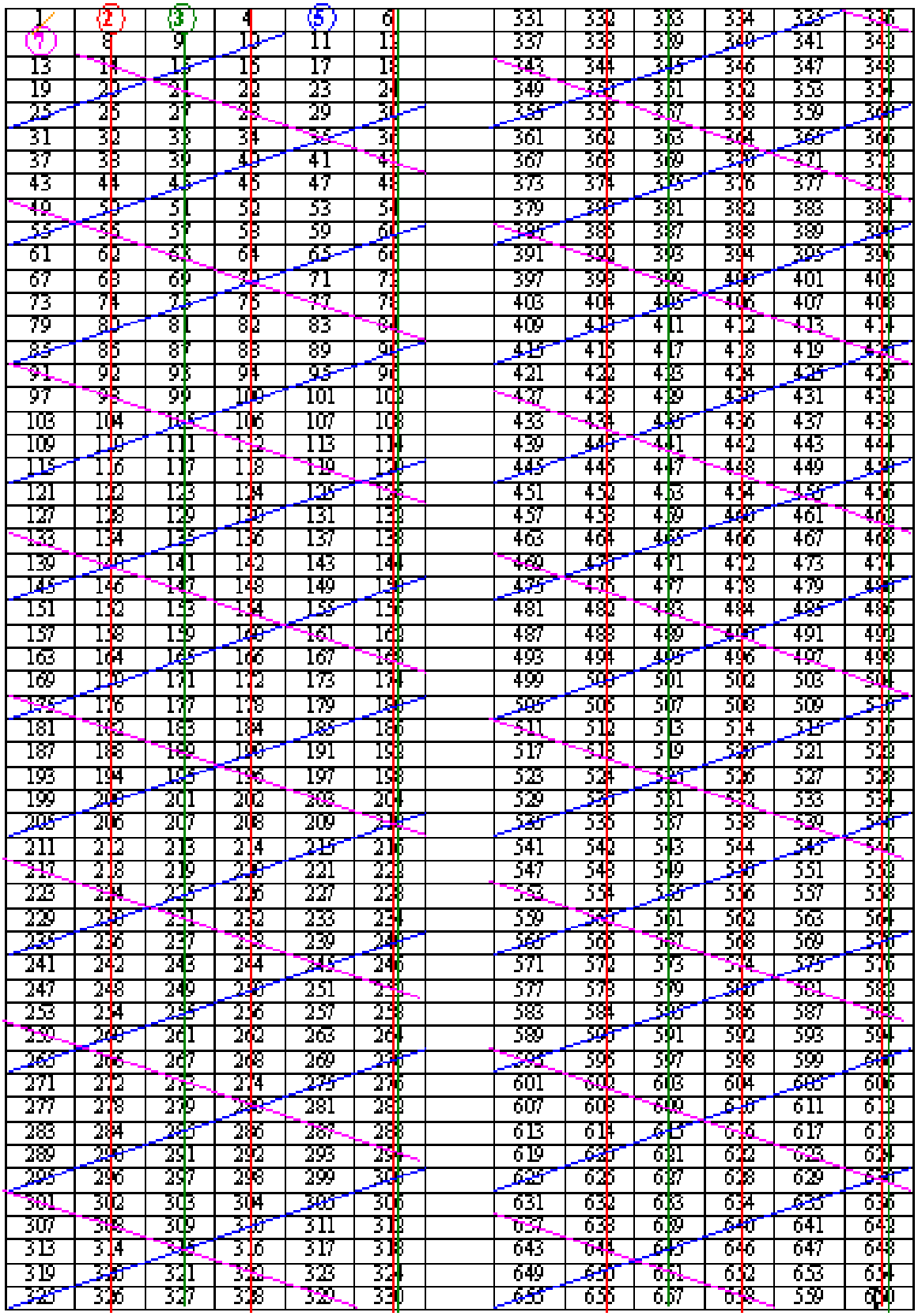
* griechischer Gelehrter und Dichter aus Kyrene, * um 275 v. Chr., † um 195 v. Chr.; Leiter der Bibliothek von Alexandria, bezeichnete sich als Erster als Philologe; er berechnete annähernd richtig den Umfang der Erdkugel aus den Sonnenhöhen an 2 Punkten des gleichen Meridians und entwarf eine Erdkarte; erzählende Gedichte: "Hermes", "Erigone". (Quelle: http://www.wissen.de/)[170]

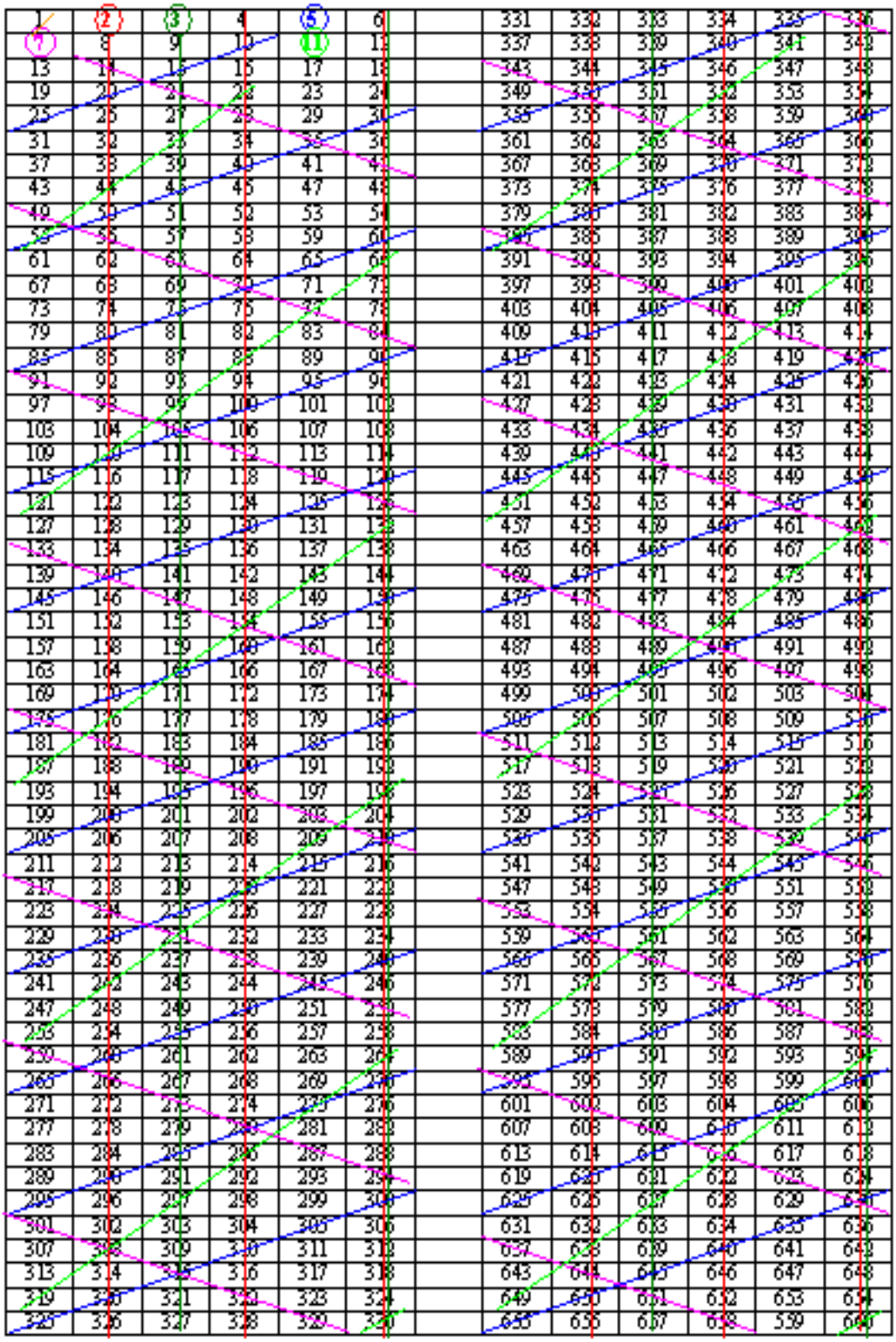
---

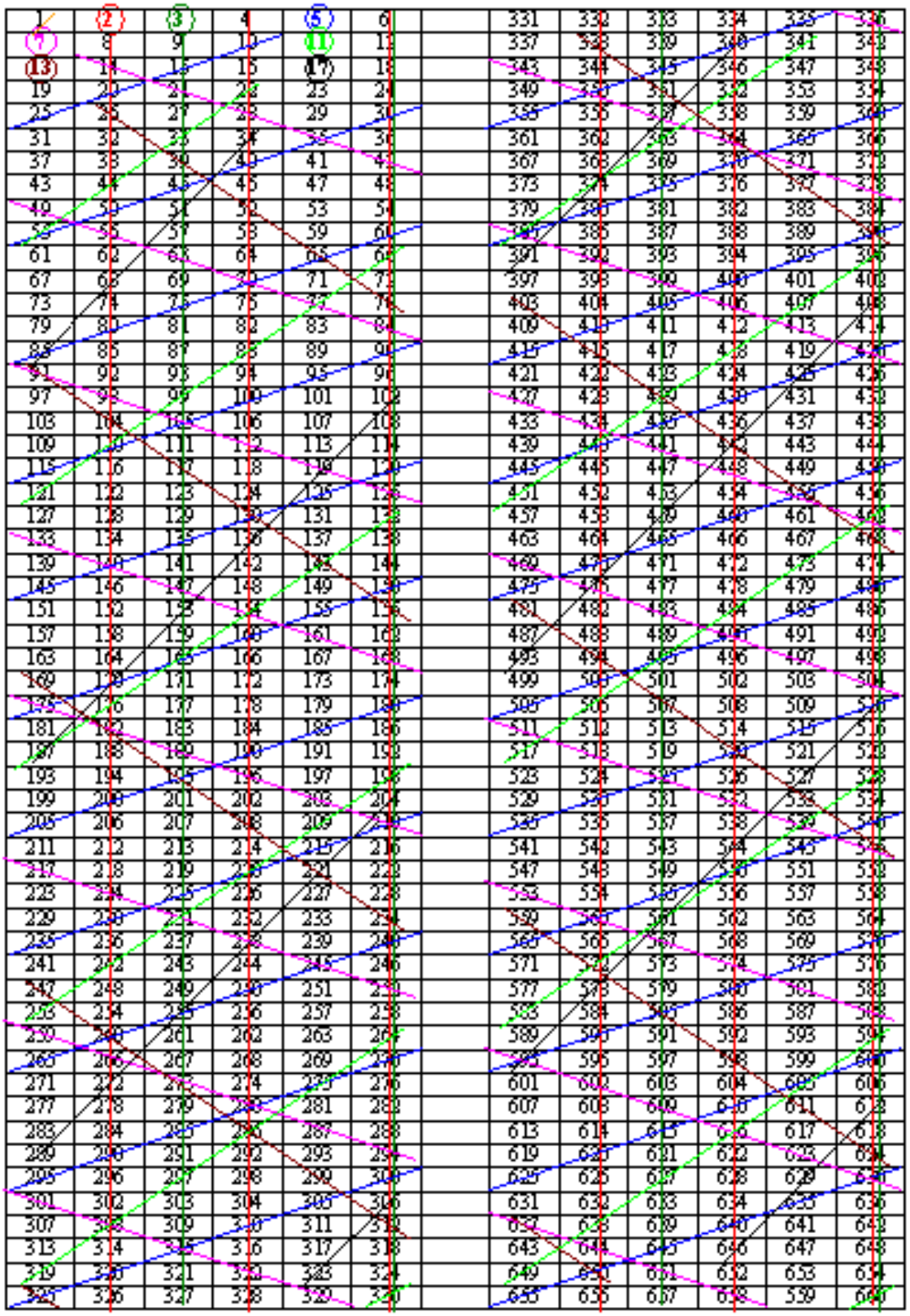
[170] Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < http://primzahlen.de/index.htm > 16. 12. 2008.

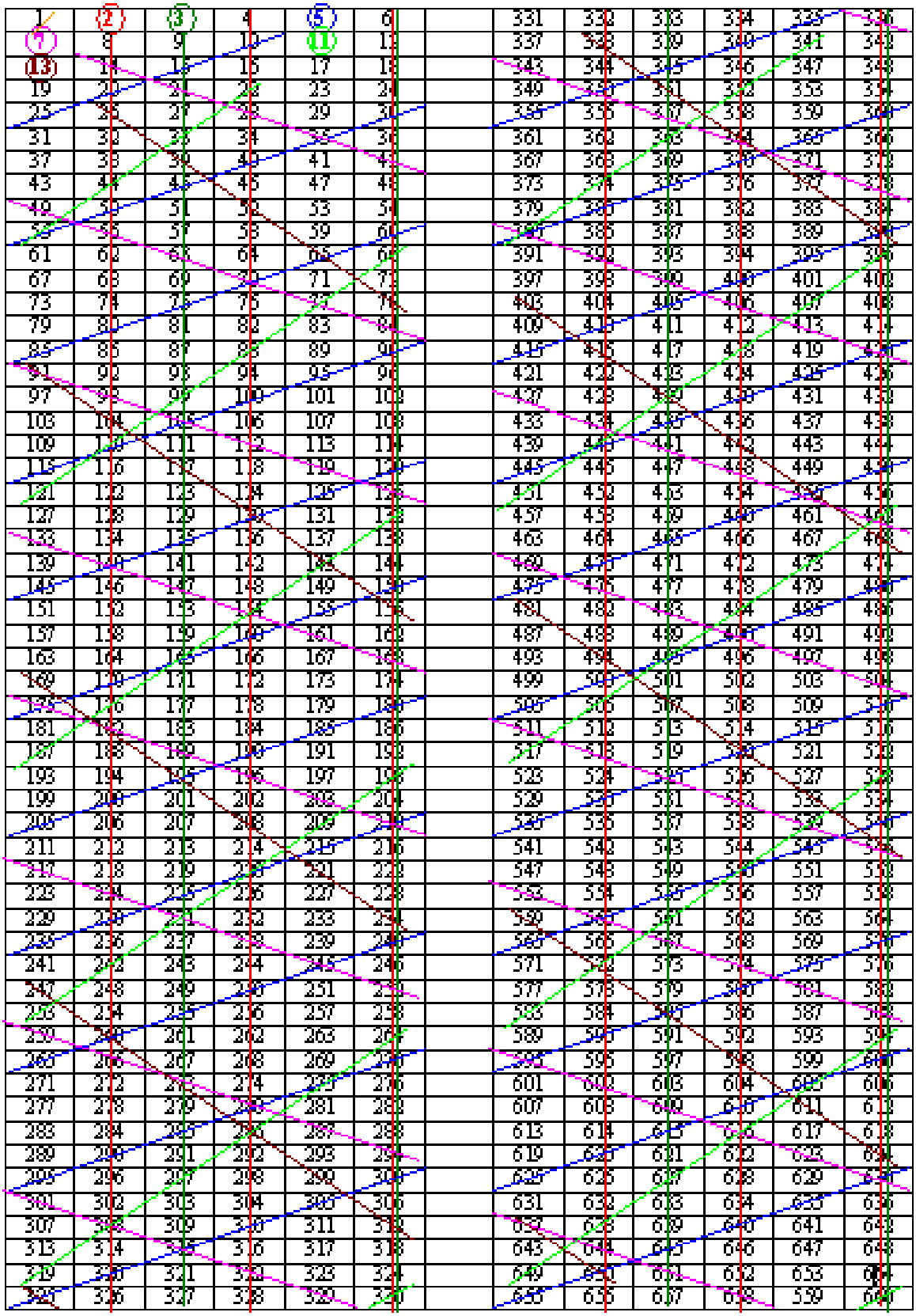
1	2	3	4	5	6		331	332	333	334	335	336
7	8	9	10	11	12		337	338	339	340	341	342
13	14	15	16	17	18		343	344	345	346	347	348
19	20	21	22	23	24		349	350	351	352	353	354
25	26	27	28	29	30		355	356	357	358	359	360
31	32	33	34	35	36		361	362	363	364	365	366
37	38	39	40	41	42		367	368	369	370	371	372
43	44	45	46	47	48		373	374	375	376	377	378
49	50	51	52	53	54		379	380	381	382	383	384
55	56	57	58	59	60		385	386	387	388	389	390
61	62	63	64	65	66		391	392	393	394	395	396
67	68	69	70	71	72		397	398	399	400	401	402
73	74	75	76	77	78		403	404	405	406	407	408
79	80	81	82	83	84		409	410	411	412	413	414
85	86	87	88	89	90		415	416	417	418	419	420
91	92	93	94	95	96		421	422	423	424	425	426
97	98	99	100	101	102		427	428	429	430	431	432
103	104	105	106	107	108		433	434	435	436	437	438
109	110	111	112	113	114		439	440	441	442	443	444
115	116	117	118	119	120		445	446	447	448	449	450
121	122	123	124	125	126		451	452	453	454	455	456
127	128	129	130	131	132		457	458	459	460	461	462
133	134	135	136	137	138		463	464	465	466	467	468
139	140	141	142	143	144		469	470	471	472	473	474
145	146	147	148	149	150		475	476	477	478	479	480
151	152	153	154	155	156		481	482	483	484	485	486
157	158	159	160	161	162		487	488	489	490	491	492
163	164	165	166	167	168		493	494	495	496	497	498
169	170	171	172	173	174		499	500	501	502	503	504
175	176	177	178	179	180		505	506	507	508	509	510
181	182	183	184	185	186		511	512	513	514	515	516
187	188	189	190	191	192		517	518	519	520	521	522
193	194	195	196	197	198		523	524	525	526	527	528
199	200	201	202	203	204		529	530	531	532	533	534
205	206	207	208	209	210		535	536	537	538	539	540
211	212	213	214	215	216		541	542	543	544	545	546
217	218	219	220	221	222		547	548	549	550	551	552
223	224	225	226	227	228		553	554	555	556	557	558
229	230	231	232	233	234		559	560	561	562	563	564
235	236	237	238	239	240		565	566	567	568	569	570
241	242	243	244	245	246		571	572	573	574	575	576
247	248	249	250	251	252		577	578	579	580	581	582
253	254	255	256	257	258		583	584	585	586	587	588
259	260	261	262	263	264		589	590	591	592	593	594
265	266	267	268	269	270		595	596	597	598	599	600
271	272	273	274	275	276		601	602	603	604	605	606
277	278	279	280	281	282		607	608	609	610	611	612
283	284	285	286	287	288		613	614	615	616	617	618
289	290	291	292	293	294		619	620	621	622	623	624
295	296	297	298	299	300		625	626	627	628	629	630
301	302	303	304	305	306		631	632	633	634	635	636
307	308	309	310	311	312		637	638	639	640	641	642
313	314	315	316	317	318		643	644	645	646	647	648
319	320	321	322	323	324		649	650	651	652	653	654
325	326	327	328	329	330		655	656	657	658	659	660

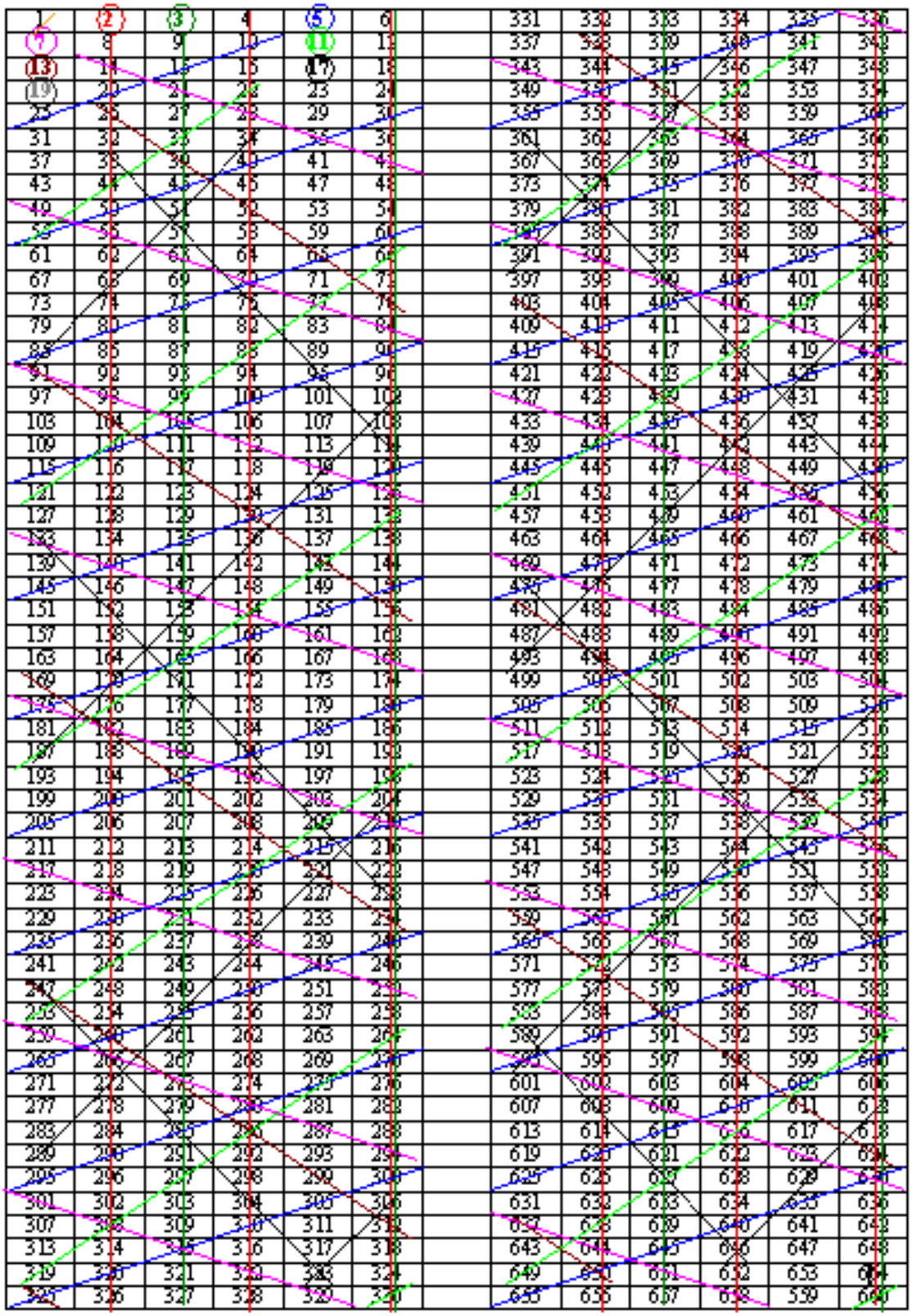


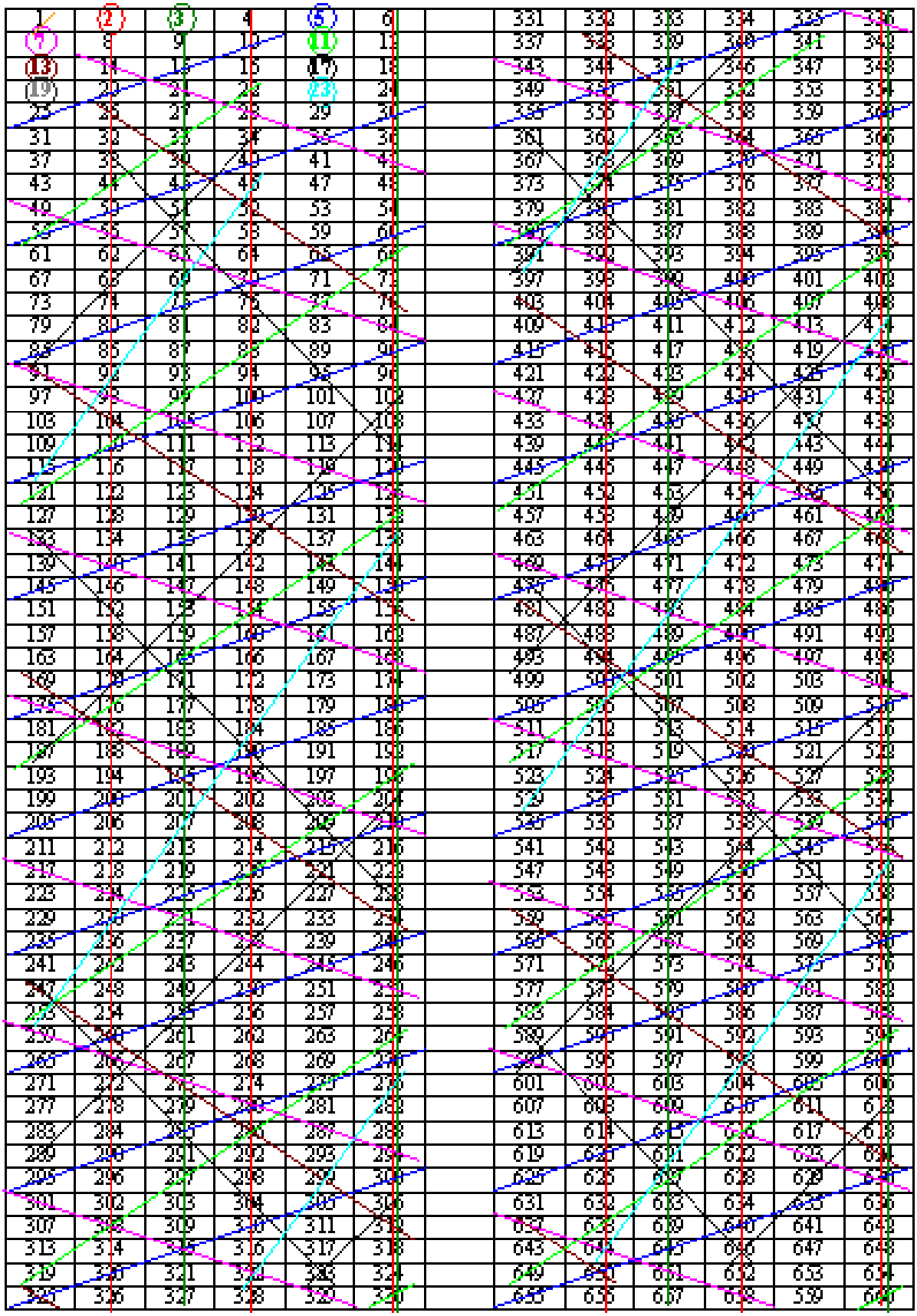












* (Quelle: http://www.wissen.de/)“[171]

Es ist nun gelungen, die allgemeine Formel für die Primzahlen zu finden, auch wenn beide Seiten bzw. beide Methoden das in dieser Form verneinen. Die Formel

$$p = \sqrt{24 \cdot n + 1}$$

beschreibt zwar Primzahlen exakt so, wie sie das im Lichte der mathematischen Forschung nicht hätte dürfen, und verdankt ihren Dornröschenschlaf einerseits dem Argwohn der konkurrierenden Denkrichtungen, und andererseits der mangelnden Aufmerksamkeit Mathematikers[172], der die missverständliche wenn nicht irreführende Erklärung dazu abgegeben habe: „Dabei kommen nur rationale Werte der Wurzel in Betracht; doch werden unter diesen nicht ausschließlich Primzahlen, sondern auch zusammengesetzte Zahlen enthalten sein“, so als ob die Formel zu kurz greifen würde.

Tatsächlich kommen für n auch solche Werte vor, die keine Primzahl ergeben, doch der Punkt ist, dass diese keine Quadrate sind. Wenn man also die Formel mit dem Zusatz ergänzt, wie zuvor der zitierte Mathematiker das in der Ableitung der Formel aufzeigte, dass es sich bei den Primzahlen, und nur bei den Primzahlen, um Quadrate handelt, und mit dem nämliche Quadrat das nämliche Primzahlkriterium gefunden wäre, so wäre die Formel bereits vom zitierten Autor als solche entdeckt worden, was sie ist, nämlich die vermisste Primzahlformel. Stattdessen übersah der Finder die Bedeutung der Formel, wonach die Quadratzahlen immer die Primzahlen ergeben, während andere n in der Folge keine Primzahlen sind, also auf die ganzzahligen Quadrate beschränkt die

[171] Elvenich, Michael: Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < http://primzahlen.de/index.htm > 16. 12. 2008.
[172] Vgl Waldal 81.

Primzahlformel gefunden ist, und er ging zurück auf die allgemeinere Form von Euler zurück als die vermeintlich bessere Lösung: z = λ·n + α, oder etwas von ihm verschönert Z = (λ·n + α), und gibt diese Formel als die Lösung an[173], die natürlich so nicht die Formel ist, wie nichtlineare Form $p = \sqrt{24 \cdot n + 1}$, die er irrig als mangelhafter Zwischenschritt ansieht[174]. Man kann also das Ergebnis

[173] Vgl Waldal 82.

[174] Vgl Waldal 86: In einem offenbar nachträglich hinzugefügten englischsprachigen Zusammenfassung gibt er zwar etwas hervorgehoben, aber wiederum wahlweise unter drei Varianten so an, dass er Rekurs auf die Formel von Euler und Dirichlet nimmt, die er am Schluss als die eigentliche Lösung angibt, und die eigentliche Formel als mangelhaften Zwischenschritt bzw. eine Art Zwischenrechnung. Tatsache ist, dass der zitierte Autor die auf S. 81 gemachte Einschränkung, wonach das nicht die Primzahlformel wäre, weil sie andere Ergebnisse auch ergebe, nicht aufhebt, sondern neuerlich bestätigt: „The analysis of the experimental results revals that the prime numbers consist of two separate groups: the ‚fundamental' prime numbers (1), 2, 3 and the ‚ordinary' prime numbers being of the form 6n ∓ 1. Hence every prime number is included in der simple form

$$P = (1), 2, 3, 6n \mp 1.$$

Another simple, though non-linear form (excepting 2, 3) reads

$$p = \sqrt{24 \cdot n + 1} \quad (n = integer).$$

Simple forms giving an even better concentration of prime Numbers, and of the prime twins ar given.

Forther the form

$$\lambda \cdot n + \alpha$$

representing any integer will give a versatile means of combining arithmetic an algebraic operation."

vorwegnehmen, das die Formel auf die ganzzahligen Quadrate beschränkt, $p^2 = 24n + 1$, die vermisste Primzahlformel schlechthin sei[175]. Allerdings kann und soll dem zitierten Autor zugutegehalten werden, dass sich mit den Primzahlzwillingen, mit denen er sich ebendort analog auseinandersetzt, sich eine zweite, scheinbar vielversprechende Lösung anbahnt. Es ist also so weit richtig, dass diese nichtlineare Lösung definitiv nicht die einzige, und auch nicht unbedingt die beste sein müsste, zumindest der Optik nach zu urteilen. Auch muss dem Autor zugute gehalten werden, dass sich mit den Quadraten Euler zuvor kompetent auseinandergesetzt hatte, den der Autor zitiert, und jener (Euler) bestreite, dass die Primzahlformel überhaupt lösbar wäre[176]: «Es gibt einige Geheimnisse, die der menschliche Geist niemals durchdringen wird. Wir brauchen nur einen Blick auf die Tabelle der Primzahlen zu werfen, und wir sollten erkennen, dass es dort weder Ordnung noch Regeln gibt.» Schrieb Euler 1751 und zwar justament zum Thema der von ihm bahnbrechend bewerkstelligten Auseinandersetzung mit den nämlichen quadratischen Formen[177].

Der zitierte Autor übergeht also die Formel $p = \sqrt{24 \cdot n + 1}$ neuerlich als die eigentliche Lösung, denn er stellt diese neben die Form P = (1), 2, 3, $6n \mp 1$ als gleichwertig, bzw. als eine Variante, aber in der Formel $6n \mp 1$ sind bekanntlich nicht nur Primzahlen enthalten, sondern auch andere. Und er platziert formal als Ergebnis einer Berechnung unten die Formel $\lambda \cdot n + \alpha$, auf die er nur dann zurückgreifen kann, wenn er – irrig – die richtige Formel als die Lösung verwirft, und als eine Variante von $6n \pm 1$ ansieht. Die Lösung lautet, dass alle Ergebnisse mit natürlichen Zahlen nur Primzahlen ergeben, auch wenn es daneben andere Resultate geben könne, die eiben keine ganzen Zahlen sind. Mit dieser Einschränkung, dass nämlich das Ergebnis ganzzahlig sein muss, ist die Primzahlformel vollständig.

[175] Waldal 58 ff, 81.

[176] Sautoy 63.

[177] Sautoy 63 f.

Die Folge 6n ± 1

Im Gegensatz zu der hier angestrebten Einfachheit[178] ergibt sich die Vielschichtigkeit der alternativen Fragestellung aus der abweichenden Legaldefinition[179] der Primzahlen, die dieser – gegen unendlich[180] konvergierenden Kompliziertheit – durch die Definition erreicht, die auch Zahlen berücksichtigt, die aus der Reihe tanzen, bzw. keine eigentlichen Primzahlen sind[181].

Bereits in den Anfängen wurde bemerkt, dass die Primzahlen die Form 6n + 1 und/oder 6n – 1 haben[182]. Es ist aber nicht das und so als Beschreibung gewählt worden, sondern die Definition gegeben, dass eine Primzahl durch sich und durch 1 teilbar sei[183], womit die ersten Glieder 2, 3 und 5, aus der Reihe tanzen[184], weil somit auch die Zahlen 2 und 3 sowie 5 dazu gerechnet werden mussten[185], die ebenfalls nicht teilbar, wenngleich keine Primzahlen im Sinne der des 6er-Zyklus sind[186].

---

[178] Christof 4; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; Mund (1934) 1 f.
[179] Reiss/Schmieder 102 ff; Kowol 9 f.
[180] Meschkowski 11 ff.
[181] Mund (1934) 1 f.
[182] Christof 4; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[183] Kowol 9 f.
[184] Waldal 82: „Die vorstehenden Ausführungen ergeben, dass die kleinsten Primzahlen (1, 2, 3) mit den übrigen (d. h. ≧ 5) nicht wesensgleich sind, sondern sich davon prinzipiell unterschieden. Die Zweckmäßigkeit dieser Auftteilung wird bestätigt durch die dabei erreichten Vereinfachungen in der arithmetischen Beziehungen."
[185] Reiss/Schmieder 102 ff; Pittner 98 f; Pieper 19 n 1): „Das Verfahren heißt ‚Sieb des ERATOSTHENES' nach dem kyrenäischen Mathematiker und Geographen ERATOSTHENES (275 ? bis 194 ? v. u. Z.), der wohl als erster auf diese Art und Wiese alle Primzahlen ≤ n aussiebte."

Definiert man jedoch die Primzahlen als Glieder der Reihe 6n + 1 in der Form[187], dass sich die Reihe auf der Zahlengerade mit den negativen Zahlen fortsetzt[188], kommt man mit einer einzigen Formel aus[189].

„Mit Ausnahme des Primzahlzwillings (3, 5) liegt zwischen den beiden Primzahlen eines Primzahlzwillings immer eine durch 6 teilbare Zahl. Jede ganze Zahl lässt sich nämlich in der Form $6n - 2$, $6n - 1$, $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$ oder $6n + 3$ darstellen, wobei

---

[186] Kracher 43 f; vgl Mund (1943) 2; Mund (1934) 1: „Für die Betrachtung der Primzahlwelt scheiden aus der Gesamtzahl alle durch 2 und 3 teilbare Zahlen aus."

[187] Christof 4; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; Mund (1934) 1 f.

[188] Mund (1943) 1 f: „Sämtliche Zahlen lassen sich jedoch in drei voneinander verschiedene Gruppen einteilen.
Erstens, in eine Gruppe von Zahlen, welche durch 2 oder 3 teilbar sind, sie lassen sich in eine A-Reihe zusammenfassen, welche steigend das Vielfache von 2 x 3 = 6, 12, 18, 24, 30 darstellt, zwischen denen die zugehörigen Zahlen 2, 3, 4 – 8, 9, 10, – 14, 15, 16 u. s. f. Platz finden. Siehe nachstehende Figur. Dann,
Zweitens, kann links neben dieser A-Reihe eine B-Reihe gedacht werden, welche in Abständen von 6 die gleichen Größen minus 1 zeigt, also 5, 11, 17, 23, 29, u. s. f. und,
drittens, rechts neben der A-Reihe, eine C-Reihe, welche die gleichen Größen plus 1 zeigt, also 7, 13, 19, 25, 31 u. s. f. Siehe folgende Seite.
So befinden sich in der A-Reihe alle Zahlen, die der Anwartschaft auf den Rang einer Primzahl entbehren und in den B- und C-Reihen diejenigen Zahlen, zu denen auch die Primzahlen gehören – gehören müssen, um welche es sich hier handelt."

[189] Mund (1943) 2: „Die Frage, welche Zahlen der B- und C-Reihe sind dann unteilbare Primzahlen, (P. z.), wo gegenüber den Zahlen der A-Reihe alle Zahlen der B- und C-Reihe (zu Anfang) unteilbar sind, führt dann zur Feststellung der unterschiedlichen Wirkung zwischen den Zahlen der drei Reihen wie folgt:
Multiplikationen der Zahlen der A-Reihe untereinander bleiben in der A-Reihe; Multiplikationen der Zahlen der A-Reihe mit denen der B- oder C-Reihe haben das Ergebnis ebenfalls in der A-Reihe; somit verlieren bei diesem Vorgang die Zahlen der B-Reihen ihre Eigenheiten.
Beide Reihen unter sich, ‚B und C' der ‚C und B' ergeben B-Zahlen; dagegen entstehen aus Zahlen der B-Reihe unter sich, z. B. 11^2, und aus Zahlen der C-Reihe unter sich, z. B. $7 \cdot 13$ allemal Zahlen der C-Reihe."

n eine ganze Zahl ist. Zahlen der Form 6*n* − 2, 6*n* und 6*n* + 2 sind durch 2 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Zwei keine Primzahlen sein. Zahlen der Form 6*n* + 3 sind durch 3 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Drei auch keine Primzahlen sein. Somit haben alle Primzahlen über 3 die Form 6*n* − 1 oder 6*n* + 1. Daraus folgt, dass jeder Primzahlzwilling mit Ausnahme von (3, 5) die Darstellung (6*n* − 1, 6*n* + 1) hat."[190]

Es ist möglich, wenn man für die Lösung die Primzahlen in dieser Form (6n + 1) definiert hat, danach und mithilfe der gefundenen Lösung auch die Zahlen 2 und 3 mit hineinzunehmen[191]. Nicht jedoch umgekehrt. Wenn man in der Definition auf die Zahlen, 2, 3 vorgreift, wird die Lösung kompliziert bis unerreichbar[192]. Hat man aber die Lösung, so lassen sich auch 2 und 3 berechnen und ein-

[190] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; vgl Trost 10 f.

[191] Pieper 19 f: „Wir schreiben uns die Zahlen von 2 bis 77 auf. Die erste Zahl ist die 2. Jede zweite Zahl nach 2 ist ein Vielfaches von 2 (nämlich 4, 6, 8, 10, …) und somit keine Primzahl. Diese Zahlen streichen wir durch. Die erste Zahl nach 2, die nicht durchgestrichen wird, ist 3. Jede dritte Zahl nach 3 ist ein Vielfaches von 3 (nämlich 6, 9, …) und daher keine Primzahl. Wir streichen auch diese Zahlen aus; nun sind einige Zahlen (nämlich die Vielfachen von 2 und 3) schon doppelt durchgestrichen: […] Jetzt kämen alle Vielfachen von 4 dran, aber diese sind auch Vielfache von 2, also bereits gestrichen. Die erste noch nicht gestrichene Zahl nach 3 ist 5. Jede fünfte Zahl nach 5 ist ein Vielfaches von 5 (nämlich 5, 10, 20 …) und daher keine Primzahl. Diese Zahlen streichen wir auch wieder durch. Schließlich streichen wir von 7 an jede siebte Zahl (also 14, 21, …) durch: […] Will man alle Vielfache von 11 (nämlich 22, 33, 44, 55, 66, 77), von 13 (26, 39, 52, 65), von 17 (34, 51, 68), von 19 (38, 57, 76), von 23 (46, 69), von 29 (58), von 31 (62), von 37 (74) streichen, so bemerkt man, dass diese Zahlen bereits gestrichen sind. Wir können aufhören. Die nicht gestrichenen Zahlen sind Primzahlen, und das sind alle Primzahlen bis 77:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73.

So kann man es mit jeder sogar beliebig großen Zahl n machen; man streicht zunächst alle geraden Zahlen > 2, dann alle echten Vielfachen von 3, alle echten Vielfachen von 5 usw., bis schließlich nur noch Primzahlen stehen bleiben."

[192] Christof 3 f.

gliedern[193]. Man hat also von der Arbeitshypothese auszugehen, dass 2, 3 und auch allenfalls 5, keine richtigen Primzahlen sind, und man hält das durch, bis man die Lösung gefunden hat. Danach können auch 2 und 3 integriert werden[194].

Dass es sich bei der Formel 6n – 1 um die gleiche Formel 6n + 1 nur scheinbar in der Folge der negativen Zahlen handelt, ergibt sich aus der einfachen Tatsache, dass 6n + 1 und 6 – 1 in der Folge der natürlichen Zahlen zwei parallele Reihen bilden, sagen wir die Reihe A und B, und die Multiplikation B mit B Ergebnisse in B ergibt, die Multiplikation A mit A ebenfalls B ergibt, während die Multiplikation A mit B oder B mit A immer A ergibt[195]. Das ist ansonsten nur möglich, wenn A negative Zahlen enthält, während B positive. Den gleichen Zusammenhang zeigen auch die sogenannten Primzahlen quadratischer Zahlkörper[196].

Der nächste Schritt in Richtung Lösung ist die Gesetzmäßigkeit, dass sich zwar einerseits alle Primzahlen in dieser Folge befinden, aber nicht alle Glieder der Folge sind Primzahlen[197], sodass man von den Gliedern der Folge als Anwärter spricht[198], aber andererseits alle Produkte der Glieder der Folge

---

[193] Pieper 20: „Beispiel. Alle Zahlen bis 77 enthalten in ihrer Primzahlzerlegung eine Primzahl, die kleiner oder gleich 7 ist (es ist $7^2 < 77$, aber $11^2 > 77$). Alle Zahlen bis 10000 = 100^2 enthalten in ihrer Primzahlzerlegung eine Primzahl, die kleiner als 100 ist. Um so die Primzahlen bis 10000 zu finden (es sind 1229), brauchen wir in der Folge aller Zahlen bis 10000 nur die Vielfachen der ersten 25 Primzahlen zu streichen."

[194] Christof 5 f.

[195] Mund (1943) 1 f.

[196] Wiener 38: „Im Körper der rationalen Zahlen stellt 2 bekanntlich eine Primzahl dar, nicht jedoch im Körper $\mathbb{Q}(i)$. Denn es existiert die Zerlegung $2 = (1 + i)(1 - i)$. $1 + i$ und $1 - i$ sind Primzahlen, denn $N(1 - i) = (-i)^2$ $f_{1+i}(0) = 2$ eine rationale Primzahl (mit $f_{1+i}(x) = x^2 - 2x + 2$)."

[197] Christof 3 f.

[198] Mund (1943) 2.

wiederum immer Glieder der Folge sind[199], und es gibt keine Glieder der Folge, außer natürlich den Primzahlen, die nicht Produkte von Gliedern der Folge wären.

- Damit kann einerseits die Zahl der gesuchten Primzahlen auf die Glieder der Folge beschränkt werden, und andererseits die Zahl der Teiler, also jener Zahlen, durch die etwas geteilt werden kann, ebenfalls auf die Glieder der Folge beschränkt werden kann.
- Alle Zahlen, die Glieder der Folge aber keine Primzahlen sind, können nur Produkte von Gliedern der Folge sein, womit nicht nur die Zahl der 3·7 = 2**1** 3·9 = 2**7**, 9·7 = 6**3**, 9·1 = **9** (vgl 3·3 = **9** 9·9 = 8**1**, 7·7 = 4**9**, 1·1 = **1**) der Endziffern[200], sondern auch die der Glieder beschränkt werde[201].
- Eine Sonderstellung nimmt die Zahl 5 ein, die mit allen Zahlen multipliziert die Endziffer 5 ergibt. Damit ist ein Fünftel aller möglichen Primzahlen ausgefallen[202], denn alle Zahlen mit der Endziffer 5 sind durch 5 teilbar. Dabei nimmt die Zahl 5 eine Sonderstellung ein, weil 5 eine

---

[199] Christof 5: „Es ist also nur zweierlei möglich: eine nach der Primzahlformel gebildete Zahl ist entweder eine Primzahl oder ein Produkt aus 2 Primzahlen, also eine teilbare Zahl."

[200] Christof 3: „Vorderhand steht Folgendes fest: Eine Primzahl kann nur mit 1, 3, 7 oder 9 endigen; denn jede Zahl, die mit 0 oder einer geraden Ziffer endigt, ist wenigstens durch 2 und jede, die mit 5 endigt, durch diese Zahl teilbar." Vgl Brefeld, Primzahlen, Teilbarkeit und die Zahl 240, in: < URL >.

[201] Trost 43 f: „Nach den Teilbarkeitsregeln kann ein p ≠ 2, ≠ 5 nur 1, 3, 7, oder 9 als letzte Ziffer haben, während als erste Ziffer jede der Zahlen 1, 2, …9 auftreten kann, wie man schon an den Primzahlen < 100 erkennt. […] Es gibt also für jedes solche s zwischen $a \cdot 10^s$ und $(a + 1)10^s$ eine Primzahl, $p = k \cdot 10^m + b$, die die vorgegebene Anfangs- und Endziffern besitzt."

[202] Mund (1934) 1: „Die Primzahl 5 die – wie alle folgende Primzahlen – zuerst in Quadrat ihrer Größe als Teiler auftritt, hat als erste natürlich den größten Wirkungserfolg; die von ihr teilbaren Primanwartszahlen in Nichtprimzahlen betragen daher 20%."

ungerade Zahl ist, aber – analog der Zahl 1 – jede Zahl mit 5 multipliziert 5 als Endziffer hat und ist durch 5 teilbar[203].

Wenn eine Zahl mit 6 dividiert den Rest 1 oder 5 hat, ist Glied der Folge 6n + 1 oder 6n – 1 und kann daher eine Primzahl sein. In einer Primzahl kann n in der Folge 6n + 1 nicht die Endziffer 4 und 9 und in der Folge 6n – 1 nicht die Endziffer 1 und 6 haben[204].

$P_{\{+5\}}$	$P_{\{+1\}}$	$P_{\{+7\}}$	$P_{\{+3\}}$	$P_{\{+9\}}$
$P_{\{-5\}}$	$P_{\{-1\}}$	$P_{\{-7\}}$	$P_{\{-3\}}$	$P_{\{-9\}}$

$-5 = 6\cdot(-1) + 1$	1(0)	7(1)	$13 = 3^2 + 2^2$(2)	19(3)
$5 = 6\cdot1 - 1$	11(2)	17 = $4^2 + 1^2$(3)	23(4)	$29 = 5^2 + 2^2$(5)
$25 = 6 + 4 + 1$	31(5)	$37 = 6^2 + 1^2$(6)	43((7)) = >6·7 + 1 = 6[6 + 1] + 1)	~~49~~ (= 7·7) (8)
$35 = 6\cdot6 - 1$	41(7) = $4^2 + 5^2$	47(8)	$53 = 7^2 + 2^2$(9)	59(10)
$55 = 6\cdot9 + 1$	61(10) = $5^2 + 6^2$	67(11)	$73 = 8^2 + 3^2$(12)	79(13)
$65 = 6\cdot11 - 1$	71(12)	~~77~~(= 11·7) (13)	83(14)	$89 = 8^2 + 5^2$(15)

[203] Christof 4: „Und dafür steht fest: Die Zahl ist keine Primzahl, wenn
1. sie auf 5 endigt; daher darf, wenn sie eine Primzahl sein soll, das x in 6x – 1 nicht mit 1 oder 6 und in 6x + 1 nicht mit 4 oder 9 endigen.
2. Wenn sie eine Potenz ist".

[204] Brefeld, Primzahlen, Teilbarkeit und die Zahl 240, in: < URL >: „Primzahlen, die größer als 5 sind, können als Endziffer nur eine 1, 3, 7 oder 9 haben, weil sie sonst entweder gerade wären oder durch 5 teilbar. […] Ist die Endziffer der Primzahl p eine 3 oder eine 7, dann hat das Quadrat der Primzahl als Endziffer eine 9 und der dritte Faktor (p^2 + 1) ist durch 5 teilbar."

85 = 6·14 + 1	~~91~~(= 13·7)(15)	97 = 9² + 4²(16)	103(17)	109 = 10² + 3²(18)
95 = 6·16 – 1	101(17)	107(18)	113 = 8² + 7²(19)	~~119~~(= 17·7) (20)

Das eigentliche Gesetz, das andere Lösungsmodelle nicht gefunden haben[205], zumindest nicht in dieser universellen Form, ist eine periodische Wiederholung der Lücken von Primzahlen je Endziffer mit P(10n + 1) = P + 10P + 10P …, um hier mit P nur die Glieder der Reihe zu bezeichnen und gegenüber n als beliebige Zahl abzugrenzen.

- So wie vorher schon eine erste Periode mit 30n zum Vorschein kam[206], sodass mit 30 jeweils mehr (n + 30) immer eine neue Zeile beginnt[207], so fällt analog immer nach 10P als Periode eine mögliche Primzahl aus: Wenn zB 7 eine Primzahl ist, so ist 10·7 + 7 = 77 keine Primzahl.

---

[205] Landau I 3 ff.

[206] Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3; Landau I 87 ff, 229 ff; Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >; Rieble, Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge? in: < URL >; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >: „Mit einer ganzen Zahl *n* lässt sich jede ungerade Zahl in der Form 30*n* + 1, 30*n* + 3, 30*n* + 5, 30*n* + 7, ..., 30*n* + 25, 30*n* + 27, 30*n* + 29 (letztere auch als 30*n* – 1) darstellen. Primzahlen (außer 3 und 5) sind aber nie von einer der 7 Formen 30*n* + 3, 30*n* + 5, 30*n* + 9, 30*n* + 15, 30*n* + 21, 30*n* + 25 und 30*n* + 27, da Zahlen dieser 7 Formen stets durch 3 oder durch 5 teilbar sind. Daher hat jedes Primzahlzwillingspaar (außer (3, 5) und (5, 7)) mit einer ganzen Zahl *n* genau eine der drei Formen".

[207] Mund (1934) 2: „In Bezug auf ihre Bestimmungszahl beträgt ihre Gesamtlänge 5 + 4·5 + 5 = (2 + 4) ·5 = 30." Vgl Rieble, Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge? in: < URL >: „Man erhält dieses PZ-Muster, wenn man die durch 2, 5 und 3 teilbaren Zahlen herausnimmt. Aus einer 10-er Reihe bleiben maximal 4 ungerade Endziffern übrig: 1,3,7,9. Die durch 3 teilbaren Zahlen sind durch ein X wiedergegeben. Die Basisprimzahlen 2,3,5 der ersten Reihe bleiben in diesem Muster unberücksichtigt. […] Das Primzahlmuster beginnt nach 10mal 30 Einheiten wieder von vorn. In einem weiteren Dokument habe ich tabellarisch die drei Reihen in drei Durchgängen von jeweils 300 ausgeführt. Die folgende Tabelle zeigt, dass das Muster der 2. Reihe 16 Varianten haben kann."

- Und 77 + (30·7) = 77 + 210 = 287 ist auch keine Primzahl, ebenso wenige wie 287 + 210 = 497 keine Primzahl ist.
- Es gilt also ein weiteres Gesetz, wobei 77 als keine Primzahl aber Glied der Folge mit P statt p bezeichnet wird: Wenn $P_{\{-7\}}$ = 77 = 10·7 + 7 = 11·7 Glied der Folge ist, aber keine Primzahl, so sind 11 und 7, aus deren Produkt $P_{\{-7\}}$ besteht, sodass die Primzahlen p = 7 und p = 11 ($P_{\{+7\}}$ = 7 und $P_{\{-11\}}$ = 11) die nämlichen Teiler von 77 sind, so ist $P_{\{-7\}}$ = 30·7 + 7 = 210 + 7 = 217 (und analog 77 + (11·30) = 11 + 330 = 341) keine Primzahl[208], sondern ist teilbar 217 = 31·7. Demnach ist P = $p_n \cdot p_m$.
- Die Quadratzahlen bilden einen Sonderfall[209], wo P = $p_n \cdot p_n$. Aus P = $p_n \cdot p_m$ setzt sich die Folge der Nichtprimzahlen fort. Die Primzahlen p sind Glieder der Folge der Reihe P = 6n + 1 und P und p ergänzen sich zur vollständigen Reihe, je nachdem ob P teilbar ist, und wenn nicht, dann wird als p bezeichnet.

Aus den oben genannten Gründen wird die Folge bzw. Reihe in Doppelzeilen als Tabelle so dargestellt, dass in der zweiten Zeile die negativen und in der ersten Zeile die positiven Zahlen sind. Deswegen muss das Vorzeichen + oder – nicht ausgeschrieben werden, sondern nur der Absolutbetrag. Um den Charakter als Doppelzeile abzuheben, bleibt eine Zeile immer leer.

$P_{\{+5\}}$	$P_{\{+1\}}$	$P_{\{+7\}}$	$P_{\{+3\}}$	$P_{\{+9\}}$
$P_{\{-5\}}$	$P_{\{-1\}}$	$P_{\{-7\}}$	$P_{\{-3\}}$	$P_{\{-9\}}$

– 5 = 6·(– 1) + 1	1(0)	7(1)$4^2 - 3^2$	13 = $3^2 + 2^2 = 7^2 - 6^2$(2)	19(3)$10^2 - 9^2$
5 = 6·1 – 1	11(2)$6^2 - 5^2$	17 = $4^2 + 1^2 = 9^2 - 8^2$(3)	23(4)$12^2 - 11^2$	29 = $5^2 + 2^2$(5)

[208] Mund (1934) 2: „Werden die Wellen der Primzahlen ‚5' und ‚7' übereinander gelegt, so bestimmt sich das gemeinsame Mass zu (2 + 4) 5·7 =210."
[209] Christof 4; vgl 8 ff2; Waldal 81.

25 = 6 + 4 + 1	31(5)	37 = $6^2 + 1^2$(6)	43((7)) => 6·7 + 1 = 6[6 + 1] + 1)	~~49~~ (= 7·7) (8)
35 = 6·6 – 1	41(7) = $4^2 + 5^2$	47(8)	53 = $7^2 + 2^2$(9)	59(10)
55 = 6·9 + 1	61(10) = $5^2 + 6^2$	67(11)	73 = $8^2 + 3^2$(12)	79(13)
65 = 6·11 – 1	71(12)	~~77~~(= 11·7) (13)$9^2 – 2^2$	83(14)	89 = $8^2 + 5^2$(15)

Aus den Doppelzeilen ergibt sich, dass so wie die Glieder der Folge waagerecht in der einzelnen Zeile immer mit 6 addiert das nächste Glied ergibt[210],

$P_{\{+5\}}$	$P_{\{+1\}}$	$P_{\{+7\}}$	$P_{\{+3\}}$	$P_{\{+9\}}$
(– 5 + 6 = 1)	1	1 + 6 = 7	7 + 6 = 13	13 + 6 = 19
	5 + 6 = 11	11 + 6 = 17	17 + 6 = 23	23 + 6 = 29

so ergibt senkrecht mit 10 addiert das Glied der ersten Zeile das Glied der zweiten Zeile. Analog muss 30 addiert werden[211], um das Glied in der ersten Zeile der nächsten Doppelzeile aus dem Glied der vorigen ersten Zeile der Doppelzeile zu erhalten[212]. Weiters ergibt sich, dass von dem Glied der zweiten Zeile der Doppelzeile in der gleichen Spalte 20 addiert werden muss, um so das Glied der ersten Zeile der nächsten Doppelzeile zu bekommen. Analog ist es möglich, zum Glied der ersten Zeile in der Doppelzeile 40 addieren, um so das Glied mit der gleichen Endziffer in der gleichen Spalte und in der zweiten Zeile der nächsten Doppelzeile zu bekommen.

- Das hat weiters rechnerisch zur Folge, dass $P_{\{x\}}$ als Nichtprimzahl mit 10 multipliziert, also $10P_{\{x\}}$, neuerlich eine Nichtprimzahl ergibt, die sich in der senkrechten Spalte mit der gleichen Endziffer befindet[213].

[210] Christof 4; Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.
[211] Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[212] Vgl Mund (1934) 2.
[213] Christof 5.

- Analog folgt aus den Gesagten, dass $P_{\{x\}}$ als Nichtprimzahl mit 30 multipliziert[214], also $30P_{\{x\}}$, neuerlich eine Nichtprimzahl ergibt, die sich in der senkrechten Spalte mit der gleichen Endziffer befindet[215].
- Analog folgt aus den Gesagten, dass $P_{\{x\}}$ als Nichtprimzahl mit 20 multipliziert, also $20P_{\{x\}}$, neuerlich eine Nichtprimzahl ergibt, die sich in der senkrechten Spalte mit der gleichen Endziffer befindet, wobei von der einen Zeile der Doppelzeilen zur anderen Zeile der Doppelzeile gewechselt werde.
- Das gilt analog für $40P_{\{x\}}$.
- Die Nichtprimzahlen $10P_{\{x\}}$, $20P_{\{x\}}$, $30P_{\{x\}}$ sind analog so beschaffen, dass sie nicht nur durch 10 teilbar sind, sondern mit weiteren zwei Gliedern der Folge[216]. Aus den schon gezeigten Regeln der Multiplikation, 3·7 = 2**1** 3·9 = 2**7**, 9·7 = 6**3**, 9·1 = **9** (vgl 3·3 = **9**, 9·9 = 8**1**, 7·7 = 4**9**, 1·1 = **1**), folgt, welche Spalten dafür jeweils in Frage kommen.
- Eines der beiden Teiler muss kleiner sein als die Quadratzahl, während der andere größer ist.
- So wie man waagerecht eine Folge 6n + 1 hat, die man auch als $P_n + 6 = P_{n+1}$ schreiben kann, so hat man senkrecht eine jeweils eine Folge[217], die man als $P_m + 10 = P_{m+1}$ oder $P_m + 30 = P_{m+1}$ schreiben kann[218]. Dabei ist 30 = 5·6 ist und $P_m + 30 = P_{m+1}$, $= P_n + 5·6 = P_{n+5}$.
- Wenn also $P_z = P_x·P_y$, keine Primzahl ist, dann ist sowohl $30P_z$, wie auch $30P_x$, und $30P_y$, keine Primzahl[219].

---

[214] Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3: „Die einzig möglichen Zahlen an denen Primzahldrillinge beginnen können (grün markiert) ergeben sich als die Elemente der Menge$\{x-8, x-4, x-2, x+2\}$, wobei x eine beliebige, sowohl durch 3 als auch durch 5, teilbare Zahl ist, die mit der Ziffer 5 endet (also von der Form 30k + 15 ist). Die einzig möglichen Primzahlendrillinge sind also durch Tabelle 2 gegeben, wobei x wiederum von der Form 30k + 15 ist. Es kann also durch größere Änderungen am Programm einiges an Berechnungsaufwand eingespart werden, da durch das Schema in Tabelle 2, falls die Zahlen x – 2 und x + 2 keine Primzahlen sind sofort um 30 Zahlen weiter gesprungen werden kann.“

[215] Vgl Mund (1934) 2.

[216] Christof 5.

[217] Vgl Mund (1934) 2.

[218] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.

[219] Christof 5; vgl Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.

Es entstehen so mit jeder Nichtprimzahl $P_z = P_x \cdot P_y$ endlose Folgen nach dem Muster $30P_z$, $30P_x$, und $30P_y$, die wiederum nach dem gleichen Muster durch zwei P geteilt werden, und diese wiederum eine Folge von Nichtprimzahlen 30P. Die schwarzen Zahlen in Klammer (x) stehen für n in 6 + 1 und 6n – 1

$P_{\{+5\}}$	$P_{\{+1\}}$	$P_{\{+7\}}$	$P_{\{+3\}}$	$P_{\{+9\}}$
$P_{\{-5\}}$	$P_{\{-1\}}$	$P_{\{-7\}}$	$P_{\{-3\}}$	$P_{\{-9\}}$

–35	–59	–53	–47	–41
–25	–49	–43	–37	–31

–35	–29	–23	–17	–11
–25	–19	–13	–7	–1

– 5 = 6·(– 1) + 1 = $2^2 + 1^2$	1(0)	7(1)$4^2 – 3^2$	13 = $3^2 + 2^2 = 7^2 – 6^2$(2)	19(3)$10^2 – 9^2$
5 = 6·1 – 1	11(2)$6^2 – 5^2$	17 = $4^2 + 1^2 = 9^2 – 8^2$(3)	23(4)$12^2 – 11^2$	29 = $5^2 + 2^2$(5)
25 = 6·4 + 1(= $4^2 + 3^2$)	31(5)	37 = $6^2 + 1^2$(6)	43((7)) => 6·7 + 1	~~49~~ (= 7·7) (8)
35 = 6·6 – 1 (= $6^2 – 1^2$)	41(7) = $4^2 + 5^2$	47(8)	53 = $7^2 + 2^2$(9)	59(10)
55 = 6·9 + 1	61(10) = $5^2 + 6^2$	67(11)	73 = $8^2 + 3^2$(12)	79(13)
65 = 6·11– 1 (=$7^2 + 4^2$)	71(12)	~~77~~(= 11·7) (13)	83(14)	89 = $8^2 + 5^2$(15)
85 = 6·14 + 1(= $11^2 + 6^2$)	~~91~~(= 13·7)(15)	97 = $9^2 + 4^2$(16)	103(17)	109 = $10^2 + 3^2$(18)
95 = 6·16 – 1	101(17)$10^2 + 1^2$	107(18)	113 = $8^2 + 7^2$(19)	~~119~~(= 17·7) (20)
115 = 6·19 + 1	~~121~~(= 11·11)(20)	127(21)	~~133~~(= 19·7) (22)	139(23)
125 = 6·21 – 1	131(22)	137 = $11^2 + 4^2$(23)	~~143~~(= 13·11) (24)	149 = $10^2 + 7^2$(25)
145 = 6·24 + 1	151(25)	157(26)	163(27)	~~169~~(= 13·13) = $12^2 + 5^2$(28)

155 = 6·26 – 1	~~161~~(23·7) (27)$15^2 - 8^2$	167(28)	173(29)	179(30)
175 = 6·29 + 1	181 = $10^2 + 9^2$(30)	~~187~~(11·17) (31)	193(32)	199(33)
185 = 6·31 – 1	191(32)	197(33)	~~203~~(29·7) (34)	~~209~~(= 19·11) (35)
205 = 6·34 + 1	211(35)	~~217~~(31·7) (36)	223(37)	229(38)
215 = 6·36 – 1	~~221~~(= 13·17) = $14^2 + 5^2$(37)	227(38)	233(39)	239(40)
235 = 6·39 + 1	241(40)	~~247~~(19·13) (41)	~~253~~(= 23·11) (42)	~~259~~(= 37·7) (43)
245 = 6·41 – 1	251(42)	257(43)	263(44)	269(45)
265 = 6·44 + 1	271(45)	277(46)	283(47)	~~289~~(= 17·17) (48)
275 = 6·46 – 1	281(47)	~~287~~(= 41·7) (48)	293(49)	~~299~~(= 23·13) (50)
295 = 6·49 + 1	~~301~~(= 43·7) (50)	307(51)	313(52)	~~319~~(= 11·29) (53)
305 = 6·51 – 1	311(52)	317(53)	~~323~~(19·17) (54)	~~329~~(= 47·7) (55)
325 = 6·54 + 1	331(55)	337(56)	~~343~~(= 49·7) (57)	349(58)
335 = 6·56 – 1	~~341~~(= 31·11) (57)	347(58)	353(59)	359(60)
355 = 6·59 + 1	~~361~~(19·19) (60)	367(61)	373(62)	379(63)
365 = 6·61 – 1	~~371~~(53·7) (62)	~~377~~(= 29·13) (63)	383(64)	389(65)
385 = 6·64 + 1	~~391~~(= 23·17) (65)	397(66)	~~403~~(= 31·13) (67)	409(68)
395 = 6·66 – 1	401(67)	~~407~~(= 37·11) (68)	~~413~~(7·59) (69)	419(70)
415 = 6·69 + 1	421(70)	~~427~~(= 61·7) (71)	433(72)	439(73)
425 = 6·71 – 1	431(72)	~~437~~(= 23·19) (73)	443(74)	449(75)
445 = 6·74 + 1	~~451~~(= 41·11)(75)	457(76)	463(77)	~~469~~(= 67·7) (78)
455 = 6·76 – 1	461(77)	467(78)	~~473~~(= 43·11) (79)	479(80)
475 = 6·79 + 1	~~481~~(= 37·13) (80)	487(81)	~~493~~(= 29·17) (82)	499(83)
485 = 6·81 – 1	491(82)	~~497~~(71·7) (83)	503(84)	509(85)
505 = 6·84 + 1	~~511~~(= 73·7) (85)	~~517~~(= 47·11)	523	~~529~~(= 23·23) (88)

515 = 6·86 – 1	521(87)	~~527~~(= 31·17) (88)	~~533~~(= 41·13) (89)	~~539~~(= 49·11) (90)
535 6·89 + 1	541(90)	547	~~553~~(= 79·7)	~~559~~(= 43·13)
545 = 6·91 – 1	~~551~~(29·19) (92)	557(93)	563	569
565 = 6·94 + 1	571(95)	577	~~583~~(= 53·11)	~~589~~(= 31·19)
575 = 6·96 – 1	~~581~~(= 83·7)	587	593	599
595 = 6·99 + 1	601(100)	607	613	619
605 = 6·101 – 1	~~611~~(= 47·13)	617	~~623~~(= 89·7)	~~629~~(= 37·17)
625 = 6·104 + 1	631(105)	~~637~~(= 91·7) = 49·13	643	~~649~~ = (59·11)
635 = 6·106 – 1	641	647	653	659
655 = 6·109 + 1	661(110)	~~667~~(= 23·29)	673	~~679~~ = (97·7)
665 = 6·111 – 1	~~671~~(= 61·11)	677	683	~~689~~(= 53·13)
685 = 6·114 + 1	691(115)	~~697~~(= 41·17)	~~703~~(= 37·19)	709
695 = 6·116 – 1	701	~~707~~(= 101·7)	~~713~~(= 31·23)	719
715 = 6·119 + 1	~~721~~(= 103·7) (120)	727	733	739
725 = 6·121 – 1	~~731~~(= 43·17)	~~737~~(= 67·11)	743	~~749~~(= 107·7)
745 = 6·124 + 1	751(125)	757	~~763~~(= 109·7)	769
755 = 6·129 – 1	761	~~767~~(= 59·13)	773	~~779~~(= 41·19)
775 = 6·n + 1	~~781~~ = (71·11)	787	~~793~~ = (61·13)	~~799~~(= 47·17)
785 = 6·n – 1	~~791~~ = (113·7)	797	~~803~~(= 73·11)	809
805 = 6·n + 1	811	~~817~~(= 43·19)	823	829
815 = 6·n – 1	821	827	~~833~~(= 49·17)	839
835 = 6·n + 1	~~841~~(= 29·29)	~~847~~ = 77·11 = 121·7	853	859
845 = 6·n – 1	~~851~~(= 37·23)	857	863	~~869~~(= 79·11)
865 = 6·n + 1	~~871~~(= 67·13)	877	883	~~889~~(= 127·7)

875 = 6·n – 1	881	887	~~893~~(= 47·19)	~~899~~ = 31·29
895 = 6·n + 1	~~901~~ = 53·17	907	~~913~~ = 83·11	919
905 = 6·n – 1	911	~~917~~(= 131·7)	~~923~~(= 71·13)	929
925 = 6·n + 1	~~931~~ = 49·19	937	~~943~~ = 41·23	~~949~~(= 73·13)
935 = 6·n – 1	941	947	953	~~959~~(= 137·7)
955 = 6·n + 1	~~961~~ = 31·31	967	~~973~~ = 139·7	~~979~~ = 89·11
965 = 6·n – 1	971	977	983	~~989~~ = 43·23
985 = 6·n + 1	991	997	~~1003~~ = 59·17	1009
995 = 6·n – 1	~~1001~~ = 77·13 = 91·11	~~1007~~ = 53·19	1013	1019
1015 = 6·n + 1	1021	~~1027~~ = 79·13	1033	1039
1025 = 6·n – 1	1031	~~1037~~ = 61·17	~~1043~~ = 149·7	1049
1045 = 6·n + 1	1051	~~1057~~ = 151·7	1063	1069
1055 = 6·n – 1	1061	~~1067~~ = 97·11	~~1073~~ = 29·37	~~1079~~ = 13·83
1075 = 6·n + 1	~~1081~~ = 47·23	1087	1093	~~1099~~ = 157·7
1085 = 6·n – 1	1091	1097	1103	1109
1105 = 6·n + 1	~~1111~~ = 101·11	1117	1123	1129
1115 = 6·n – 1	~~1121~~ = 59·19	~~1127~~ = 161·7 = 49·23	~~1133~~ = 103·11	~~1139~~ = 67·17
1135 = 6·n + 1	~~1141~~ = 163·7	~~1147~~ = 31·37	1153	~~1159~~ = 61·19
1145 = 6·n – 1	1151	~~1157~~ = 89·13	1163	~~1169~~ = 167·7
1105 = 6·n + 1	1171	~~1177~~ = 107·11	~~1183~~ = 169·7 = 91·13	~~1189~~ = 41·29
1175 = 6·n – 1	1181	1187	1193	~~1199~~ = 109·11
1195 = 6·n + 1	1201	~~1207~~ = 71·17	1213	~~1219~~ = 53·23
1205 = 6·n – 1	~~1211~~ = 173·7	1217	1223	1229
1225 = 6·n + 1	1231	1237	~~1243~~ = 113·11	1249

1235 = 6·n – 1	~~1241~~ = 73·17	~~1247~~ = 43·29	~~1253~~ = 179·7	1259
1255 = 6·n + 1	~~1261~~ = 97·13	~~1267~~ = 181·7	~~1273~~ = 67·19	1279
1265 = 6·n – 1	~~1271~~ = 41·31	1277	1283	1289
1285 = 6·n + 1	1291	1297	1303	~~1309~~ = 187·7 = 11·119
1295 = 6·n – 1	1301	1307	~~1313~~ = 101·13	1319
1315 = 6·n + 1	1321	1327	~~1333~~ = 43·31	~~1339~~ = 103·13
1325 = 6·n – 1	~~1331~~ = 121·11	~~1337~~ = 191·7	~~1343~~ = 79·17	~~1349~~ = 71·19
1345 = 6·n + 1	~~1351~~ = 193·7	~~1357~~ = 59·23	~~1363~~ = 47·29	~~1369~~ = 37·37
1355 = 6·n – 1	1361	1367	1373	~~1379~~ = 197·7
1375 = 6·n + 1	1381	~~1387~~ = 73·19	~~1393~~ = 199·7	1399
1385 = 6·n – 1	~~1391~~ = 107·13	~~1397~~ = 127·11	~~1403~~ = 61·23	1409
1405 = 6·n + 1	~~1411~~ = 83·17	~~1417~~ = 109·13	1423	1429
1415 = 6·n – 1	~~1421~~ = 203·7 = 49·29	1427	1433	1439
1435 = 6·n + 1	~~1441~~ = 131·11	1447	1453	1459
1445 = 6·n – 1	1451	~~1457~~ = 47·31	~~1463~~ = 209·7 = 133·11	~~1469~~ = 113·13
1465 = 6·n + 1	1471	~~1477~~ = 211·7	1483	1489
1475 = 6·n – 1	1481	1487	1493	1499
1495 = 6·n + 1	~~1501~~ = 79·19	~~1507~~ = 137·11	~~1513~~ = 89·17	~~1519~~ = 217·7 = 49·31
1505 = 6·n – 1	1511	~~1517~~ = 41·37	1523	~~1529~~ = 139·11
1525 = 6·n + 1	1531	~~1537~~ = 53·29	1543	1549
1535 = 6·n – 1	~~1541~~ = 67·23	~~1547~~ = 221·7 = 17·91	1553	1559
1555 = 6·n + 1	~~1561~~ = 223·7	1567	~~1573~~ = 121·13	1579
1565 = 6·n – 1	1571	~~1577~~ = 83·19	1583	~~1589~~ = 227·7
1585 = 6·n + 1	~~1591~~ = 43·37	1597	~~1603~~ = 229·7	1609

1595 = 6·n – 1	1601	1607	1613	1619
1615 = 6·n + 1	1621	1627	~~1633~~ = 71·23	~~1639~~ = 149·11
1625 = 6·n – 1	~~1631~~ = 233·7	1637	~~1643~~ = 53·31	~~1649~~ = 97·17
1645 = 6·n + 1	~~1651~~ = 127·13	1657	1663	1669
1655 = 6·n – 1	~~1661~~ = 151·11	1667	~~1673~~ = 239·7 = 143·11	~~1679~~ = 73·23
1675 = 6·n + 1	~~1681~~ = 41·41	~~1687~~ = 241·7	1693	1699
1685 = 6·n – 1	~~1691~~ = 89·19	1697	~~1703~~ = 131·13	1709
1705 = 6·n + 1	~~1711~~ = 59·29	~~1717~~ = 101·17	1723	~~1729~~ = 247·7 = 91·19
1715 = 6·n – 1	1721	~~1727~~ = 157·11	1733	~~1739~~ = 47·37
1735 = 6·n + 1	1741	1747	1753	1759
1745 = 6·n – 1	~~1751~~ = 103·17	~~1757~~ = 251·7	~~1763~~ = 43·41	~~1769~~ = 61·29
1765 = 6·n + 1	~~1771~~ = 253·7 = 77·23	1777	1783	1789
1775 = 6·n – 1	~~1781~~ = 137·13	1787	~~1793~~ = 163·11	~~1799~~ = 257·7
1795 = 6·n + 1	1801	~~1807~~ = 139·13	~~1813~~ = 259·7 = 49·37	~~1819~~ = 107·17
1805 = 6·n – 1	1811	~~1817~~ = 79·23	1823	~~1829~~ = 59·31
1825 = 6·n + 1	1831(305)	~~1837~~ = 167·11(306)	~~1843~~ = 97·19	~~1849~~ = 43·43
1835 = 6·n – 1	~~1841~~ = 263·7(307)	1847	~~1853~~ = 109·17	~~1859~~ = 169·11 = 143·13
1855 = 6·n + 1	1861(310)	1867	1873	1879
1865 = 6·n – 1	1871	1877	~~1883~~ = 269·7	1889
1885 = 6·n + 1	~~1891~~ = 61·31 (315)	~~1897~~ = 271·7	~~1903~~ = 173·11	~~1909~~ = 83·23
1895 = 6·n – 1	1901	1907	1913	~~1919~~ = 101·19
1915 = 6·n + 1	~~1921~~ = 113·17(320)	~~1927~~ = 47·41	1933	~~1939~~ = 277·7
1925 = 6·n – 1	1931	~~1937~~ = 149·13	~~1943~~ = 67·29	1949
1945 = 6·n + 1	1951(325)	~~1957~~ = 103·19(326)	~~1963~~ = 151·13(327)	~~1969~~ = 179·11(328)

1955 = 6·n – 1	~~1961~~ = 53·37 (327)	~~1967~~ = 281·7(328)	1973(329)	1979(330)
1975 = 6·n + 1	~~1981~~ = 283·7(330)	1987(331)	1993(332)	1999(333)
1985 = 6·n – 1	~~1991~~ = 181·11(332)	1997(333)	2003(334)	~~2009~~ = 287·7(335) = 49·41
2005 = 6·334 + 1	2011(335)	2017(336)	~~2023~~ = 119·17 = 289·7(337)	2029(338)
2015 = 6·336 – 1	~~2021~~(337) 47·43	2027(338)	~~2033~~ = 107·19(339)	2039(340)
	340 – 345			
2035 = 6·338 + 1	~~2041~~ = 157·13(340)	~~2047~~ = 89·23(6·341 + 1)	2053(6·342 + 1)	~~2059~~ = 71·29 (6·343 + 1)
2045 = 6·341 – 1	~~2051~~ = 293·7(342)	~~2057~~ = 187·11(343)	2063(344)	2069 (345)
	345 – 349			
2065 = 6·344 + 1	~~2071~~(6·345 + 1)109·19	~~2077~~(6·346 + 1) = 67·31	2083~~(~~6·347 + 1)	2089(6·348 + 1)
2075 = 6·346 – 1	2081(6·347· – 1)	2087(6·348 – 1)	~~2093~~(6·349 – 1) = 91·23	2099(6·350 – 1)
	350 – 355			
2095 = 6·349 + 1	~~2101~~(6·350 + 1) = 191·11	~~2107~~(6·351 + 1) 49·41	2113(6·352 + 1)	~~2119~~(6·353 + 1) = 163·13
2105 = 6·351 – 1	2111(6·352 – 1)	~~2117~~ = 73·29 (6·353 – 1)	~~2123~~(6·354 – 1) = 193·11	2129(6·355 – 1)
	355 – 360			
2125	2131(6·355 + 1)	2137(6·356 + 1)	2143(6·357 + 1)	~~2149~~(6·358 + 1) = 307·7
2135 = 6·356 – 1	2141(6·357 – 1)	~~2147~~(6·358 – 1)113·19	2153(6·359 – 1)	~~2159~~(6·360 – 1)127·17
2155 = 6·359 + 1	2161(6·360 + 1)	~~2167~~(6·361 + 1)197·11	~~2173~~(6·362 + 1) 53·41	2179(6·363 + 1)
2165 = 6·361 – 1	~~2171~~(6·362 – 1) = 167·13	~~2177~~(6·363 – 1)311·7	~~2183~~(6·364 – 1)59·37	~~2189~~(6·365 – 1) = 59·37
2185 = 6·364 + 1	~~2191~~ = 313·7	~~2197~~ = 169·13	2203	~~2209~~ = 47·47
2195 = 6·366 – 1	~~2201~~ = 71·31	2207	2213	~~2219~~ = 317·7
…	…	…	…	…

So weit es einerseits fest steht, dass p = 6n + 1 oder p = 6n – 1, und andererseits fest steht, dass in der Reihe 6n + 1 und/oder 6n – 1 entweder die Glieder prim sind oder das Produkt zweier Primzahlen $P_z = p_x \cdot p_y = (6x + 1)\cdot(6y + 1)$, kann die Formel zurückverfolgt werden: $P_z = p_x\cdot(6y + 1) = p_x6y + p_x$, wobei px nochmals in (6x + 1) zerlegt werden kann: $p_x6y + (6x + 1)$.

$n = p + [(p - 1)/6]$

$p_x = 6m + 1$; $m = p_y n + [(p_y - 1)/6] \Rightarrow 6\{p_y n + [(p_y - 1)/6]\} + 1 = 6p_y n + p_y - 1 + 1 = 6p_y n + p_y = p_y(6n + 1)$

$p_x = 6m - 1$; $m = p_y n - [(p_y - 1)/6] \Rightarrow 6\{p_y n - [(p_y - 1)/6]\} - 1 = 6p_y n - p_y + 1 - 1 = 6p_y n - p_y = p_y(6n - 1)$

Zur Kontrolle die Formel für Nichtprimzahlen zurück verfolgt:

$$P_z = 6\left[p_y m - \frac{5p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_z = 6p_y m - 6\left[\frac{5p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_z = 6p_y m - \left(5p_y - 1\right) - 1$$

$$P_z = 6p_y m - 5p_y$$

$$P_z = p_y(6m - 5)$$

$$P_z = p_y p_x$$

$$P_z = 6\left[p_y m - \frac{p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_z = 6p_y m - 6\left[\frac{p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_z = 6p_y m - \left(p_y - 1\right) - 1$$

$$P_z = 6p_y m - p_y \ + \ 1 - 1$$

$$P_z = 6p_y m - p_y$$

$$P_z = p_y(6m - 1)$$

$$P_z = p_y p_x$$

$$P_z = 6\left[p_y m - \frac{p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_z = 6\left[p_y m - \frac{p_y - \frac{p_y}{p_y}}{6}\right] - 1$$

$$P_z = 6\left[p_y m - \frac{p_y\left(1 - \frac{1}{p_y}\right)}{6}\right] - 1$$

$$P_z = 6p_y\left[m - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{p_y}\right)\right] - 1$$

$$P_z = p_y\left[6m - \left(1 - \frac{1}{p_y}\right)\right] - 1$$

$$P_z = p_y\left[6m - 1 + \frac{1}{p_y}\right] - 1$$

$$P_z = \left[6mp_y - p_y + \frac{p_y}{p_y}\right] - 1$$

$$P_z = \left[6mp_y - p_y + 1\right] - 1$$

$$P_z = 6mp_y - p_y + 1 - 1$$

$$P_z = 6mp_y - p_y$$

$$P_z = p_y(6m - 1)$$

$$P_z = p_y p_x$$

$$P_z = p_y(6m - 1)$$

$$\frac{P_z}{p_y} = (6m - 1)$$

$$\frac{P_z}{p_y} = 6m - 1$$

$$\frac{P_z}{p_y} - 1 = 6m$$

$$\frac{P_z}{p_y} - 1 = 6m$$

$$\frac{P_z}{p_y} - \frac{p_y}{p_y} = 6m$$

$$\frac{1}{p_y}\left(P_z - p_y\right) = 6m$$

$$\frac{6}{p_y}\left(P_z - p_y\right) = m$$

Die Primzahlanwärter ausmultipliziert:

$P_z = (6n - 1)\cdot(6m - 1) = 36nm - 6m - 6n + 1 = 6(6nm - m - n) + 1$
Bei $m = n - 1$
$P_z = 6(n[n - 1] - [n - 1] - n) + 1$

$P_z = 6(n^2 - n - n + 1 - n) + 1$
$P_z = 6(n^2 - 3n + 1) + 1$
$P_z = 6n^2 - 18n + 6 + 1$
$P_z = 6n(n - 3) + 7$

$P_z = (6n + 1)\cdot(6m + 1) = 36nm + 6m + 6n + 1 = 6(6nm + m + n) + 1$
Bei $m = n + 1$
$P_z = 6(n[n + 1] + [n + 1] + n) + 1$
$P_z = 6(n^2 + n + n + 1 + n) + 1$
$P_z = 6(n^2 + 3n + 1) + 1$
$P_z = 6n^2 + 18n + 6 + 1$
$P_z = 6n(n + 3) + 7$

Im Ergebnis ist also $P_z = 6n(n \pm 3) + 7$.

Die Folge 6n + 1

$P_{\{+5\}}$	$P_{\{+1\}}$	$P_{\{+7\}}$	$P_{\{+3\}}$	$P_{\{+9\}}$
– 5 = 6·(– 1) + 1	1(0)	7(1)	13 = $3^2 + 2^2$(2)	19(3)
25 = 6 + 4 + 1	31(5)	37 = $6^2 + 1^2$(6)	43((7)) = >6·7 + 1 = 6[6 + 1] + 1)	~~49~~ (= 7·7) (8)
55 = 6·9 + 1	61(10) = $5^2 + 6^2$	67(11)	73 = $8^2 + 3^2$(12)	79(13)
85 = 6·14 + 1	~~91~~(= 13·7)(15)	97 = $9^2 + 4^2$(16)	103(17)	109 = $10^2 + 3^2$(18)
115 = 6·19 + 1	~~121~~(= 11·11)(20)	127(21)	~~133~~(= 19·7) (22)	139(23)
145 = 6·24 + 1	151(25)	157(26)	163(27)	~~169~~(= 13·13) = $12^2 + 5^2$(28)
175 = 6·29 + 1	181 = $10^2 + 9^2$(30)	~~187~~(11·17) (31)	193(32)	199(33)
205 = 6·34 + 1	211(35)	~~217~~(31·7) (36)	223(37)	229(38)
235 = 6·39 + 1	241(40)	~~247~~(19·13) (41)	~~253~~(= 23·11) (42)	~~259~~(= 37·7) (43)
265 = 6·44 + 1	271(45)	277(46)	283(47)	~~289~~(= 17·17) (48)
295 = 6·49 + 1	~~301~~(= 43·7) (50)	307(51)	313(52)	~~319~~(= 11·29) (53)
325 = 6·54 + 1	331(55)	337(56)	~~343~~(= 49·7) (57)	349(58)
355 = 6·59 + 1	~~361~~(19·19) (60)	367(61)	373(62)	379(63)
385 = 6·64 + 1	~~391~~(= 23·17) (65)	397(66)	~~403~~(= 31·13) (67)	409(68)

415 = 6·69 + 1	421(70)	~~427~~(= 61·7) (71)	433(72)	439(73)
445 = 6·74 + 1	~~451~~(= 41·11)(75)	457(76)	463(77)	~~469~~(= 67·7) (78)
475 = 6·79 + 1	~~481~~(= 37·13) (80)	487(81)	~~493~~(= 29·17) (82)	499(83)
505 = 6·84 + 1	~~511~~(= 73·7) (85)	~~517~~(= 47·11)	523	~~529~~(= 23·23) (88)
535 = 6·89 + 1	541(90)	547	~~553~~(= 79·7)	~~559~~(= 43·13)
565 = 6·94 + 1	571(95)	577	~~583~~(= 53·11)	~~589~~(= 31·19)
595 = 6·99 + 1	601(100)	607	613	619
625 = 6·104 + 1	631(105)	~~637~~(= 91·7) = 49·13	643	~~649~~ = (59·11)
655 = 6·109 + 1	661(110)	~~667~~(= 23·29)	673	~~679~~ = (97·7)
685 = 6·114 + 1	691(115)	~~697~~(= 41·17)	~~703~~(= 37·19)	709
715 = 6·119 + 1	~~721~~(= 103·7) (120)	727	733	739
745 = 6·124 + 1	751(125)	757	~~763~~(= 109·7)	769
775 = 6·n + 1	~~781~~ = (71·11)	787	~~793~~ = (61·13)	~~799~~(= 47·17)
805 = 6·n + 1	811	~~817~~(= 43·19)	823	829
835 = 6·n + 1	~~841~~(= 29·29)	~~847~~ = 77·11 = 121·7	853	859
865 = 6·n + 1	~~871~~(= 67·13)	877	883	~~889~~(= 127·7)
895 = 6·n + 1	~~901~~ = 53·17	907	~~913~~ = 83·11	919

925 = 6·n + 1	~~931~~ = 49·19	937	~~943~~ = 41·23	~~949~~(= 73·13)
955 = 6·n + 1	~~961~~ = 31·31	967	~~973~~ = 139·7	~~979~~ = 89·11
985 = 6·n + 1	991	997	~~1003~~ = 59·17	1009
1015 = 6·n + 1	1021	~~1027~~ = 79·13	1033	1039
1045 = 6·n + 1	1051	~~1057~~ = 151·7	1063	1069
1075 = 6·n + 1	~~1081~~ = 47·23	1087	1093	~~1099~~ = 157·7
1105 = 6·n + 1	~~1111~~ = 101·11	1117	1123	1129
1135 = 6·n + 1	~~1141~~ = 163·7	~~1147~~ = 31·37	1153	~~1159~~ = 61·19
1105 = 6·n + 1	1171	~~1177~~ = 107·11	~~1183~~ = 169·7 = 91·13	~~1189~~ = 41·29
1195 = 6·n + 1	1201	~~1207~~ = 71·17	1213	~~1219~~ = 53·23
1225 = 6·n + 1	1231	1237	~~1243~~ = 113·11	1249
1255 = 6·n + 1	~~1261~~ = 97·13	~~1267~~ = 181·7	~~1273~~ = 67·19	1279
1285 = 6·n + 1	1291	1297	1303	~~1309~~ = 187·7 = 11·119
1315 = 6·n + 1	1321	1327	~~1333~~ = 43·31	~~1339~~ = 103·13
1345 = 6·n + 1	~~1351~~ = 193·7	~~1357~~ = 59·23	~~1363~~ = 47·29	~~1369~~ = 37·37
1375 = 6·n + 1	1381	~~1387~~ = 73·19	~~1393~~ = 199·7	1399
1405 = 6·n + 1	~~1411~~ = 83·17	~~1417~~ = 109·13	1423	1429
1435 = 6·n + 1	~~1441~~ = 131·11	1447	1453	1459

1465 = 6·n + 1	1471	~~1477~~ = 211·7	1483	1489
1495 = 6·n + 1	~~1501~~ = 79·19	~~1507~~ = 137·11	~~1513~~ = 89·17	~~1519~~ = 217·7 = 49·31
1525 = 6·n + 1	1531	~~1537~~ = 53·29	1543	1549
1555 = 6·n + 1	~~1561~~ = 223·7	1567	~~1573~~ = 121·13	1579
1585 = 6·n + 1	~~1591~~ = 43·37	1597	~~1603~~ = 229·7	1609
1615 = 6·n + 1	1621	1627	~~1633~~ = 71·23	~~1639~~ = 149·11
1645 = 6·n + 1	~~1651~~ = 127·13	1657	1663	1669
1675 = 6·n + 1	~~1681~~ = 41·41	~~1687~~ = 241·7	1693	1699
1705 = 6·n + 1	~~1711~~ = 59·29	~~1717~~ = 101·17	1723	~~1729~~ = 247·7 = 91·19
1735 = 6·n + 1	1741	1747	1753	1759
1765 = 6·n + 1	~~1771~~ = 253·7 = 77·23	1777	1783	1789
1795 = 6·n + 1	1801	~~1807~~ = 139·13	~~1813~~ = 259·7 = 49·37	~~1819~~ = 107·17
1825 = 6·n + 1	1831(305)	~~1837~~ = 167·11(306)	~~1843~~ = 97·19	~~1849~~ = 43·43
1855 = 6·n + 1r	1861(310)	1867	1873	1879
1885 = 6·n + 1	~~1891~~ = 61·31 (315)	~~1897~~ = 271·7	~~1903~~ = 173·11	~~1909~~ = 83·23
1915 = 6·n + 1	~~1921~~ = 113·17(320)	~~1927~~ = 47·41	1933	~~1939~~ = 277·7
1945 = 6·n + 1	1951(325)	~~1957~~ = 103·19(326)	~~1963~~ = 151·13(327)	~~1969~~ = 179·11(328)
1975 = 6·n + 1	~~1981~~ = 283·7(330)	1987(331)	1993(332)	1999(333)

2005 = 6·334 + 1	2011(335)	2017(336)	~~2023~~ = 119·17 = 289·7 (337)	2029(338)
	340 – 345			
2035 = 6·338 + 1	~~2041~~ = 157·13(340)	~~2047~~ = 89·23(6·341 + 1)	2053(6·342 + 1)	~~2059~~ = 71·29 (6·343 + 1)
	345 – 349			
2065 = 6·344 + 1	~~2071~~(6·345 + 1)109·19	~~2077~~(6·346 + 1) = 67·31	2083~~(~~6·347 + 1)	2089(6·348 + 1)
	350 – 355			
2095 = 6·349 + 1	~~2101~~(6·350 + 1) = 191·11	~~2107~~(6·351 + 1) 49·41	2113(6·352 + 1)	~~2119~~(6·353 + 1) = 163·13
	355 – 360			
2125 = 6·354 + 1	2131(6·355 + 1)	2137(6·356 + 1)	2143(6·357 + 1)	~~2149~~(6·358 + 1) = 307·7
2155 = 6·359 + 1	2161(6·360 + 1)	~~2167~~(6·361 + 1)197·11	~~2173~~(6·362 + 1) 53·41	2179(6·363 + 1)
2185 = 6·364 + 1	~~2191~~ = 313·7	~~2197~~ = 169·13	2203	~~2209~~ = 47·47

Die Folge 6n – 1

$P_{\{-5\}}$	$P_{\{-1\}}$	$P_{\{-7\}}$	$P_{\{-3\}}$	$P_{\{-9\}}$
5 = 6·1 – 1	11(2)	17 = $4^2 + 1^2$(3)	23(4)	29 = $5^2 + 2^2$(5)
35 = 6·6 – 1	41(7) = $4^2 + 5^2$	47(8)	53 = $7^2 + 2^2$(9)	59(10)
65 = 6·11 – 1	71(12)	~~77~~(= 11·7) (13)	83(14)	89 = $8^2 + 5^2$(15)
95 = 6·16 – 1	101(17)	107(18)	113 = $8^2 + 7^2$(19)	~~119~~(= 17·7) (20)
125 = 6·21 – 1	131(22)	137 = $11^2 + 4^2$(23)	~~143~~(= 13·11) (24)	149 = $10^2 + 7^2$(25)
155 = 6·26 – 1	~~161~~(23·7) (27)	167(28)	173(29)	179(30)
185 = 6·31 – 1	191(32)	197(33)	~~203~~(29·7) (34)	~~209~~(= 19·11) (35)
215 = 6·36 – 1	~~221~~(= 13·17) = $14^2 + 5^2$(37)	227(38)	233(39)	239(40)
245 = 6·41 – 1	251(42)	257(43)	263(44)	269(45)
275 = 6·46 – 1	281(47)	~~287~~(= 41·7) (48)	293(49)	~~299~~(= 23·13) (50)
305 = 6·51 – 1	311(52)	317(53)	~~323~~(19·17) (54)	~~329~~(= 47·7) (55)
335 = 6·56 – 1	~~341~~(= 31·11) (57)	347(58)	353(59)	359(60)
365 = 6·61 – 1	~~371~~(53·7) (62)	~~377~~(= 29·13) (63)	383(64)	389(65)
395 = 6·66 – 1	401(67)	~~407~~(= 37·11) (68)	~~413~~(7·59) (69)	419(70)
425 = 6·71 – 1	431(72)	~~437~~(= 23·19) (73)	443(74)	449(75)

455 = 6·76 – 1	461(77)	467(78)	~~473~~(= 43·11) (79)	479(80)
485 = 6·81 – 1	491(82)	~~497~~(71·7) (83)	503(84)	509(85)
515 = 6·86 – 1	521(87)	~~527~~(= 31·17) (88)	~~533~~(= 41·13) (89)	~~539~~(= 49·11) (90)
545 = 6·91 – 1	~~551~~(29·19) (92)	557(93)	563	569
575 = 6·96 – 1	~~581~~(= 83·7)	587	593	599
605 = 6·101 – 1	~~611~~(= 47·13)	617	~~623~~(= 89·7)	~~629~~(= 37·17)
635 = 6·106 – 1	641	647	653	659
665 = 6·111 – 1	~~671~~(= 61·11)	677	683	~~689~~(= 53·13)
695 = 6·116 – 1	701	~~707~~(= 101·7)	~~713~~(= 31·23)	719
725 = 6·121 – 1	~~731~~(= 43·17)	~~737~~(= 67·11)	743	~~749~~(= 107·7)
755 = 6·129 – 1	761	~~767~~(= 59·13)	773	~~779~~(= 41·19)
785 = 6·n – 1	~~791~~ = (113·7)	797	~~803~~(= 73·11)	809
815 = 6·n – 1	821	827	~~833~~(= 49·17)	839
845 = 6·n – 1	~~851~~(= 37·23)	857	863	~~869~~(= 79·11)
875 = 6·n – 1	881	887	~~893~~(= 47·19)	~~899~~ = 31·29
905 = 6·n – 1	911	~~917~~(= 131·7)	~~923~~(= 71·13)	929
935 = 6·n – 1	941	947	953	~~959~~(= 137·7)
965 = 6·n – 1	971	977	983	~~989~~ = 43·23

995 = 6·n – 1	~~1001~~ = 77·13 = 91·11	~~1007~~ = 53·19	1013	1019
1025 = 6·n – 1	1031	~~1037~~ = 61·17	~~1043~~ = 149·7	1049
1055 = 6·n – 1	1061	~~1067~~ = 97·11	~~1073~~ = 29·37	~~1079~~ = 13·83
1085 = 6·n – 1	1091	1097	1103	1109
1115 = 6·n – 1	~~1121~~ = 59·19	~~1127~~ = 161·7 = 49·23	~~1133~~ = 103·11	~~1139~~ = 67·17
1145 = 6·n – 1	1151	~~1157~~ = 89·13	1163	~~1169~~ = 167·7
1175 = 6·n – 1	1181	1187	1193	~~1199~~ = 109·11
1205 = 6·n – 1	~~1211~~ = 173·7	1217	1223	1229
1235 = 6·n – 1	~~1241~~ = 73·17	~~1247~~ = 43·29	~~1253~~ = 179·7	1259
1265 = 6·n – 1	~~1271~~ = 41·31	1277	1283	1289
1295 = 6·n – 1	1301	1307	~~1313~~ = 101·13	1319
1325 = 6·n – 1	~~1331~~ = 121·11	~~1337~~ = 191·7	~~1343~~ = 79·17	~~1349~~ = 71·19
1355 = 6·n – 1	1361	1367	1373	~~1379~~ = 197·7
1385 = 6·n – 1	~~1391~~ = 107·13	~~1397~~ = 127·11	~~1403~~ = 61·23	1409
1415 = 6·n – 1	~~1421~~ = 203·7 = 49·29	1427	1433	1439
1445 = 6·n – 1	1451	~~1457~~ = 47·31	~~1463~~ = 209·7 = 133·11	~~1469~~ = 113·13
1475 = 6·n – 1	1481	1487	1493	1499
1505 = 6·n – 1	1511	~~1517~~ = 41·37	1523	~~1529~~ = 139·11

1535 = 6·n – 1	~~1541~~ = 67·23	~~1547~~ = 221·7 = 17·91	1553	1559
1565 = 6·n – 1	1571	~~1577~~ = 83·19	1583	~~1589~~ = 227·7
1595 = 6·n – 1	1601	1607	1613	1619
1625 = 6·n – 1	~~1631~~ = 233·7	1637	~~1643~~ = 53·31	~~1649~~ = 97·17
1655 = 6·n – 1	~~1661~~ = 151·11	1667	~~1673~~ = 239·7 = 143·11	~~1679~~ = 73·23
1685 = 6·n – 1	~~1691~~ = 89·19	1697	~~1703~~ = 131·13	1709
1715 = 6·n – 1	1721	~~1727~~ = 157·11	1733	~~1739~~ = 47·37
1745 = 6·n – 1	~~1751~~ = 103·17	~~1757~~ = 251·7	~~1763~~ = 43·41	~~1769~~ = 61·29
1775 = 6·n – 1	~~1781~~ = 137·13	1787	~~1793~~ = 163·11	~~1799~~ = 257·7
1805 = 6·n – 1	1811	~~1817~~ = 79·23	1823	~~1829~~ = 59·31
1835 = 6·n – 1	~~1841~~ = 263·7(307)	1847	~~1853~~ = 109·17	~~1859~~ = 169·11 = 143·13
1865 = 6·n – 1	1871	1877	~~1883~~ = 269·7	1889
1895 = 6·n – 1	1901	1907	1913	~~1919~~ = 101·19
1925 = 6·n – 1	1931	~~1937~~ = 149·13	~~1943~~ = 67·29	1949
1955 = 6·n – 1	~~1961~~ = 53·37 (327)	~~1967~~ = 281·7(328)	1973(329)	1979(330)
1985 = 6·n – 1	~~1991~~ = 181·11(332)	1997(333)	2003(334)	~~2009~~ = 287·7(335) = 49·41
2015 = 6·336 – 1	~~2021~~(337) 47·43	2027(338)	~~2033~~ = 107·19(339)	2039(340)
	340 – 345			
2045 = 6·341 – 1	~~2051~~ = 293·7(342)	~~2057~~ = 187·11(343)	2063(344)	2069 (345)
	345 – 349			

2075 = 6·346 – 1	2081(6·347· – 1)	2087(6·348 – 1)	2093(6·349 – 1) = 91·23	2099(6·350 – 1)
	350 – 355			
2105 = 6·351 – 1	2111(6·352 – 1)	2117 = 73·29 (6·353 – 1)	2123(6·354 – 1) = 193·11	2129(6·355 – 1)
	355 – 360			
2135 = 6·356 – 1	2141(6·357 – 1)	2147(6·358 – 1)113·19	2153(6·359 – 1)	2159(6·360 – 1)127·17
2165 = 6·361 – 1	2171(6·362 – 1) = 167·13	2177(6·363 – 1)311·7	2183(6·364 – 1)59·37	2189(6·365 – 1) = 59·37
2195 = 6·366 – 1	2201 = 71·31	2207	2213	2219 = 317·7

Die Folge 2n – 1

Obwohl hier auch mit 2n – 1 und 2n + 1, oder 2n + 1 und 2n + 3, eine Doppelzeile angedeutet wird wie bei 6n + 1 und 6n – 1, wo dann tatsächlich in zwei Zeilen je 6 zu einer Zahl als Glied der Folge addiert wird, genügt es hier jeweils zu der Zahl als Glied der Folge 2 addieren um eine zusammenhängende Reihe zu bekommen, die nur je eine Zeile beim Durchlaufen der ungeraden Ziffern 1, 3, 5, 7, 9, hat. Es kann in diesem Fall nur von der Folge 2n – 1 gesprochen werden, statt den Folgen 2n + 1 und 2n + 3, denn 2n + 3 ist Glied der Folge mit n = 1, bzw. ist 3 = 2n + 1 wenn n = 1 ist oder $2n_1 + 1 = 2n_2 - 1$, wenn $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$.

Bei dieser Folge 2n + 1 bzw. 2n – 1 erübrigt sich die Doppelzeile und wird sie in eine Zeile fortlaufend geschrieben. Analog der Folge 6n + 1 (und 6n – 1) zeigt sich in der jeweiligen Spalte mit den Endziffern 1, 3, 5, 7, 9, jeweils eine zyklische Wiederholung im Abstand von 10, sodass man in der Zeile jeweils durch die Addition von 2 man um eine Stelle in der Zeile weiter kommt, und durch die Addition von 10 um eine ganze Zeile weiter springt. Ausgehend von dem eingangs aufgezeigten Satz, wonach alle Primzahlen p Glieder der Folge der Primanwartszahlen $P_{(n)} = P_{(n-1)} + 6$ sind[220] einerseits, und von dem zweiten Satz andererseits, wonach alle Multiplikationen von Primanwartszahlen mit einem Primanwartszahlen wieder in der Folge der Primanwartszahlen (6n + 1) liegt[221], so dass nur jene Primanwartszahlen P keine Primzahlen p sein können, die durch zwei Primanwartszahlen teilbar sind ($P_{(z)} = P_{(x)} \cdot P_{(y)}$), können die in der Folge 6n + 1 gewonnen

[220] Christof 4.
[221] Christof 5.

Erkenntnisse auf die Folge 2n + 1 übertragen werden, wobei sich das Vorgehen durch das Fehlen der Doppelzeile vereinfacht.

Aus den bisher Gesagten folgt, dass die paarweise Multiplizierung der Primanwartszahlen P untereinander immer Primanwartszahlen P ergibt, die sodann keine Primzahlen p sein können. Da sich die Primzahlen p als teilerfremd definieren[222] (außer durch sich selbst und durch die Zahl 1), sog gilt hier die Umkehrung, dass alle durch Multiplikation der Primanwartszahlen P berechneten Primanwartszahlen keine Primzahlen sein können. Bei dieser Multiplikation lässt sich allerdings eine gewisse Gesetzmäßigkeit anhand der vorgefertigten Tabelle für Folge 2n – 1 bzw. P + 2 sichtbar machen.

- Alle Primanwartszahlen, oder in diesem Fall alle natürlichen Zahlen, die mit der Primzahl 2 multipliziert werden, das sind sämtliche gerade Zahlen mit Ausnahme der Zahl 2 selbst, können keine Primzahlen sein, womit die Hälfte der unendlichen Folge der natürlichen Zahlen ausgeschieden ist. Deswegen wird hier die 2 nicht als Primzahl angeführt, bzw. aus ist schon nach diesem Prinzip aus der Tabelle ausgeschieden worden.
- Alle ungeraden Zahlen, die mit 5 enden, werden bei jeder Multiplikation, analog der Zahl 2, wieder eine Endziffer 5 ergeben, sind daher mit 5 teilbar, und so müssen weitere 20 % der Zahlen, bzw. ein Fünftel, aus der Folge der Primanwartszahlen ausgeschieden werden[223].
- Aus dem Satz, wonach alle paarweise Multiplikation von Primanwartszahlen ($P_{(z)} = P_{(x)} \cdot P_{(y)}$) neuerlich Primanwartszahlen so ergibt, dass das Ergebnis jeder Multiplikation mit zweier Primanwartszahlen, die keine Primzahl ergibt, mit einer weiteren Primanwartszahl multipliziert,

[222] Reiss/Schmieder 101 f.
[223] Mund (1934) 1: „Die Primzahl 5 die – wie alle folgende Primzahlen – zuerst in Quadrat ihrer Größe als Teiler auftritt, hat als erste natürlich den größten Wirkungserfolg; die von ihr teilbaren Primanwartszahlen in Nichtprimzahlen betragen daher 20%."

ebenfalls keine Primzahl sein kann, kann die Additionsregel abgeleitet werden, dass die Summe dieser Multiplikatoren ebenfalls keine Primzahlen sein können, obwohl sie sich in der Folge der Primanwartszahlen befinden. Wenn also 2n keine Primzahl ist, bzw. 2P, so P·2P Primzahl.

Aus der Spalte der Endziffer 5 $P_{(5)}$ ist ersichtlich, dass einerseits die Multiplikation 3·5 = 15 aber andererseits 2·5 = 10 die Addition 5 + 10 = 15 ebenfalls 15 ergibt. Diese einfache Identität hat zwar in der Spalte der Endziffer 5 eine Sonderstellung, denn alle Endziffern mit 5 multipliziert wieder die Endziffer 5 und damit die Teilbarkeit durch 5 ergeben, doch lässt sich das gleiche Prinzip auf die übrigen 4 Endziffern, allerdings, entsprechend der Zahl 4 der übrigen Endziffern, 1, 3, 7, 9, mit einem vierfachen Aufwand, analog zeigen.

So wie die Multiplikation mit 5 die Addition mit 2·5 = 10 als Entsprechung ermöglicht, so ermöglicht analog die Multiplikation 2·3 = 6 die Addition mit 6 bei 6n + 1. Daraus ergibt sich mit 6·5 = 30 auch die Addition und die Multiplikation mit 30 = 10·3. In der weiteren Folge zeigt sich, dass 10·P + P = P(10n + 1) keine Primzahl ist[224]. Beginnend mit der Primzahl 3 und zugleich Endziffer 3, dargestellte als multipliziert mit der Primzahl 1, ergibt 1·3 = 3 und 3 + 3·10 = 33 ist keine Primzahl. Analog ergibt 3·7 + 7·10 = 21 + 70 = 91 keine Primzahl.

In der nachstehenden Tabelle wurde die Folge P + 2 (aus 2n – 1 abgeleitet) je nach den Endziffern 1, 3, 5, 7, 9, in 5 Spalten so dargestellt, dass man in der Zeile jeweils schrittweise durch P + 2 und dazu senkrecht in der Spalte jeweils durch P + 10 je (einen Schritt) weiter kommt. Es wurde die Addition mit 10P jeweils mit verschiedenen Farben markiert, um so die Gesetzmäßigkeit auf einen Blick anschaulich zu machen:

$$3 \cdot 10 = 30$$

[224] Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3.

7·10 = 70
11·10 = 110
13·10 = 130
17·10 = 170
19·10 = 190
23·10 = 230
29·10 = 290
31·10 = 310

Die Ausgangszahlen der Zyklen werden mit Farbei markiert und in der Tabelle nach dem Schema $p_{(n)}\cdot 10 + p_{(x)}\cdot p_{(n)}$ eingesetzt.

1	3(·10 = 30)	5	7(·10 = 70)	9
11(·10 = 110)	13(·10 = 130)	15	17(·10 = 170)	19(·10 = 190)
21	23(·10 = 230)	25	27	29(·10 = 290)
31(·10 = 310)	33	35	37	39

Mit der bekannten Zahl (4) der möglichen Endziffern[225] kann die Zahl der Möglichkeiten begrenzt werden: 3·7 = 2**1** 3·9 = 2**7**, 9·7 = 6**3**, 9·1 = **9** (vgl 3·3 = **9** 9·9 = 8**1**, 7·7 = 4**9**, 1·1 = **1** für die

[225] Christof 3: „Vorderhand steht Folgendes fest: Eine Primzahl kann nur mit 1, 3, 7 oder 9 endigen; denn jede Zahl, die mit 0 oder einer geraden Ziffer endigt, ist wenigstens durch 2 und jede, die mit 5 endigt, durch diese Zahl teilbar.“

Quadrate[226]) und so gibt es zu jeder Primzahl 4 Möglichkeiten, die in den vier Spalten für die jeweilige Endziffer dargestellt ist.

- Um der Anschaulichkeit willen mit der höchsten Primzahl in der ersten Zeile, mit der Endziffer 7, beginnend, ergibt 1·7 = 7 und 10·7 = 70, sodass 70 + 7 = 77 keine Primzahl ist.
- Wenn nun fortlaufend in der Spalte zu 77 neuerlich 70 addiert wird, so ergibt 77 + 70 = 147 wiederum keine Primzahl… und 147 + 70 = 217 ebenfalls nicht, usw. So oft zum Zwischenresultat 30 addiert wird, also n30, fällt eine Primzahl aus[227].
- Wenn man statt 1 + 7 nunmehr 3 + 7 nimmt, befindet sich der gleiche Vorgang in einer anderen Spalte, ist aber ansonsten analog: 3·7 = 21 und 10·7 = 70, sodass 70 + 21 = 91 ist keine Primzahl, und 91 + 70 = 161 ebenfalls nicht, ebenso wie 161 + 70 = 231 keine Primzahl ist. Sooft zu diesen Gliedern der Folge 70 addiert wird, fällt eine Primzahl (aus der Folge 6n + 1 oder 6 – 1) aus.
- Entsprechend ist 7·7 = 49 keine Primzahl und 49 + 70 = 119 keine Primzahl, ebenso 49 + n70 = P.
- Analog ist 1·3 = 3 und 10·3 = 30, so dass 3 + 30 = 33 keine Primzahl ist[228].
- Wenn nun fortlaufend in der Spalte zu 33 neuerlich 30 addiert wird[229], so ergibt 33 + 30 = 63 wiederum keine Primzahl… und 63 + 30 = 93 ebenfalls nicht, usw.

[226] Trost 33: „Die Feststellung der Quadrate wird erleichtert, wenn man bedenkt, dass eine Quadratzahl mit einem der folgenden Ziffernpaare endet: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.“
[227] Vgl Mund (1934) 2; Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3.
[228] Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3.
[229] Vgl Mund (1934) 2.

Verallgemeinernd kann also gesagt werden, $p_x \cdot p_y + n10p_x = P$ keine Primzahl ist. Es ist in der nachstehenden Tabelle die Stelle $p_x \cdot p_y$ zu finden, und dann ist $n10p_x$ zu addieren, um die Lücken in der Folge $6n + 1 = P$ und $6n - 1 = P$ bzw. $P + 6$ zu finden. Auch in der Darstellung $2n - 1$ statt $6n + 1$ und $6 - 1$, lässt sich der dort transparentere Zusammenhang finden. Die Gegenrechnung bzw. Kontrolle ergibt, dass die Liste der maschinell berechneten Primzahlen[230] hier mit 1, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 … beginnend und rot markiert, in der Tabelle eingetragen und mit der Formel $p_x \cdot p_y + n10p_x = P = p_x(p_y + n10)$ gegen gerechnet, in der Liste der Primanwartszahlen ($6n \pm 1$) sämtliche Nichtprimzahlen ausscheidet. Es genügt aus der Folge $P = 2n - 1$ die Folge $P = p_x(p_y + n10)$ abzuziehen, so dass für den Rest $2n - 1 = p$ gilt, d. h.: $p_n = (2n - 1) - [\, p_x(p_y + n10)]$. Für die bekannten Primzahlen zurück gerechnet $p_x = 11, 3, 5, 7, 13, 17, 19$.

Eine weitere Vereinfachung liegt darin, dass es immer die ersten 4 – 5 Primzahlen sein können, auf die p_y begrenzt ist, nämlich um den jeweiligen Anfang der Folge mit $n10p_x$ zu finden.

Für die Primzahl p = 13 berechnen sich die Anfänge der jeweiligen Folge je Spalte wie folgt:

$$(13 \cdot 1) + (13 \cdot 10) = 143$$
$$(13 \cdot 3) + (13 \cdot 10) = 169 = 143 + (2 \cdot 13)$$
$$[(13 \cdot 5) + (13 \cdot 10) = 195] = 169 + (2 \cdot 13)$$
$$(13 \cdot 7) + (13 \cdot 10) = 221 = 195 + (2 \cdot 13)$$
$$(13 \cdot 9) + (13 \cdot 10) = 247 = 221 + (2 \cdot 13)$$

Von da an kann man jeweils $13 \cdot 10 = 130$ addieren, um eine Nichtprimzahl P in der Folge zu erhalten.

[230] Simmel 19; Wikipedia, Tabelle der Primzahlen, in: < URL >.

$$(1p + 10p) = P_a$$
$$(3p + 10p) = P_b$$
$$[(5p + 10p) = P_V]$$
$$(7p + 10p) = P_c$$
$$(9p + 10p) = P_d$$

Daraus folgt:

$$11p = P_a$$
$$13p = P_b = P_a + 2p$$
$$(15p = P_V) = P_b + 2p$$
$$17p = P_c = P_V + 2p$$
$$19p = P_d = P_c + 2p$$

Analog

$$11 \cdot 1 + 11 \cdot 10 = 121$$
$$11 \cdot 3 + 11 \cdot 10 = 143$$
$$(11 \cdot 5 + 11 \cdot 10 = 165)$$
$$11 \cdot 7 + 11 \cdot 10 = 187$$
$$11 \cdot 9 + 11 \cdot 10 = 209$$

Von da an kann jeweils $11 \cdot 10 = 110$ addiert werden, um je eine Nichtprimzahl P zu erhalten.

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 10 = 31$$
$$3 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 39$$

$$(3\cdot5 + 3\cdot10 = 45)$$
$$3\cdot7 + 3\cdot10 = 51$$
$$3\cdot9 + 3\cdot10 = 57$$

Von da an kann jeweils 30 addiert werden[231].

$$7\cdot1 + 7\cdot10 = 77$$
$$7\cdot3 + 7\cdot10 = 91$$
$$(7\cdot5 + 7\cdot10 = 105)$$
$$7\cdot7 + 7\cdot10 = 119$$
$$7\cdot9 + 7\cdot10 = 133$$

Man addiere jeweils 70 zum Ergebnis.

$$17\cdot1 + 17\cdot10 = 187$$
$$17\cdot3 + 17\cdot10 = 221$$
$$(17\cdot3 + 17\cdot10 = 255)$$
$$17\cdot7 + 17\cdot10 = 289$$
$$17\cdot9 + 17\cdot10 = 323$$

Von hier aus sind wieder jeweils $10\cdot17 = 170$ zu addieren.

$$19\cdot1 + 19\cdot10 = 209$$
$$19\cdot3 + 19\cdot10 = 247$$
$$(19\cdot5 + 19\cdot10 = 285)$$

[231] Vgl Mund (1934) 2; Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3.

$$19 \cdot 7 + 19 \cdot 10 = 323$$
$$19 \cdot 9 + 19 \cdot 10 = 361$$

Es können von da an jeweils $10 \cdot 19 = 190$ addiert werden.

$$p(1 + 10) = 11p = P_a$$
$$p(3 + 10) = 13p = P_b$$
$$(p(5 + 10) = 15p = P_V)$$
$$p(7 + 10) = 17p = P_c$$
$$p(9 + 10) = 19p = P_d$$

Es wurde aus den Primzahlen der ersten Zeile, die Glieder der Folge $2n - 1$ sind[232], die Primzahlen der zweiten Zeile der gleichen Folge berechnet.

$$11p = P_a$$
$$13p = P_b$$
$$(15p = P_V)$$
$$17p = P_c$$
$$19p = P_d$$

Von der zweiten Zeile an allerdings gilt die Formel l $p_x \cdot p_y + n10p_x = P = p_x(p_y + n10)$. Es gibt also eine zweite, abgeleitete Folge der Nichtprimzahlen, senkrecht in 5 Spalten zu der Folge in der Zeile. Dabei ist $P_b = P_a + 2$; $P_V = P_b + 2$; $P_c = P_V + 2$; $P_d = P_c + 2$. Nachdem die senkrechte Teilfolge n10 ausgelotet und bestätigt wurde, kann wieder auf die waagerechte Zeile und deren Aufbau zurückgegriffen werden, und daraus den Aufbau der senkrechten Spalte abzuleiten. Klar erkennbar

[232] Trost 28 ff.

war die Struktur, dass eine einmal durchbrochene Unteilbarkeit sich fortan wellenartig zyklisch fortpflanzt, etwa analog der zyklischen Fortpflanzung der Reihe der Primzahlen. So wie in der Spalte die multiplikative Größe (Produkt) n10p zur additiven Größe wird, so wird auch in der Zeile das Produkt der ersten Primzahlen 2·3 = 6 zur additiven Größe. Auf der einen Seite steht die Folge der Primzahlen p mit $p_n + 6 = p_{n+1}$ (zB 1, 7, 13, 19, …) und auf der anderen Seite die Folge der Nichtprimzahlen P mit $P_n + 6 = P_{n+1}$ wie zB 2·3 = 6 und 3 + 6 = 9; 9 + 6 = 15; 15 + 6 = 21; 21 + 6 = 27; 27 + 6 = 33; 33 + 6 = 39; 39 + 6 = 45 … Diese nun sich endlos so lange fortsetzende Reihe, ergibt bei einer fünfgliedrigen Reihe mit Schritten von 2 + 3 = 6 in der jeweiligen Spalte 5·6 = 30. Das ist also p + 10 in der Spalte statt p + 6 in der Zeile. Mit 6 als dem jeweiligen Unterschied in der Zeile und mit 10 als dem jeweiligen Unterschied in der Spalte ergibt sich der Unterschied zwischen Zeile und Spalte mit 10 – 6 = 4. Und wenn 4 + 6 = 10 das eine Ergebnis ist, so ist das andere Ergebnis 6 – 4 = 2, die Glieder unserer Folge. Damit wären die Folgen 6n + 1; 4n + 1; 2n – 1 im Einzelnen und gemeinsam erfasst und ineinander überführt[233]. Denn die Folge 2n – 1 ist erst von 6n + 1 her zugänglich, und die Senkrechte mit n(6 + 4) = n10 zeigt die innere Struktur mit 2n + 1 bzw. mit 2n – 1.

Ähnlich wie die Folge mit 6n ± 1 bei 5 als Endziffer zeigt, dass dadurch, dass alles mit der Endziffer 5 durch 5 teilbar ist[234], wobei ursprünglich 5 eine Primzahl ist, so zeigt sich eigentlich schon vorher, dass mit der Primzahl 2 analog eine Folge beginnt[235], wo alle gerade Zahlen, die durch 2 teilbar sind, sich – aus dieser spiegelverkehrter Sicht – als mit 2 multipliziert darstellen. Von hier ausgehend kann die bei 6n ± 1 im Detail nachvollzogen werden, dass zunächst 5 als Primzahl vorkommt und gleich danach alles mit 5 multipliziert keine Primzahl mehr ist. Das gilt analog für die Primzahl 2, die mit der Primzahl 3 multipliziert 6 ergibt: 2·3 = 6 folgt sodann dem Gesetz, dass sich analog schon

[233] Kowol 99; vgl Trost 11.
[234] Trost 43 f.
[235] Kowol 42 ff.

bei der Bildung von 6 als Einheit aus 2·3 zeigt[236]. So wie mit 1 beginnend alle Zahlen der Folge mit 2 multipliziert die gerade Zahlen ergeben und so schon aus der Folge Primanwartszahlen auffällt, so folgt bei den Multiplikationen mit den hierauf folgenden Primzahlen dass auch alle Vielfachen von 3, so wie alle Vielfachen von 2, oder so wie alle Vielfachen von 5, keine Primzahlen sind. Die Sekundärfolge setzt sich fort, und nach dem gleichen Prinzip werden alle Primzahlen zunächst mit 2, und dann mit allen anderen Primzahlen multipliziert. So wie 2·3 = 6 als Periode erhalten bleibt und sich der gesamten Folge aufgeprägt, so auch analog mit 2·5, 2·7, 2·11, 2·13, 2·17, 2·19, 2·23, 2·29, 2·31 usw.

Die Folge der Primzahlen setzt sich demnach in der Gesamtheit der ganzen Zahlen als Differenz der Zahlen zusammen, die sich nicht durch Multiplikation der bisherigen Primzahlen bestimmen lassen.

- Dadurch, dass die Primzahlen eine ungerade Zahl sein müssen, ergibt die Multiplikation mit 2, dass 50 % der ganzen Zahlen nicht Primzahl sein kann, sondern jede zweite Zahl aus der Folge der Primzahlen ausfällt[237].
- Es ist auch noch üblich, alle ungeraden Zahlen zunächst noch als Primanwartszahlen anzusehen, und dann aufgrund der Eigenheit, dass alle Endziffern mit 5 durch 5 teilbar sind, bzw. jede Multiplikation mit 5 die Endziffer 5 ergibt, 20 % bzw. 1/5 der ungeraden Zahlen als Nichtprimzahlen auszuscheiden[238].
- Weniger üblich aber genau so folgerichtig ist, alle ungeraden Zahlen, die durch die Multiplikation mit 3 entstehen, und immer Glied der Folge der Primanwartszahlen sind, d. h. eine ungerade Zahl, das sind 1/3 bzw. 33,33... % der Primanwartszahlen, analog auszuscheiden.

[236] Kowol 43.
[237] Mund (1934) 1.
[238] Trost 43.

- Dadurch, dass diese erste Primzahlen 2 und 3 als Multiplikatoren aus der Gesamtheit der ganzen Zahlen als Primzahlen ausfallen, verbleibt eine Menge der ganzen ungeraden Zahlen, die dem Gesetz 6n + 1 folgt[239].
- Als nun analog die ungerade Zahl 5 als Multiplikator (aus der Anwartschaft auf eine Primzahl) ausfällt, wird das als Ausnahme missdeutet, weil 5 die einzige gerade Zahl ist, die bei allen Multiplikationen die Endziffer 5 und daher die Teilbarkeit bedingt[240]. Die Multiplizierung mit 7, als nächste größere Primzahl, folgt jedoch dem gleichen Gesetz wie die Multiplikation mit 2, 3 und 5.
- Und dann analog die Multiplikation mit jeder weiteren ungeraden Zahl[241].

Die (teilweise) Lösung ist also der Umstand, dass nach der Multiplikation mit 2 die Gesamtheit aller geraden Zahlen ausfällt, weil die gerade Zahlen bei Multiplikation immer eine gerade Zahl ergeben, und daher die Anwartschaft auf Primzahl auf die ungeraden Zahlen beschränkt bleibt. Das Gesetz also, dass die Multiplikation einer jeden Zahl mit einer geraden Zahl eine gerade Zahl ergibt, ist hinreichend, um die Primzahlen mit einer Genauigkeit von 50 % zu beschreiben. Diese Genauigkeit kann dadurch um 20 % gesteigert werden, dass die ungerade Zahl 5 bei der Multiplikation mit n (n > 1), analog den geraden Zahlen, immer durch 5 teilbar ist.

Ein anderer Teil der Lösung ist, dass einerseits die Multiplikation auch als Addition dargestellt werden kann, und andererseits in diesem Fall sogar zum Nachweis der Primzahlen bzw. in der Regel für Primzahlen stets die Addition mit der Multiplikation kombiniert wird: 6n + 1, 4n + 1, 3n + 2, 2n – 1. Wenn man zB 2·3 = 3 + 3 schreibt, dass die gezeigten Formeln wie 6n + 1 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6… + 1 lediglich eine Variante der Addition sind, aber alles was durch Multiplikation erreicht

[239] Christof 4 f.
[240] Christof 4.
[241] Kowol 42 ff.

wird, kann auch durch Addition beschrieben werden. Das hat den Vorteil, dass das Gesetz, dass die Multiplikation in Addition überführbar ist und umgekehrt, einen Rückschluss von den Gesetzen der Addition auf die Multiplikation erlaubt. Die Multiplikation ist zB in der nachstehenden Tabelle zugleich als Addition darstellbar. Anders als in der Multiplikation, lassen sich in der Addition leichter, und auf jeden Fall anders und andere Regel finden. Diese Regel der Addition, die bei der Multiplikation nicht so offen zutage treten, gilt es zur Geltung zu bringen. So zB die eingangs zu diesem vorangestellte Multiplikation mit 2 in der Tabelle als Addition mit 2 dargestellt werden. Und so weiter und so fort.

Dabei tritt die Regel der Multiplikation mit 10 zunächst als Additionsregel zutage. Ebenso die Additionsregel[242] mit 30 und dann immer höher[243], als Gesetz für alle Glieder der Folge. Bei der Addition werden allerdings neue Regeln bekannt, nachdem durch Multiplikation das Feld der Möglichkeiten auf die ungeraden Zahlen begrenzt wurde. Ein wichtiger Anhaltspunkt und Lösungsansatz der Ambivalenz von Multiplikation und Addition ist, dass analog der Abgrenzung der geraden Zahlen durch die Multiplikation, innerhalb den ungeraden Zahlen bei jeder Multiplikation mit 5 eine Abgrenzung erfolgt. Wenn man nun diese Regel der Multiplikation in der Addition mit berücksichtigt, eröffnen sich neue Perspektiven.

Es scheitert daran vorweg der klassische Nachweis der angeblichen Unendlichkeit der Primzahlen[244], wonach die Multiplikation aller Primzahlen[245] + 1, d. h. $(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$ = immer eine Primzahl sei[246]. Das wären

---

[242] Berger/Leitner, AK der Algorithmik 5, in: < URL > 3.
[243] Vgl Mund (1934) 2; Schwarz, Wolfgang (1969) 135.
[244] Schwarz, Wolfgang (1969) 135; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Pieper 23; Arslanagić/Janous 2: „(1) [*Euklid*] Man betrachte nun die Zahl *Pn* = *p*1· *p*2·… ·*pn* + 1. Jeder Primteiler *p* von *Pn* muss aber von *p*1, …, *pn* vershieden sein. (Sonst müsste *p* die Zahl 1 teilen!) Damit ergibt sich aber, dass es eine weitere Primzahl geben muss."
[245] Wikipedia, Primorial, In: Wikipedia, Versions-ID: 54990259, 6. Januar 2009, < URL >.

2 + 1 = 3
2·3 + 1 = 7
2·3·5· + 1 = 31
2·3·5·7 + 1 = 211
2·3·5·7·11 + 1 = 2311
2·3·5·7·11·13 + 1 = 30031
2·3·5·7·11·13·17 + 1 = 510511,
… usw.

wobei sich zeigt, dass ausgerechnet das fünfte Glied in der Folge, 30031 = 59·509 keine Primzahl ist[247].

„Betrachtet man den Beweis etwas genauer, so zeigt sich zweierlei: […] Auch heute benützt man üblicherweise diesen euklidischen Gedankengang, um die Unendlichkeit der Primzahlmengen zu zeigen, doch schränkt man – merkwürdigerweise – die vorgelegte Anzahl der Primzahlen meinst ein. […] Die ersten fünf Werte n = 2 + 1 = 3, n = 2·3 + 1 = 7, n = 2·3·5 + 1 = 31, n = 2·3·5·7 + 1 = 211 und n = 2·3·5·7·11 + 1 = 2311 sind nämlich, da sie keinen Primteiler < $\sqrt{n}$ besitzen, sämtlich prim. Aufgrund dessen könnte man vermuten, dass n stets Primzahl ist. Doch gibt es unter den ersten 1000

[246] Landau I 3 f: Kracher 19 f; vgl Luschny 2 f < URL >: „Die Primfakutltät ist das Produkt aller Primzahlen kleiner oder gleich n. […] Die Primfakultät ist eine mathematisch natürliche Definition für das Produkt von Primzahlen. […] Das Primorial ist die Einschränkung der Primfakultät auf die Primzahlen P […] Diese Form der Primfakultät ist im Zusammenhang mit der Frage, ob ein $p_{\#}$ + 1 bzw. $p_{\#}$ – 1 eine Primzahl ist, weit verbreitet."
[247] Pieper 23; Bartholomé/Rung/Kern 82 f.

Zahlen nur r nur noch zwei, nämlich r = 31 und r = 379, für welche das entsprechende n prim ist. Für alle anderen r dagegen ist n zusammengesetzt“[248].

Bei der Multiplikation einer ungeraden Zahl mit einer ungeraden Zahl kommen zwar nur die Endziffern der ungeraden Zahlen (1, 3, 5, 7, 9) in Frage, jedoch hat 5 eine Sonderstellung insofern, als alles mit 5 multipliziert die Endziffer 5 ergibt, während alle in allen anderen Multiplikationen die Endziffer 5 nicht vorkommt[249]:

> „Im Anschluss an die zahlentheoretischen Überlegungen von Marin Mersenne (1588-1648) gelangte Fermat zur weiteren Vermutung, dass alle Zahlen von der Form
>
> $$\mathbf{2^{2^k} + 1}$$
>
> prim seien. Dies stimmt zwar für die Werte von k = 1, 2, 3, 4, doch schon für k = 5 ergibt sich die Zahl p = 4294967297, von welcher Euler nachwies, dass sie den Teiler 641 besitzt und folglich keine Primzahl ist.“

Bei der Umrechnung der Multiplikation in Addition kommt dieses Gesetz nicht zum Vorschein. Dafür kommen aber in der Addition andere Gesetze zum Vorschein, wie dass in der Tabelle die Zeilen auch bei der Addition die Fünferzyklen, wenn auch in einer anderen Form, durchlaufen, und zwischen der Wiederholung einer jeder Endziffer immer die Zahl 10 = 2·5 liege. Diese Regel der Addition wird aber erst in der Multiplikation plausibel, denn das ist eine Regel der Multiplikation und nicht der Addition. Auch wenn das erst in der Addition zum Vorschein kommt. Quod erat demonstrandum. … Man könnte höchstens noch meinen, dass die Unendlichkeit der Primzahlen mindestens um ein Fünftel kürzer sein, als ursprünglich berechnet.

---

[248] Kowol 39 f.
[249] Fellmann/Jenni/Burckhardt 35 f.

$P_{\{1\}}$	$P_{\{3\}}$	$P_{\{5\}}$	$P_{\{7\}}$	$P_{\{9\}}$

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99

101	103	105	107	109
111	113	115	117	119
121	123	125	127	129
131	133	135	137	139
141	143	145	147	149
151	153	155	157	159
161	163	165	167	169
171	173	175	177	179
181	183	185	187	189
191	193	195	197	199

201	203	205	207	209
211	213	215	217	219
221	223	225	227	229
231	233	235	237	239
241	243	245	247	249
251	253	255	257	259
261	263	265	267	269

271	273	275	277	279
281	283	285	287	289
291	293	295	297	299

301	303	305	307	309
311	313	315	317	319
321	323	325	327	329
331	333	335	337	339
341	343	345	347	349
351	353	355	357	359
361	363	365	367	369
371	373	375	377	379
381	383	385	387	389
391	393	395	397	399

401	403	405	407	409
411	413	415	417	419
421	423	425	427	429
431	433	435	437	439
441	443	445	447	449
451	453	455	457	459
461	463	465	467	469
471	473	475	477	479
481	483	485	487	489
491	493	495	497	499

501	503	505	507	509
511	513	515	517	519
521	523	525	527	529
531	533	535	537	539
541	543	545	547	549

551	553	555	557	559
561	563	565	567	569
571	573	575	577	579
581	583	585	587	589
591	593	595	597	599

601	603	605	607	609
611	613	615	617	619
621	623	625	627	629
631	633	635	637	639
641	643	645	647	649
651	653	655	657	659
661	663	665	667	669
671	673	675	677	679
681	683	685	687	689
691	693	695	697	699

701	703	705	707	709
711	713	715	717	719
721	723	725	727	729
731	733	735	737	739
741	743	745	747	749
751	753	755	757	759
761	763	765	767	769
771	773	775	777	779
781	783	785	787	789
791	793	795	797	799

801	803	805	807	809
811	813	815	817	819
821	823	825	827	829

831	833	835	837	839
841	843	845	847	849
851	853	855	857	859
861	863	865	867	869
871	873	875	877	879
881	883	885	887	889
891	893	895	897	899

901	903	905	907	909
911	913	915	917	919
921	923	925	927	929
931	933	935	937	939
941	943	945	947	949
951	953	955	957	959
961	963	965	967	969
971	973	975	977	979
981	983	985	987	989
991	993	995	997	999

1001	1003	1005	1007	1009
1011	1013	1015	1017	1019
1021	1023	1025	1027	1029
1031	1033	1035	1037	1039
1041	1043	1045	1047	1049
1051	1053	1055	1057	1059
1061	1063	1065	1067	1069
1071	1073	1075	1077	1079
1081	1083	1085	1087	1089
1091	1093	1095	1097	1099

1101	1103	1105	1107	1109

1111	1113	1115	1117	1119
1121	1123	1125	1127	1129
1131	1133	1135	1137	1139
1141	1143	1145	1147	1149
1151	1153	1155	1157	1159
1161	1163	1165	1167	1169
1171	1173	1175	1177	1179
1181	1183	1185	1187	1189
1191	1193	1195	1197	1199

1201	1203	1205	1207	1209
1211	1213	1215	1217	1219
1221	1223	1225	1227	1229
1231	1233	1235	1237	1239
1241	1243	1245	1247	1249
1251	1253	1255	1257	1259
1261	1263	1265	1267	1269
1271	1273	1275	1277	1279
1281	1283	1285	1287	1289
1291	1293	1295	1297	1299

1301	1303	1305	1307	1309
1311	1313	1315	1317	1319
1321	1323	1325	1327	1329
1331	1333	1335	1337	1339
1341	1343	1345	1347	1349
1351	1353	1355	1357	1359
1361	1363	1365	1367	1369
1371	1373	1375	1377	1379
1381	1383	1385	1387	1389
1391	1393	1395	1397	1399

1401	1403	1405	1407	1409
1411	1413	1415	1417	1419
1421	1423	1425	1427	1429
1431	1433	1435	1437	1439
1441	1443	1445	1447	1449
1451	1453	1455	1457	1459
1461	1463	1465	1467	1469
1471	1473	1475	1477	1479
1481	1483	1485	1487	1489
1491	1493	1495	1497	1499

1501	1503	1505	1507	1509
1511	1513	1515	1517	1519
1521	1523	1525	1527	1529
1531	1533	1535	1537	1539
1541	1543	1545	1547	1549
1551	1553	1555	1557	1559
1561	1563	1565	1567	1569
1571	1573	1575	1577	1579
1581	1583	1585	1587	1589
1591	1593	1595	1597	1599

1601	1603	1605	1607	1609
1611	1613	1615	1617	1619
1621	1623	1625	1627	1629
1631	1633	1635	1637	1639
1641	1643	1645	1647	1649
1651	1653	1655	1657	1659
1661	1663	1665	1667	1669
1671	1673	1675	1677	1679

1681	1683	1685	1687	1689
1691	1693	1695	1697	1699

1701	1703	1705	1707	1709
1711	1713	1715	1717	1719
1721	1723	1725	1727	1729
1731	1733	1735	1737	1739
1741	1743	1745	1747	1749
1751	1753	1755	1757	1759
1761	1763	1765	1767	1769
1771	1773	1775	1777	1779
1781	1783	1785	1787	1789
1791	1793	1795	1797	1799

1801	1803	1805	1807	1809
1811	1813	1815	1817	1819
1821	1823	1825	1827	1829
1831	1833	1835	1837	1839
1841	1843	1845	1847	1849
1851	1853	1855	1857	1859
1861	1863	1865	1867	1869
1871	1873	1875	1877	1879
1881	1883	1885	1887	1889
1891	1893	1895	1897	1899

1901	1903	1905	1907	1909
1911	1913	1915	1917	1919
1921	1923	1925	1927	1929
1931	1933	1935	1937	1939
1941	1943	1945	1947	1949
1951	1953	1955	1957	1959

1961	1963	1965	1967	1969
1971	1973	1975	1977	1979
1981	1983	1985	1987	1989
1991	1993	1995	1997	1999

2001	2003	2005	2007	2009
2011	2013	2015	2017	2019
2021	2023	2025	2027	2029
2031	2033	2035	2037	2039
2041	2043	2045	2047	2049
2051	2053	2055	2057	2059
2061	2063	2065	2067	2069
2071	2073	2075	2077	2079
2081	2083	2085	2087	2089
2091	2093	2095	2097	2099

2101	2103	2105	2107	2109
2111	2113	2115	2117	2119
2121	2123	2125	2127	2129
2131	2133	2135	2137	2139
2141	2143	2145	2147	2149
2151	2153	2155	2157	2159
2161	2163	2165	2167	2169
2171	2173	2175	2177	2179
2181	2183	2185	2187	2189
2191	2193	2195	2197	2199

2201	2203	2205	2207	2209
2211	2213	2215	2217	2219
2221	2223	2225	2227	2229
2231	2233	2235	2237	2239

2241	2243	2245	2247	2249
2251	2253	2255	2257	2259
2261	2263	2265	2267	2269
2271	2273	2275	2277	2279
2281	2283	2285	2287	2289
2291	2293	2295	2297	2299

2301	2303	2305	2307	2309
2311	2313	2315	2317	2319
2321	2323	2325	2327	2329
2331	2333	2335	2337	2339
2341	2343	2345	2347	2349
2351	2353	2355	2357	2359
2361	2363	2365	2367	2369
2371	2373	2375	2377	2379
2381	2383	2385	2387	2389
2391	2393	2395	2397	2399

2401	2403	2405	2407	2409
2411	2413	2415	2417	2419
2421	2423	2425	2427	2429
2431	2433	2435	2437	2439
2441	2443	2445	2447	2449
2451	2453	2455	2457	2459
2461	2463	2465	2467	2469
2471	2473	2475	2477	2479
2481	2483	2485	2487	2489
2491	2493	2495	2497	2499

2501	2503	2505	2507	2509
2511	2513	2515	2517	2519

2521	2523	2525	2527	2529
2531	2533	2535	2537	2539
2541	2543	2545	2547	2549
2551	2553	2555	2557	2559
2561	2563	2565	2567	2569
2571	2573	2575	2577	2579
2581	2583	2585	2587	2589
2591	2593	2595	2597	2599

2601	2603	2605	2607	2609
2611	2613	2615	2617	2619
2621	2623	2625	2627	2629
2631	2633	2635	2637	2639
2641	2643	2645	2647	2649
2651	2653	2655	2657	2659
2661	2663	2665	2667	2669
2671	2673	2675	2677	2679
2681	2683	2685	2687	2689
2691	2693	2695	2697	2699

2701	2703	2705	2707	2709
2711	2713	2715	2717	2719
2721	2723	2725	2727	2729
2731	2733	2735	2737	2739
2741	2743	2745	2747	2749
2751	2753	2755	2757	2759
2761	2763	2765	2767	2769
2771	2773	2775	2777	2779
2781	2783	2785	2787	2789
2791	2793	2795	2797	2799

2801	2803	2805	2807	2809
2811	2813	2815	2817	2819
2821	2823	2825	2827	2829
2831	2833	2835	2837	2839
2841	2843	2845	2847	2849
2851	2853	2855	2857	2859
2861	2863	2865	2867	2869
2871	2873	2875	2877	2879
2881	2883	2885	2887	2889
2891	2893	2895	2897	2899

2901	2903	2905	2907	2909
2911	2913	2915	2917	2919
2921	2923	2925	2927	2929
2931	2933	2935	2937	2939
2941	2943	2945	2947	2949
2951	2953	2955	2957	2959
2961	2963	2965	2967	2969
2971	2973	2975	2977	2979
2981	2983	2985	2987	2989
2991	2993	2995	2997	2999

Die Tabelle zeigt die ungeraden Zahlen bis 3.000 und rot im Feld markiert die Primzahlen. Die Nichtprimzahlen, die durch die Multiplikation von Primzahlen entstehen, wurden durch andere Farben markiert, um Regelmäßigkeit besser erkennbar zu machen.

Die Folge 4n + 1

Euler hat den Satz von Fermat bewiesen, dass $x^2 + y^2$ eine Primzahl wenn sie sich die Formel als $p = 4n + 1 = x^2 + y^2$ schreiben lässt.

Jede ganze Zahl lässt sich in der Form $6n - 2$, $6n - 1$, $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$ oder $6n + 3$ darstellen, wobei n eine ganze Zahl ist.

- Zahlen der Form $6n - 2$, $6n$ und $6n + 2$ sind durch 2 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Zwei keine Primzahlen sein.
- Zahlen der Form $6n + 3$ sind durch 3 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Drei auch keine Primzahlen sein.
- Somit haben alle Primzahlen über 3 die Form $6n - 1$ oder $6n + 1$.
- Daraus folgt, dass jeder Primzahlzwilling mit Ausnahme von (3, 5) die Darstellung $(6n - 1, 6n + 1)$ hat[250].
- Des weiteren folgt auch $(6n - 1)\cdot(6n + 1) + 1 = 36n^2 - 1 + 1 = 36n^2 = (6n)^2$.
- Durch $6n_a - 1 = 4n_b + 1$ ist allerdings eine andere Schreibweise möglich[251], wie das für Quadrate gebräuchlich wurde.

Euler hat nach Fermat die Form $p = 4n + 1 = x^2 + y^2$ für Primzahlen bevorzugt[252], und hat darum die eigentlich allgemeingültige Form $6n \pm 1$ vernachlässigt.

---

[250] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[251] Tietze 3.
[252] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f; vgl Landau I 440 ff.

Ungerade Zahlen > 28 sind darstellbar in der Form $30n + 1$, $30n + 3$, $30n + 5$, $30n + 7$, ..., $30n + 25$, $30n + 27$, $30n + 29 = 30n - 1$. Nichtprimzahlen[253] haben die Formen $30n + 3$, $30n + 5$, $30n + 9$, $30n + 15$, $30n + 21$, $30n + 25$ und $30n + 27$, weil diese 7 Formen stets durch 3 oder durch 5 teilbar sind[254]. Jeder Primzahlzwilling > 7 hat eine der drei Formen[255]: $(30n - 1, 30n + 1)$, $(30n + 11, 30n + 13)$, $(30n + 17, 30n + 19)$. bzw. die letztere Darstellung, um die Symmetrie zu $(30n + 11, 30n + 13)$ zu verdeutlichen, alternativ geschrieben als $(30n - 13, 30n - 11)$, oder Primzahlen > 7 haben nicht die Formen $30n + 11$, $30n + 13$, $30n + 17$, $30n + 19$, $30n + 29$, $30n + 21$. Es bleiben daher:

$$(30n - 1, 30n + 1)$$
$$(30n + 11, 30n + 13)$$

und/oder allenfalls

$$(30n - 11, 30n - 13)$$

als die möglichen Formen für Primzahlzwillinge[256]:

---

[253] Waldal 81; vgl Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.
[254] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >: „Mit Ausnahme von n=1 ist die letzte Ziffer eines n eine 0, 2, 3, 5, 7 oder eine 8, da im anderen Fall eine der beiden Zahlen $6n - 1$ bzw. $6n + 1$ durch 5 teilbar und damit keine Primzahl wäre."
[255] Waldal 81.
[256] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >: „Mit einer ganzen Zahl n lässt sich jede ungerade Zahl in der Form $30n + 1$, $30n + 3$, $30n + 5$, $30n + 7$, ..., $30n + 25$, $30n + 27$, $30n + 29$ (letztere auch als $30n - 1$) darstellen. Primzahlen (außer 3 und 5) sind aber nie von einer der 7 Formen $30n + 3$, $30n + 5$, $30n + 9$, $30n + 15$, $30n + 21$, $30n + 25$ und $30n + 27$, da Zahlen dieser 7 Formen stets durch 3 oder durch 5 teilbar sind. Daher hat jedes Primzahlzwillingspaar (außer (3,5) und (5,7)) mit einer ganzen Zahl n genau eine der drei Formen: $(30n - 1, 30n + 1)$, $(30n + 11, 30n +$

$$30n \pm 1,$$
$$30n \pm 11,$$
$$30n \pm 13,$$

wobei das Verhältnis zwischen den Zahlen 1, 11 und 13 mit 6n ± 1 bei n = 2 zu berechnen ist. Es ist ersichtlich, dass es bei 30n + 17 und 30n + 19 eine Lücke gibt.

Oder[257]:

$$30n + 11,\ 30n + 13$$
$$30n + 17,\ 30n + 19$$
$$30n + 29,\ 30n + 31$$

Es ist ersichtlich, dass bei einer fortlaufenden Folge eine Lücke bei 30n + 5 und 30n + 7 gibt, so wie in der anderen Schreibweise bei 30n + 17 und 30n + 19 eine Lücke war, denn die übrigen Glieder sind zugleich Glieder der Folge 6n + 1 oder 6n – 1.

Mann kann auch mit der Formel 6n ± 1 umrechnen:

$$30n - 1 = 6\cdot 5n - (6\cdot 0 + 1) = 6\cdot 5n - 6\cdot 0 - 1 = 6\cdot(5n - 0) - 1$$
$$30n - 11 = 6\cdot 5n - (6\cdot 2 - 1) = 6\cdot 5n - 6\cdot 2 + 1 = 6\cdot(5n - 2) + 1$$
$$30n - 13 = 6\cdot 5n - (6\cdot 2 + 1) = 6\cdot 5n - 6\cdot 2 - 1 = 6\cdot(5n - 2) - 1$$

---

13), (30*n* + 17, 30*n* + 19). bzw. die letztere Darstellung, um die Symmetrie zu (30*n* + 11, 30*n* + 13) zu verdeutlichen, alternativ geschrieben als (30*n* – 13, 30*n* – 11).“

[257] Waldal 81.

$$30n + 1 = 6\cdot5n + (6\cdot0 + 1) = 6\cdot5n + 6\cdot0 + 1 = 6\cdot(5n + 0) + 1$$
$$30n + 11 = 6\cdot5n + (6\cdot2 - 1) = 6\cdot5n + 6\cdot2 - 1 = 6\cdot(5n + 2) - 1$$
$$30n + 13 = 6\cdot5n + (6\cdot2 + 1) = 6\cdot5n + 6\cdot2 + 1 = 6\cdot(5n + 2) + 1$$

Auf die Formel 6n ± 1 umgerechnet kann darin n die Werte 5n ± 0 und 5n ± 2 annehmen.

$$P = 6\cdot(5n - 0) - 1$$
$$P = 6\cdot(5n - 2) + 1$$
$$P = 6\cdot(5n - 2) - 1$$
$$P = 6\cdot(5n + 0) + 1$$
$$P = 6\cdot(5n + 2) - 1$$
$$P = 6\cdot(5n + 2) + 1$$

Damit kann die ursprüngliche Formel p = 6n ± 1 nunmehr die Werte p = 6(5n) ± 1 und p = 6(5n ± 2) ± 1 haben, …allerdings muss 5n ≠ 7m ± 1; 5n ≠ 11m ± 2; 5n ≠ 13m ± 2 oder 5n ± 2 ≠ 7m ± 1; 5n ± 2 ≠ 11m ± 2; 5n ± 2 ≠ 13m ± 2 sein[258].

$$5n - 0 = 7m - 1$$
$$5n - 2 = 7m - 1$$
$$5n - 2 = 7m + 1$$
$$5n + 0 = 7m + 1$$
$$5n + 2 = 7m + 1$$
$$5n + 2 = 7m - 1$$

$$5n - 0 = 11m - 2$$

[258] Christof 5.

$$5n - 2 = 11m - 2$$
$$5n - 2 = 11m + 2$$
$$5n + 0 = 11m + 2$$
$$5n + 2 = 11m + 2$$
$$5n + 2 = 11m - 2$$

$$5n - 0 = 13m - 2$$
$$5n - 2 = 13m - 2$$
$$5n - 2 = 13m + 2$$
$$5n + 0 = 13m + 2$$
$$5n + 2 = 13m + 2$$
$$5n + 2 = 13m - 2$$

$$5n = 7m - 1$$
$$5n = 7m + 1$$
$$5n = 7m + 3$$
$$5n = 7m + 1$$
$$5n = 7m - 1$$
$$5n = 7m - 3$$

$$5n = 11m - 2$$
$$5n = 11m - 0$$
$$5n = 11m + 4$$
$$5n = 11m + 2$$
$$5n = 11m + 0$$
$$5n = 11m - 4$$

$$5n = 13m - 2$$
$$5n = 13m - 0$$
$$5n = 13m + 4$$
$$5n = 13m + 2$$
$$5n = 13m + 0$$
$$5n = 13m - 4$$

Die Zahlen 7, 11, 13, lassen sich auch als $7 = 6 \cdot 1 + 1$; $11 = 6 \cdot 2 - 1$ und $13 = 6 \cdot 2 + 1$ darstellen

$$5n = (6 \cdot 1 + 1)m - 1$$
$$5n = (6 \cdot 1 + 1)m + 1$$
$$5n = (6 \cdot 1 + 1)m + 3$$
$$5n = (6 \cdot 1 + 1)m + 1$$
$$5n = (6 \cdot 1 + 1)m - 1$$
$$5n = (6 \cdot 1 + 1)m - 3$$

$$5n = (6 \cdot 2 - 1)m - 2$$
$$5n = (6 \cdot 2 - 1)m - 0$$
$$5n = (6 \cdot 2 - 1)m + 4$$
$$5n = (6 \cdot 2 - 1)m + 2$$
$$5n = (6 \cdot 2 - 1)m + 0$$
$$5n = (6 \cdot 2 - 1)m - 4$$

$$5n = (6 \cdot 2 + 1)m - 2$$
$$5n = (6 \cdot 2 + 1)m - 0$$

$$5n = (6\cdot 2 + 1)m + 4$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m + 2$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m + 0$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m - 4$$

Das kann weiter beim Komponenten 7 umgerechnet werden in

$$5n = (6\cdot 1 + 1)m - 1 = 6m + 1m - 1 = 6m + 1(m - 1)$$
$$5n = (6\cdot 1 + 1)m + 1 = 6m + 1m + 1 = 6m + 1(m + 1)$$
$$5n = (6\cdot 1 + 1)m + 3 = 6m + 1m + 3 = 6m + 1(m + 3)$$
$$5n = (6\cdot 1 + 1)m + 1 = 6m + 1m + 1 = 6m + 1(m + 1)$$
$$5n = (6\cdot 1 + 1)m - 1 = 6m + 1m - 1 = 6m + 1(m - 1)$$
$$5n = (6\cdot 1 + 1)m - 3 = 6m + 1m - 3 = 6m + 1(m - 3)$$

Das sind $6m + 1(m \pm 1)$ und $6m + 1(m \pm 3)$. Oder diese Ableitung wieder zurück verfolgt $6m + 1(m \pm 1) = 6m + m \pm 1 = 6m \pm 1 + m$, und/oder $6m + 1(m \pm 3) = 6m + m \pm 3$.

Analog die Umrechnung beim Komponenten 11 und 13:

$$5n = (6\cdot 2 - 1)m - 2 = 6\cdot 2m - m - 2 = m(6\cdot 2 - 1) - 2$$
$$5n = (6\cdot 2 - 1)m - 0 = 6\cdot 2m - m - 0 = m(6\cdot 2 - 1) - 0$$
$$5n = (6\cdot 2 - 1)m + 4 = 6\cdot 2m - m + 4 = m(6\cdot 2 - 1) + 4$$
$$5n = (6\cdot 2 - 1)m + 2 = 6\cdot 2m - m + 2 = m(6\cdot 2 - 1) + 2$$
$$5n = (6\cdot 2 - 1)m + 0 = 6\cdot 2m - m + 0 = m(6\cdot 2 - 1) + 0$$
$$5n = (6\cdot 2 - 1)m - 4 = 6\cdot 2m - m - 4 = m(6\cdot 2 - 1) - 4$$

$$5n = (6\cdot 2 + 1)m - 2 = 6\cdot 2m + m - 2 = m(6\cdot 2 + 1) - 2$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m - 0 = 6\cdot 2m + m - 0 = m(6\cdot 2 + 1) - 0$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m + 4 = 6\cdot 2m + m + 4 = m(6\cdot 2 + 1) + 4$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m + 2 = 6\cdot 2m + m + 2 = m(6\cdot 2 + 1) + 2$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m + 0 = 6\cdot 2m + m + 0 = m(6\cdot 2 + 1) + 0$$
$$5n = (6\cdot 2 + 1)m - 4 = 6\cdot 2m + m - 4 = m(6\cdot 2 + 1) - 4$$

Man hat also mit den Komponenten 11 und 13 die Form: $5n = m(6\cdot 2 \pm 1) \pm 0$; $5n = m(6\cdot 2 \pm 1) \pm 2$; $5n = m(6\cdot 2 \pm 1) \pm 4$, die nicht Primzahl sein kann. Die Form mit der Komponente 7 war: $6m + 1(m \pm 1)$ und $6m + 1(m \pm 3)$. Oder diese Ableitung wieder zurück verfolgt $6m + 1(m \pm 1) = 6m + m \pm 1 = 6m \pm 1 + m$, und/oder $6m + 1(m \pm 3) = 6m + m \pm 3$. Das ergibt

$$6m + 1(m \pm 1) = 6m + m \pm 1 = m(6\cdot 1 \pm 1) \pm 1$$
$$6m + 1(m \pm 3) = 6m + m \pm 3 = m(6\cdot 1 \pm 1) \pm 3$$

Es sind insgesamt die so auf $6n \pm 1$ zurückgeführten Formen[259]:

$$m(6\cdot 1 \pm 1) \pm 1$$
$$m(6\cdot 1 \pm 1) \pm 3$$

und

$$m(6\cdot 2 \pm 1) \pm 0$$
$$m(6\cdot 2 \pm 1) \pm 2$$
$$m(6\cdot 2 \pm 1) \pm 4.$$

[259] Christof 4 f.

Es sind daher $m(6 \cdot 1 \pm 1) \pm n$ oder $m(6 \cdot 2 \pm 1) \pm n$ mit $n < 5$, d. h. $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, und $n = 4$.

Die Folge $n^2 + n + 1$

Die Formen $m(6\cdot1 \pm 1) \pm 1$, $m(6\cdot1 \pm 1) \pm 3$ und $m(6\cdot2 \pm 1) \pm 0$, $m(6\cdot2 \pm 1) \pm 2$, $m(6\cdot2 \pm 1) \pm 4$, erinnern mit m ausmultipliziert (zB $6\cdot2m \pm m \pm 4$) an die quadratische Form von Fermat $nx^2 + my^2$, die Euler in die Form $x^2 + my^2$ vereinfachte und zu $x(x + 1) + 17$ überführte, zumal Euler später 17 durch 41 in $x(x + 1) + 41$ ersetzte und damit diese Komponente als veränderlich bzw. variabel zeigte[260]. Auch wenn mit $n(n + 1) + 17 = n^2 + n + 41$ die besten Resultate erzielt wurden[261], Euler hat gezeigt, dass auch andere Summanden wie $n^2 + n + 11$ und $n^2 + n + 1$ zu Primzahlen als Ergebnis führen, und es kam zur Verallgemeinerung[262] der Formel $xn^2 + bx + c$, mit $c = p$ für Primzahl und $a = b = \pm1$.

$n^2 + n + 11$	
$0^2 + 0 + 11 = 11$ $1^2 + 1 + 11 = 13$ $2^2 + 2 + 11 = 17$ $3^2 + 3 + 11 = 23$ $4^2 + 4 + 11 = 31$ $5^2 + 5 + 11 = 41$ $6^2 + 6 + 11 = 53$	

[260] Stark 2; Sautoy 63; Müller-Stach/Piontkowski 3; Weisstein, Euler Number, in: < URL >.
[261] Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.
[262] Bundschuh 71, 283.

$7^2 + 7 + 11 = 67$ $8^2 + 8 + 11 = 83$ $9^2 + 9 + 11 = 101$ ...	
$n^2 + n + 107$	
$1^2 + 1 + 107 = \underline{109}$ $2^2 + 2 + 107 = \underline{113}$ $3^2 + 3 + 107 = 119$ $4^2 + 4 + 107 = \underline{127}$ $5^2 + 5 + 107 = \underline{137}$ $6^2 + 6 + 107 = \underline{149}$ $7^2 + 7 + 107 = \underline{163}$ $8^2 + 8 + 107 = \underline{179}$ $9^2 + 9 + 107 = \underline{197}$ $10^2 + 10 + 107 = 217$ $11^2 + 11 + 107 = \underline{239}$ $12^2 + 12 + 107 = \underline{263}$ $13^2 + 13 + 107 = 289$ $14^2 + 14 + 107 = \underline{317}$ $15^2 + 15 + 107 = \underline{347}$ $16^2 + 16 + 107 = \underline{379}$ $17^2 + 17 + 107 = 413$ $18^2 + 18 + 107 = \underline{449}$ $19^2 + 19 + 107 = \underline{487}$ $20^2 + 20 + 107 = 527$	109, $\underline{113}$, 127, $\underline{131}$, 137, 139, 149, $\underline{151}$, 157, 163, 167, $\underline{173}$, 179,181,191,193, $\underline{197}$, 199, 211, $\underline{223}$, 227, 229, 233, 239, 241, $\underline{251}$, 257, 263, 269, 271, 277, $\underline{281}$, 283, 293, 307, 311, $\underline{313}$, 317, 331, 337, $\underline{347}$, 349, 353, 359, 367, 373, 379, $\underline{383}$, 389, 397, 401, 409, 419, $\underline{421}$, 431, 433, 439, 443, 449, 457, $\underline{461}$, 463, 467, 479, 487, 491, 499, $\underline{503}$, 509, 521, 523, 541, $\underline{547}$, 557, 563, 569, 571, 577, 587, $\underline{593}$, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, $\underline{641}$, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683 $\underline{691}$, 701, 709, 719, 727, 733, 739, $\underline{743}$, 751, 757, 761, 769, 773, 787, $\underline{797}$, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, $\underline{853}$, 857, 859, 863, 877,

$21^2 + 21 + 107 = \underline{569}$	881, 883, 887, 907 <u>911</u>, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967,
$22^2 + 22 + 107 = \underline{613}$	<u>971</u>, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, <u>1033</u>,
$23^2 + 23 + 107 = \underline{659}$	1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, <u>1097</u>,
$24^2 + 24 + 107 = 707$	1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, <u>1163</u>, 1171, 1181,
$25^2 + 25 + 107 = \underline{757}$	1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, <u>1231</u>, 1237, 1249,
$26^2 + 26 + 107 = \underline{809}$	1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297,
$27^2 + 27 + 107 = \underline{863}$	<u>1301</u>, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381,
$28^2 + 28 + 107 = \underline{919}$	1399,
$29^2 + 29 + 107 = \underline{977}$	1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459,
$30^2 + 30 + 107 = 1037$	1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499,
$31^2 + 31 + 107 = 1099$	1511, <u>1523</u>, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579,
$32^2 + 32 + 107 = \underline{1163}$	1583, 1597,
$33^2 + 33 + 107 = \underline{1229}$	<u>1601</u>, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663,
$34^2 + 34 + 107 = \underline{1297}$	1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741,
$35^2 + 35 + 107 = \underline{1367}$	1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789,
$36^2 + 36 + 107 = \underline{1439}$	1801, 1811, 1823, 1831, <u>1847</u>, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877,
$37^2 + 37 + 107 = 1513$	1879, 1889,
$38^2 + 38 + 107 = \underline{1589}$	
$39^2 + 39 + 107 = \underline{1667}$	
$40^2 + 40 + 107 = \underline{1747}$	
$41^2 + 41 + 107 = 1829$	
$42^2 + 42 + 107 = \underline{1913}$	
$43^2 + 43 + 107 = \underline{1999}$	
$44^2 + 44 + 107 = \underline{2087}$	
$45^2 + 45 + 107 = 2177$	
…	

$n^2 + n + 221$	
$1^2 + 1 + 221 = \underline{223}$	109, <u>113</u>, 127, <u>131</u>, 137, 139, 149, <u>151</u>, 157, 163, 167, <u>173</u>,
$2^2 + 2 + 221 = \underline{227}$	179,181,191,193, <u>197</u>, 199, 211,
$3^2 + 3 + 221 = \underline{233}$	<u>223</u>,
$4^2 + 4 + 221 = \underline{241}$	227, 229,
$5^2 + 5 + 221 = \underline{251}$	233, 239,
$6^2 + 6 + 221 = \underline{263}$	
$7^2 + 7 + 221 = \underline{277}$	
$8^2 + 8 + 221 = \underline{293}$	241,
$9^2 + 9 + 221 = \underline{311}$	<u>251</u>, 257,
$10^2 + 10 + 221 = \underline{331}$	263, 269, 271,
$11^2 + 11 + 221 = \underline{353}$	277, <u>281</u>, 283,
$12^2 + 12 + 221 = 377$	293, 307,
$13^2 + 13 + 221 = 403$	311, <u>313</u>, 317, 331, <u>313</u>, 317,
$14^2 + 14 + 221 = \underline{431}$	331, 337,
$15^2 + 15 + 221 = \underline{461}$	<u>347</u>, 349,
$16^2 + 16 + 221 = 493$	353, 359, 367, 373, 379, <u>383</u>, 389, 397, 401, 409, 419, <u>421</u>,
$17^2 + 17 + 221 = 527$	431, 433, 439, 443, 449, 457,
$18^2 + 18 + 221 = \underline{563}$	<u>461</u>, 463, 467, 479, 487, 491, 499, <u>503</u>, 509, 521, 523, 541,
$19^2 + 19 + 221 = \underline{601}$	<u>547</u>, 557,
$20^2 + 20 + 221 = \underline{641}$	563, 569, 571, 577, 587, <u>593</u>, 599,
$21^2 + 21 + 221 = \underline{683}$	601, 607, 613, 617, 619, 631,
$22^2 + 22 + 221 = \underline{727}$	<u>641</u>, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677,
$23^2 + 23 + 221 = \underline{773}$	683 <u>691</u>, 701, 709, 719, 727, 733, 739, <u>743</u>, 751, 757, 761,
$24^2 + 24 + 221 = \underline{821}$	769,
$25^2 + 25 + 221 = 871$	773, 787, <u>797</u>, 809, 811,
$26^2 + 26 + 221 = 923$	821, 823, 827, 829, 839, <u>853</u>, 857, 859, 863, 877, 881, 883,

$27^2 + 27 + 221 = \underline{977}$	887, 907 <u>911</u>, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, <u>971</u>,
$28^2 + 28 + 221 = \underline{1033}$	977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031,
$29^2 + 29 + 221 = \underline{1091}$	<u>1033</u>, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087,
$30^2 + 30 + 221 = \underline{1151}$	1091, 1093, <u>1097</u>,
$31^2 + 31 + 221 = \underline{1213}$	1103, 1109, 1117, 1123, 1129,
$32^2 + 32 + 221 = \underline{1277}$	1151, 1153, <u>1163</u>, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201,
$33^2 + 33 + 221 = 1343$	1213, 1217, 1223, 1229, <u>1231</u>, 1237, 1249, 1259,
$34^2 + 34 + 221 = 1411$	1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297,
$35^2 + 35 + 221 = \underline{1481}$	<u>1301</u>, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381,
$36^2 + 36 + 221 = \underline{1553}$	1399,
$37^2 + 37 + 221 = \underline{1627}$	1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459,
$38^2 + 38 + 221 = 1703$	1471,
$39^2 + 39 + 221 = 1781$	1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499,
$40^2 + 40 + 221 = \underline{1861}$	1511, <u>1523</u>, 1531, 1543, 1549,
$41^2 + 41 + 221 = 1943$	1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, <u>1601</u>, 1607, 1609,
$42^2 + 42 + 221 = \underline{2027}$	1613, 1619, 1621,
$43^2 + 43 + 221 = \underline{2113}$	1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709,
	1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787,
$44^2 + 44 + 221 = \underline{2201}$	1789, 1801, 1811, 1823, 1831, <u>1847</u>,
$45^2 + 45 + 221 = 2291$	1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889,

Dabei waren dort sowohl 17 wie auch 41 Primzahlzwillinge (17, 19 und 41, 43), so wie auch hier 5, 7 und 11, 13 Primzahlzwillinge sind, ohne dass es Euler besonders aufgefallen wäre. Das zeigt die zentrale Rolle der Primzahlzwillinge bei der Berechnung der Primzahlen[263], und legt nahe, die For-

[263] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; Ribenboim/Richstein/Keller 198 ff.

mel[264] von Euler $n^2 + n + 41$ auf andere Primzahlzwillinge auszudehnen $n^2 + n + p$ und zu verallgemeinern[265], im Grunde auf alle Primzahlzwillinge[266].

$$n^2 + n + 1 = P$$

$0^2 + 0 + 1 = \underline{1}$
$1^2 + 1 + 1 = \underline{3}$
$2^2 + 2 + 1 = \underline{7}$
$3^2 + 3 + 1 = \underline{13}$
$4^2 + 4 + 1 = 21$
$5^2 + 5 + 1 = \underline{31}$
$6^2 + 6 + 1 = \underline{43}$
$7^2 + 7 + 1 = 57$
$8^2 + 8 + 1 = \underline{73}$
$9^2 + 9 + 1 = 91$
…

Immerhin ist Euler schon aufgefallen, dass auch andere Zahlen als 17 und 41 Primzahlen ergeben[267], und hatte die Formel selbst auf $n^2 + n + p$ bzw. dann auf $n^2 + n + (p - 2)$. Eine Besonderheit der von Euler verallgemeinerten Formel in der negativen Form $x^2 - x - 1 = 0$ ist, dass sie in $a = (1 +$

[264] Pittner 19; Padberg/Danckwerts/Sein 15.
[265] Stark 264 ff; Sautoy 63; Weisstein, Euler Number, in: < URL >; Müller-Stach/Piontkowski 3.
[266] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f; Sautoy 62 ff.
[267] Sautoy 63; Ribenboim/Richstein/Keller 153 f; Bundschuh 71, 283.

$5^{1/2}$)/2 eine Lösung hat[268]. Und das ist der sogenannte Goldene Schnitt[269] und die Folge ergibt die sogenannten Fibonacci-Zahlen[270].

[268] Bartholomé/Rung/Kern 72 f; Timerding 13 f, 20 ff.
[269] Beuteilspacher/Petri 16; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 18 f, 24 f, 32 ff; Ostermann 23 ff.
[270] Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f; Timerding 13 f, 20 ff.

Die Folge $n^2 - n - 1$

Bei der Anwendung der Formel $n^2 + n + 41$ von Euler, dann $n^2 + n + 17$, und dann auch $n^2 + n + 1$ zeigt es sich, dass jeweils zB außer der positiven Form $n^2 + n + 1$ noch die negative Form[271] möglich ist: $n^2 - n - 1 = 0 \Rightarrow n(n - 1) = 1$,

$n^2 + n + 1$	$n^2 - n + 1$	$n^2 - n + 3$	$n^2 - n + 5$
$0^2 + 0 + 1 = \underline{1}$	$0^2 - 0 + 1 = 1$	$0^2 - 0 + 3 = \underline{3}$	$0^2 - 0 + 5 = \underline{5}$
$1^2 + 1 + 1 = \underline{3}$	$1^2 - 1 + 1 = \underline{1}$	$1^2 - 1 + 3 = \underline{3}$	$1^2 - 1 + 5 = \underline{5}$
$2^2 + 2 + 1 = \underline{7}$	$2^2 - 2 + 1 = \underline{3}$	$2^2 - 2 + 3 = \underline{5}$	$2^2 - 2 + 5 = \underline{7}$
$3^2 + 3 + 1 = \underline{13}$	$3^2 - 3 + 1 = \underline{7}$	$3^2 - 3 + 3 = 9$	$3^2 - 3 + 5 = \underline{11}$
$4^2 + 4 + 1 = 21$	$4^2 - 4 + 1 = \underline{13}$	$4^2 - 4 + 3 = 15$	$4^2 - 4 + 5 = \underline{17}$
$5^2 + 5 + 1 = \underline{31}$	$5^2 - 5 + 1 = 21$	$5^2 - 5 + 3 = \underline{23}$	$5^2 - 5 + 5 = 25$
$6^2 + 6 + 1 = \underline{43}$	$6^2 - 6 + 1 = \underline{31}$	$6^2 - 6 + 3 = 33$	$6^2 - 6 + 5 = 35$
$7^2 + 7 + 1 = 57$	$7^2 - 7 + 1 = \underline{43}$	$7^2 - 7 + 3 = 45$	$7^2 - 7 + 5 = \underline{47}$
$8^2 + 8 + 1 = \underline{73}$	$8^2 - 8 + 1 = 57$	$8^2 - 8 + 3 = \underline{59}$	$8^2 - 8 + 5 = \underline{61}$
$9^2 + 9 + 1 = 91$	$9^2 - 9 + 1 = \underline{73}$	$9^2 - 9 + 3 = 75$	$9^2 - 9 + 5 = 77$
…	…	…	…
$0^2 + 0 + 5 = 5$	$0^2 + 0 + 11 = 11$	$0^2 + 0 + 7 = 7$	
$1^2 + 1 + 5 = 7$	$1^2 + 1 + 11 = 13$	$1^2 + 1 + 7 = 9$	
$2^2 + 2 + 5 = 9$	$2^2 + 2 + 11 = 17$	$2^2 + 2 + 7 = 13$	

[271] Beuteilspacher/Petri 16; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 18 f, 24 f, 32 ff; Timerding 13 f, 20 ff; Weisstein, Euler Number, in: < URL >; Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.

$3^2 + 3 + 5 = 17$ $4^2 + 4 + 5 = 25$ $5^2 + 5 + 5 = 35$ $6^2 + 6 + 5 = 47$ $7^2 + 7 + 5 = 61$ $8^2 + 8 + 5 = 77$ $9^2 + 9 + 5 = 95$ …	$3^2 + 3 + 11 = 23$ $4^2 + 4 + 11 = 31$ $5^2 + 5 + 11 = 41$ $6^2 + 6 + 11 = 53$ $7^2 + 7 + 11 = 67$ $8^2 + 8 + 11 = 83$ $9^2 + 9 + 11 = 101$ …	$3^2 + 3 + 7 = 19$ $4^2 + 4 + 7 = 21$ $5^2 + 5 + 7 = 31$ $6^2 + 6 + 7 = 43$ $7^2 + 7 + 7 = 57$ $8^2 + 8 + 7 = 73$ $9^2 + 9 + 7 = 91$ …	

und die ist die Fibonacci-Folge[272]:

$$n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Die Lösung der negativen Form von $n^2 - n - 1$ ist also der Goldene Schnitt[273].

$0^2 + 0 + 41 = 41$ $1^2 + 2 + 41 = 43$ $2^2 + 2 + 41 = 47$ $3^2 + 3 + 41 = 53$ $4^2 + 4 + 41 = 61$ $5^2 + 5 + 41 = 71$ …	$0^2 - 0 - 41 = -41$ $1^2 - 1 - 41 = -41$ $2^2 - 2 - 41 = -39$ $3^2 - 3 - 41 = -33$ $4^2 - 4 - 41 = -29$ $5^2 - 5 - 41 = -21$ $6^2 - 6 - 41 = -11$

[272] Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f.
[273] Ostermann 23 ff.

	$7^2 - 7 - 41 = 1$ $8^2 - 8 - 41 = 15$ $9^2 - 9 - 41 = 31$ $10^2 - 10 - 41 = 49$ $11^2 - 11 - 41 = 69$ $12^2 - 12 - 41 = 91$ …

Das gilt mit 1 statt 41

$0^2 - 0 - 1 = -1$ $1^2 - 1 - 1 = -1$ $2^2 - 2 - 1 = 1$ $3^2 - 3 - 1 = 5$ $4^2 - 4 - 1 = 11$ $5^2 - 5 - 1 = 19$ $6^2 - 6 - 1 = 29$ $7^2 - 7 - 1 = 41$ $8^2 - 8 - 1 = 55$ $9^2 - 9 - 1 = 71$ $10^2 - 10 - 1 = 89$ $11^2 - 11 - 1 = 109$ $12^2 - 12 - 1 = 131$ $13^2 - 13 - 1 = 155$	$0^2 - 0 + 1 = 1$ $1^2 - 1 + 1 = 1$ $2^2 - 2 + 1 = 3$ $3^2 - 3 + 1 = 7$ $4^2 - 4 + 1 = 13$ $5^2 - 5 + 1 = 21$ $6^2 - 6 + 1 = 31$ $7^2 - 7 + 1 = 43$ $8^2 - 8 + 1 = 57$ $9^2 - 9 + 1 = 73$ $10^2 - 10 + 1 = 91$ $11^2 - 11 + 1 = 111$ $12^2 - 12 + 1 = 133$ $13^2 - 13 + 1 = 157$

$14^2 - 14 - 1 = 181$ …	$14^2 - 14 + 1 = 183$ …

Die Folge 24n + 1

Aus $(24n - 1)^{½} = p$ folgt $p^2 = 24n + 1$ und $p^2 - 1 = 24n$. Primzahlen[274] sind Glieder der Folge $p = 6n + 1$ oder $p = 6n - 1$, wobei p und n natürliche Zahlen ($n \in \mathbb{N}$) sind und $p > 3$.

$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$

$(6n + 1)(6n - 1) = 36n^2 + 6n - 6n - 1 = 36n^2 - 1$

$(p - 1)^2 = (p - 1)(p - 1) = p^2 - p - p + 1 = p^2 - 2p + 1$

$(p + 1)^2 = (p + 1)(p + 1) = p^2 + p + p + 1 = p^2 + 2p + 1$

Weil und wenn die Primzahl p ungerade ist, müssen sowohl p + 1 wie auch p – 1 gerade, und damit jeweils durch 2 teilbar sein: Demnach ist $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$ durch 2·2 teilbar. Die Zahl p zwischen (p + 1) und (p – 1) muss demnach durch 3 teilbar sein, so dass insgesamt die Zahl durch 24 teilbar sein muss[275].

$P^2 = (6n + 1)^2$	$P^2 = (6n - 1)^2$

[274] Waldal 58 ff; Brefeld, Primzahlen, Teilbarkeit und die Zahl 24, in: < URL >.
[275] Waldal 61 f; Brefeld, Primzahlen, Teilbarkeit und die Zahl 24, in: < URL >.

$p^2 = 36n^2 + 12n + 1$ $p^2 = 24n^2 + 12n^2 + 12n + 1$ $p^2 = 24n^2 + 12(n^2 + n) + 1$	$p^2 = 36n^2 - 12n + 1$ $p^2 = 24n^2 - 12n^2 - 12n + 12n - 12n + 1$ $p^2 = 24n^2 - 24n - 12n^2 + 12n + 1$ $p^2 = 24(n^2 - n) - 12(n^2 + n) + 1$

Einsetzung von $n^2 + n = 2a$ und $n^2 - n = 2b$

$p^2 = 24n^2 + 12(2a) + 1$ $p^2 = 24n^2 + 24a + 1$ $p^2 = 24(n^2 + a) + 1$	$p^2 = 24(2b) - 12(2a) + 1$ $p^2 = 24(2b) - 24a + 1$ $p^2 = 24(2b - a) + 1$
$p = [24(n^2 + a) + 1]^{½}$	$p = [24(2b - a) + 1]^{½}$
$n = (n^2 + a)$ $(24n + 1)^{½} = p$	$n = (2b - a)$ $(24n + 1)^{½} = p$

$24n + 1 = p^2$

$24(n^2 + a) + 1 = p^2$

$24n^2 + 24a + 1 = p^2$

$24a = p^2 - 1 - 24n^2$

$24a = 36n^2 + 12n + 1 - 1 - 24n^2$

$24a = 12n^2 + 12n$

$2a = n^2 + n$

$a = n(n + 1)/2$

$24n^2 + 24(n^2 + n)/2 + 1 = p^2$

$24n^2 + 12(n^2 + n) + 1 = p^2$

$24n^2 + 12n^2 + 12n + 1 = p^2$

$24(2b - a) + 1 = p^2$

$48b - 24a + 1 = p^2$

$48b - 24n(n + 1) + 1 = p^2$

$48b - 12n(n + 1) + 1 = p^2$

$n^2 - n = 2b$

$(n^2 - n)/2 = b$

$48(n^2 - n)/2 - 24n(n + 1) + 1 = p^2$

$24(n^2 - n) - 24n(n + 1) + 1 = p^2$

$24n^2 - 24n - 24n^2 - 24n + 1 = p^2$
$- 48n + 1 = p^2$

$36n^2 + 12n + 1 = p^2$ $(6n + 1)^2 = p^2$	

$n_0 = n^2 + a = (p - 1)^2/36 + ((p - 1)^2/36 + (p - 1)/6)/2$

$n_0 = 2b - a = (p - 5)^2/36 + 2(p - 5)/6 + 1 + ((p - 5)^2/36 + (p - 5)/6)/2.$

Die Primzahlanwärter ausmultipliziert:

$P_z = (6n - 1)\cdot(6m - 1) = 36nm - 6m - 6n + 1 = 6(6nm - m - n) + 1$
Bei $m = n - 1$

$P_z = 6(n[n - 1] - [n - 1] - n) + 1$

$P_z = 6(n^2 - n - n + 1 - n) + 1$
$P_z = 6(n^2 - 3n + 1) + 1$
$P_z = 6n^2 - 18n + 6 + 1$
$P_z = 6n(n - 3) + 7$

$P_z = (6n + 1)\cdot(6m + 1) = 36nm + 6m + 6n + 1 = 6(6nm + m + n) + 1$
Bei $m = n + 1$
$P_z = 6(n[n + 1] + [n + 1] + n) + 1$
$P_z = 6(n^2 + n + n + 1 + n) + 1$
$P_z = 6(n^2 + 3n + 1) + 1$
$P_z = 6n^2 + 18n + 6 + 1$

$P_z = 6n(n + 3) + 7$

Im Ergebnis ist also $P_z = 6n(n \pm 3) + 7$.

Berechnung der Folge[276] 24n + 1 mit n = 1, 2, 3, …: Die Quadrate, deren Wurzel eine Primzahl ergibt, sind rot markiert. Die Quadrate von Primzahlwurzel von $(24n + 1)^{1/2}$ grün. Und die Produkte von Primzahlen als Wurzel aus $(24n + 1)^{1/2}$ blau bzw. türkies. Die Primzahlen ≤ 5, also 2 und 3, wären 24(1/8) + 1 = 2² und 24(1/3) + 1 = 3² sind nicht mit natürlichen Zahlen darstellbar, sondern rational, und sie scheinen auch später nicht als Primzahlprodukt auf.

24·1 + 1 = 25 = 5²	24·51 + 1 = 1225 = 35² = (5·7)²
24·2 + 1 = 49 = 7²	24·52 + 1 = 1249 = 35,34119409²
24·3 + 1 = 73 = 8,544003745²	24·53 + 1 = 1273 = 35,67912555²
24·4 + 1 = 97 = 9,848857802²	24·54 + 1 = 1297 = 36,01388621²
24·5 + 1 = 121 = 11²	24·55 + 1 = 1321 = 36,34556369²
24·6 + 1 = 145 = 12,04159458²	24·56 + 1 = 1345 = 36,67424164²
24·7 + 1 = 169 = 13²	24·57 + 1 = 1369 = 37²
24·8 + 1 = 193 = 13,89244399²	24·58 + 1 = 1393 = 37,32291521²
24·9 + 1 = 217 = 14,73091986²	24·59 + 1 = 1417 = 37,64306045²
24·10 + 1 = 241 = 15,5241747²	24·60 + 1 = 1441 = 37,96050579²
24·11 + 1 = 265 = 16,2788206²	24·61 + 1 = 1465 = 38,27531842²
24·12 + 1 = 289 = 17²	24·62 + 1 = 1489 = 38,58756276²
24·13 + 1 = 313 = 17,69180601²	24·63 + 1 = 1513 = 38,89730068²
24·14 + 1 = 337 = 18,35755975²	24·64 + 1 = 1537 = 39,20459157²

[276] Waldal 61 f: Obwohl die Folge auch analytisch herleitbar ist, soll das Ergebnis experimentell gezeigt werden.

$24 \cdot 15 + 1 = 361 = 19^2$	$24 \cdot 65 + 1 = 1561 = 39{,}50949253^2$
$24 \cdot 16 + 1 = 385 = 19{,}62141687^2$	$24 \cdot 66 + 1 = 1585 = 39{,}81205847^2$
$24 \cdot 17 + 1 = 409 = 20{,}22374842^2$	$24 \cdot 67 + 1 = 1609 = 40{,}11234224^2$
$24 \cdot 18 + 1 = 433 = 20{,}80865205^2$	$24 \cdot 68 + 1 = 1633 = 40{,}4103947^2$
$24 \cdot 19 + 1 = 457 = 21{,}37755833^2$	$24 \cdot 69 + 1 = 1657 = 40{,}70626487^2$
$24 \cdot 20 + 1 = 481 = 21{,}9317122^2$	$24 \cdot 70 + 1 = 1681 = 41^2$
$24 \cdot 21 + 1 = 505 = x22{,}47220505^2$	$24 \cdot 71 + 1 = 1705 = 41{,}29164564^2$
$24 \cdot 22 + 1 = 529 = 23^2$	$24 \cdot 72 + 1 = 1729 = 41{,}58124577^2$
$24 \cdot 23 + 1 = 553 = 23{,}51595203^2$	$24 \cdot 73 + 1 = 1753 = 41{,}86884283^2$
$24 \cdot 24 + 1 = 577 = 24{,}0208243^2$	$24 \cdot 74 + 1 = 1777 = 42{,}15447782^2$
$24 \cdot 25 + 1 = 601 = 24{,}51530134^2$	$24 \cdot 75 + 1 = 1801 = 42{,}43819035^2$
$24 \cdot 26 + 1 = 625 = 25^2 = (5 \cdot 5)^2 = 5^4$	$24 \cdot 76 + 1 = 1825 = 42{,}72001873^2$
$24 \cdot 27 + 1 = 649 = 25{,}47547841^2$	$24 \cdot 77 + 1 = 1849 = 43^2$
$24 \cdot 28 + 1 = 673 = 25{,}94224354^2$	$24 \cdot 78 + 1 = 1873 = 43{,}27817002^2$
$24 \cdot 29 + 1 = 697 = 26{,}40075756^2$	$24 \cdot 79 + 1 = 1879 = 43{,}55456348^2$
$24 \cdot 30 + 1 = 721 = 26{,}85144316^2$	$24 \cdot 80 + 1 = 1921 = 43{,}829214^2$
$24 \cdot 31 + 1 = 745 = 27{,}29468813^2$	$24 \cdot 81 + 1 = 1945 = 44{,}10215414^2$
$24 \cdot 32 + 1 = 769 = 28{,}08914381\ ^2$	$24 \cdot 82 + 1 = 1969 = 44{,}37341546^2$
$24 \cdot 33 + 1 = 793 = 28{,}16025568^2$	$24 \cdot 83 + 1 = 1993 = 44{,}64302857^2$
$24 \cdot 34 + 1 = 817 = 28{,}58321186^2$	$24 \cdot 84 + 1 = 2017 = 44{,}91102315^2$
$24 \cdot 35 + 1 = 841 = 29^2$	$24 \cdot 85 + 1 = 2041 = 45{,}17742799^2$
$24 \cdot 36 + 1 = 865 = 29{,}41088234^2$	$24 \cdot 86 + 1 = 2065 = 45{,}44227107^2$
$24 \cdot 37 + 1 = 889 = 29{,}81610303^2$	$24 \cdot 87 + 1 = 2089 = 45{,}70557953^2$
$24 \cdot 38 + 1 = 913 = 30{,}21588986^2$	$24 \cdot 88 + 1 = 2113 = 45{,}96737974^2$
$24 \cdot 39 + 1 = 937 = 30{,}61045573^2$	$24 \cdot 89 + 1 = 2137 = 46{,}22769733^2$

$24 \cdot 40 + 1 = 961 = 31^2$	$24 \cdot 90 + 1 = 2161 = 46{,}4865572^2$
$24 \cdot 41 + 1 = 985 = 31{,}38470965^2$	$24 \cdot 91 + 1 = 2185 = 46{,}74398357^2$
$24 \cdot 42 + 1 = 1009 = 31{,}76476035^2$	$24 \cdot 92 + 1 = 2209 = 47^2$
$24 \cdot 43 + 1 = 1033 = 32{,}14031736^2$	$24 \cdot 93 + 1 = 2233 = 47{,}2546294^2$
$24 \cdot 44 + 1 = 1057 = 32{,}51153641^2$	$24 \cdot 94 + 1 = 2257 = 47{,}50789408^2$
$24 \cdot 45 + 1 = 1081 = 32{,}87856445^2$	$24 \cdot 95 + 1 = 2281 = 47{,}75981575^2$
$24 \cdot 46 + 1 = 1105 = 33{,}24154028^2$	$24 \cdot 96 + 1 = 2305 = 48{,}01041554^2$
$24 \cdot 47 + 1 = 1129 = 33{,}60059523^2$	$24 \cdot 97 + 1 = 2329 = 48{,}25971405^2$
$24 \cdot 48 + 1 = 1153 = 33{,}95585369^2$	$24 \cdot 98 + 1 = 2353 = 48{,}50773134^2$
$24 \cdot 49 + 1 = 1177 = 34{,}3074336^2$	$24 \cdot 99 + 1 = 2377 = 48{,}75448697^2$
$24 \cdot 50 + 1 = 1201 = 34{,}6554469^2$	$24 \cdot 100 + 1 = 2401 = 49^2 = (7 \cdot 7)^2 = 7^4$

$24 \cdot 101 + 1 = 2425 = 49{,}24428901^2$	$24 \cdot 151 + 1 = 3625 = 60{,}20797289^2$
$24 \cdot 102 + 1 = 2449 = 49{,}48737213^2$	$24 \cdot 152 + 1 = 3649 = 60{,}40695324^2$
$24 \cdot 103 + 1 = 2473 = 49{,}72926704^2$	$24 \cdot 153 + 1 = 3673 = 60{,}6052803^2$
$24 \cdot 104 + 1 = 2497 = 49{,}96999099^2$	$24 \cdot 154 + 1 = 3697 = 60{,}80296045^2$
$24 \cdot 105 + 1 = 2521 = 50{,}20956084^2$	$24 \cdot 155 + 1 = 3721 = 61^2$
$24 \cdot 106 + 1 = 2545 = 50{,}44799302^2$	$24 \cdot 156 + 1 = 3745 = 61{,}19640512^2$
$24 \cdot 107 + 1 = 2569 = 50{,}68530359^2$	$24 \cdot 157 + 1 = 3769 = 61{,}39218191^2$
$24 \cdot 108 + 1 = 2593 = 50{,}92150823^2$	$24 \cdot 158 + 1 = 3793 = 61{,}58733636^2$
$24 \cdot 109 + 1 = 2617 = 51{,}15662225^2$	$24 \cdot 159 + 1 = 3817 = 61{,}78187436^2$
$24 \cdot 110 + 1 = 2641 = 51{,}39066063^2$	$24 \cdot 160 + 1 = 3841 = 61{,}97580173^2$
$24 \cdot 111 + 1 = 2665 = 51{,}623638^2$	$24 \cdot 161 + 1 = 3865 = 62{,}16912417^2$
$24 \cdot 112 + 1 = 2689 = 51{,}85556865^2$	$24 \cdot 162 + 1 = 3889 = 62{,}36184731^2$
$24 \cdot 113 + 1 = 2713 = 52{,}08646657^2$	$24 \cdot 163 + 1 = 3913 = 62{,}55397669^2$

$24 \cdot 114 + 1 = 2737 = 52{,}31634544^2$	$24 \cdot 164 + 1 = 3973 = 62{,}74551777^2$
$24 \cdot 115 + 1 = 2761 = 52{,}54521862^2$	$24 \cdot 165 + 1 = 3961 = 62{,}93647591^2$
$24 \cdot 116 + 1 = 2785 = 52{,}77309921^2$	$24 \cdot 166 + 1 = 3985 = 63{,}12685641^2$
$24 \cdot 117 + 1 = 2809 = 53^2$	$24 \cdot 167 + 1 = 4009 = 63{,}31666447^2$
$24 \cdot 118 + 1 = 2833 = 53{,}22593353^2$	$24 \cdot 168 + 1 = 4033 = 63{,}50590524^2$
$24 \cdot 119 + 1 = 2857 = 53{,}45091206^2$	$24 \cdot 169 + 1 = 4057 = 63{,}69458376^2$
$24 \cdot 120 + 1 = 2881 = 53{,}6749476^2$	$24 \cdot 170 + 1 = 4081 = 63{,}88270501^2$
$24 \cdot 121 + 1 = 2905 = 53{,}89805191^2$	$24 \cdot 171 + 1 = 4105 = 64{,}07027392^2$
$24 \cdot 122 + 1 = 2929 = 54{,}12023651^2$	$24 \cdot 172 + 1 = 4129 = 64{,}25729531^2$
$24 \cdot 123 + 1 = 2953 = 54{,}34151268^2$	$24 \cdot 173 + 1 = 4153 = 64{,}44377394^2$
$24 \cdot 124 + 1 = 2977 = 54{,}56189146^2$	$24 \cdot 174 + 1 = 4177 = 64{,}62971453^2$
$24 \cdot 125 + 1 = 3001 = 54{,}7813837^2$	$24 \cdot 175 + 1 = 4201 = 64{,}81512169^2$
$24 \cdot 126 + 1 = 3025 = 55^2 = (11 \cdot 5)^2$	$24 \cdot 176 + 1 = 4225 = 65^2 = (13 \cdot 5)^2$
$24 \cdot 127 + 1 = 3049 = 55{,}21775077^2$	$24 \cdot 177 + 1 = 4249 = 65{,}18435395^2$
$24 \cdot 128 + 1 = 3073 = 55{,}43464621^2$	$24 \cdot 178 + 1 = 4273 = 65{,}36818798^2$
$24 \cdot 129 + 1 = 3097 = 55{,}65069631^2$	$24 \cdot 179 + 1 = 4297 = 65{,}55150647^2$
$24 \cdot 130 + 1 = 3121 = 55{,}86591089^2$	$24 \cdot 180 + 1 = 4321 = 65{,}73431372^2$
$24 \cdot 131 + 1 = 3145 = 56{,}08029957^2$	$24 \cdot 181 + 1 = 4345 = 65{,}91661399^2$
$24 \cdot 132 + 1 = 3169 = 56{,}29387178^2$	$24 \cdot 182 + 1 = 4369 = 66{,}09841148^2$
$24 \cdot 133 + 1 = 3193 = 56{,}50663678^2$	$24 \cdot 183 + 1 = 4393 = 66{,}27971032^2$
$24 \cdot 134 + 1 = 3217 = 56{,}71860365^2$	$24 \cdot 184 + 1 = 4417 = 66{,}46051459^2$
$24 \cdot 135 + 1 = 3241 = 56{,}92978131^2$	$24 \cdot 185 + 1 = 4441 = 66{,}64082833^2$
$24 \cdot 136 + 1 = 3265 = 57{,}14017851^2$	$24 \cdot 186 + 1 = 4465 = 66{,}82065549^2$
$24 \cdot 137 + 1 = 3289 = 57{,}34980384^2$	$24 \cdot 187 + 1 = 4489 = 67^2$
$24 \cdot 138 + 1 = 3313 = 57{,}55866572^2$	$24 \cdot 188 + 1 = 4513 = 67{,}17886572^2$

$24 \cdot 139 + 1 = 3217 = 56{,}71860365^2$	$24 \cdot 189 + 1 = 4537 = 67{,}35725648^2$
$24 \cdot 140 + 1 = 3361 = 57{,}97413216^2$	$24 \cdot 190 + 1 = 4561 = 67{,}53517602^2$
$24 \cdot 141 + 1 = 3385 = 58{,}18075283^2$	$24 \cdot 191 + 1 = 4585 = 67{,}71262807^2$
$24 \cdot 142 + 1 = 3409 = 58{,}38664231^2$	$24 \cdot 192 + 1 = 4609 = 67{,}88961629^2$
$24 \cdot 143 + 1 = 3433 = 58{,}5918083^2$	$24 \cdot 193 + 1 = 4633 = 68{,}0661443^2$
$24 \cdot 144 + 1 = 3457 = 58{,}79625838^2$	$24 \cdot 194 + 1 = 4657 = 68{,}24221567^2$
$24 \cdot 145 + 1 = 3481 = 59^2$	$24 \cdot 195 + 1 = 4681 = 68{,}41783393^2$
$24 \cdot 146 + 1 = 3505 = 59{,}20304046^2$	$24 \cdot 196 + 1 = 4705 = 68{,}59300256^2$
$24 \cdot 147 + 1 = 3529 = 59{,}40538696^2$	$24 \cdot 197 + 1 = 4729 = 68{,}76772499^2$
$24 \cdot 148 + 1 = 3553 = 59{,}60704656^2$	$24 \cdot 198 + 1 = 4753 = 68{,}94200461^2$
$24 \cdot 149 + 1 = 3577 = 59{,}80802622^2$	$24 \cdot 199 + 1 = 4777 = 69{,}11584478^2$
$24 \cdot 150 + 1 = 3601 = 60{,}00833275^2$	$24 \cdot 200 + 1 = 4801 = 69{,}28924881^2$

$24 \cdot 201 + 1 = 4825 = 69{,}46221995^2$	$24 \cdot 251 + 1 = 6025 = 77{,}62087348^2$
$24 \cdot 202 + 1 = 4849 = 69{,}63476143^2$	$24 \cdot 252 + 1 = 6049 = 77{,}77531742^2$
$24 \cdot 203 + 1 = 4873 = 69{,}80687645^2$	$24 \cdot 253 + 1 = 6073 = 77{,}92945528^2$
$24 \cdot 204 + 1 = 4897 = 69{,}97856815^2$	$24 \cdot 254 + 1 = 6097 = 78{,}08328887^2$
$24 \cdot 205 + 1 = 4921 = 70{,}14983963^2$	$24 \cdot 255 + 1 = 6121 = 78{,}23681998^2$
$24 \cdot 206 + 1 = 4945 = 70{,}32069397^2$	$24 \cdot 256 + 1 = 6145 = 78{,}39005039^2$
$24 \cdot 207 + 1 = 4969 = 70{,}49113419^2$	$24 \cdot 257 + 1 = 6169 = 78{,}54298186^2$
$24 \cdot 208 + 1 = 4993 = 70{,}66116331^2$	$24 \cdot 258 + 1 = 6193 = 78{,}69561614^2$
$24 \cdot 209 + 1 = 5017 = 70{,}83078427^2$	$24 \cdot 259 + 1 = 6217 = 78{,}84795495^2$
$24 \cdot 210 + 1 = 5041 = 71^2$	$24 \cdot 260 + 1 = 6241 = 79^2$
$24 \cdot 211 + 1 = 5065 = 71{,}16881339^2$	$24 \cdot 261 + 1 = 6265 = 79{,}15175298^2$
$24 \cdot 212 + 1 = 5089 = 71{,}33722731^2$	$24 \cdot 262 + 1 = 6289 = 79{,}30321557^2$

24·213 + 1 = 5113 = 71,50524456²	24·263 + 1 = 6313 = 79,45438943²
24·214 + 1 = 5137 = 71,67286795²	24·264 + 1 = 6337 = 79,60527621²
24·215 + 1 = 5161 = 71,84010022²	24·265 + 1 = 6361 = 79,75587753²
24·216 + 1 = 5185 = 72,00694411²	24·266 + 1 = 6385 = 79,906195²
24·217 + 1 = 5209 = 72,1734023²	24·267 + 1 = 6409 = 80,05623024²
24·218 + 1 = 5233 = 72,33947747²	24·268 + 1 = 6433 = 80,20598481²
24·219 + 1 = 5257 = 72,50517223²	24·269 + 1 = 6457 = 80,3554603²
24·220 + 1 = 5281 = 72,6704892²	24·270 + 1 = 6481 = 80,50465825²
24·221 + 1 = 5305 = 72,83543094²	24·271 + 1 = 6505 = 80,65358021²
24·222 + 1 = 5329 = 73²	24·272 + 1 = 6529 = 80,80222769²
24·223 + 1 = 5353 = 73,1641989²	24·273 + 1 = 6553 = 80,95060222²
24·224 + 1 = 5377 = 73,32803011²	24·274 + 1 = 6577 = 81,09870529²
24·225 + 1 = 5401 = 73,49149611²	24·275 + 1 = 6601 = 81,24653839²
24·226 + 1 = 5425 = 73,65459931²	24·276 + 1 = 6625 = 81,39410298²
24·227 + 1 = 5449 = 73,81734214²	24·277 + 1 = 6649 = 81,54140053²
24·228 + 1 = 5473 = 73,97972695²	24·278 + 1 = 6673 = 81,68843247²
24·229 + 1 = 5497 = 74,14175612²	24·279 + 1 = 6697 = 81,83520025²
24·230 + 1 = 5521 = 74,30343195²	24·280 + 1 = 6721 = 81,98170528²
24·231 + 1 = 5545 = 74,46475676²	24·281 + 1 = 6745 = 82,12794896²
24·232 + 1 = 5569 = 74,62573283²	24·282 + 1 = 6769 = 82,27393269²
24·233 + 1 = 5593 = 74,78636239²	24·283 + 1 = 6793 = 82,41965785²
24·234 + 1 = 5617 = 74,94664769²	24·284 + 1 = 6817 = 82,56512581²
24·235 + 1 = 5641 = 75,10659092²	24·285 + 1 = 6841 = 82,71033793²
24·236 + 1 = 5665 = 75,26619427²	24·286 + 1 = 6865 = 82,85529555²
24·237 + 1 = 5689 = 75,42545989²	24·287 + 1 = 6889 = 83²

$24 \cdot 238 + 1 = 5713 = 75{,}58438992^2$	$24 \cdot 288 + 1 = 6913 = 83{,}14445261^2$
$24 \cdot 239 + 1 = 5737 = 75{,}74298647^2$	$24 \cdot 289 + 1 = 6937 = 83{,}28865469^2$
$24 \cdot 240 + 1 = 5761 = 75{,}90125164^2$	$24 \cdot 290 + 1 = 6961 = 83{,}43260753^2$
$24 \cdot 241 + 1 = 5785 = 76{,}05918748^2$	$24 \cdot 291 + 1 = 6985 = 83{,}57631243^2$
$24 \cdot 242 + 1 = 5809 = 76{,}21679605^2$	$24 \cdot 292 + 1 = 7009 = 83{,}71977066^2$
$24 \cdot 243 + 1 = 5833 = 76{,}37407937^2$	$24 \cdot 293 + 1 = 7033 = 83{,}86298249^2$
$24 \cdot 244 + 1 = 5857 = 7653103945^2$	$24 \cdot 294 + 1 = 7057 = 84{,}00595217^2$
$24 \cdot 245 + 1 = 5881 = 76{,}68767828^2$	$24 \cdot 295 + 1 = 7081 = 84{,}14867795^2$
$24 \cdot 246 + 1 = 5905 = 76{,}84399781^2$	$24 \cdot 296 + 1 = 7105 = 84{,}29116205^2$
$24 \cdot 247 + 1 = 5929 = 77^2 = (11 \cdot 7)^2$	$24 \cdot 297 + 1 = 7129 = 84{,}43340571^2$
$24 \cdot 248 + 1 = 5953 = 77{,}15568676^2$	$24 \cdot 298 + 1 = 7153 = 85{,}57541014^2$
$24 \cdot 249 + 1 = 5977 = 77{,}31106001^2$	$24 \cdot 299 + 1 = 7177 = 84{,}71717653^2$
$24 \cdot 250 + 1 = 6001 = 77{,}46612163^2$	$24 \cdot 300 + 1 = 7201 = 84{,}85870609^2$

$24 \cdot 301 + 1 = 7225 = 85^2 = (5 \cdot 17)^2$	$24 \cdot 351 + 1 = 8425 = 91{,}78779875^2$
$24 \cdot 302 + 1 = 7249 = 85{,}14105942^2$	$24 \cdot 352 + 1 = 8449 = 91{,}91844211^2$
$24 \cdot 303 + 1 = 7273 = 85{,}28188553^2$	$24 \cdot 353 + 1 = 8473 = 92{,}04890005^2$
$24 \cdot 304 + 1 = 7297 = 85{,}42247948^2$	$24 \cdot 354 + 1 = 8497 = 92{,}17917335^2$
$24 \cdot 305 + 1 = 7321 = 85{,}5628424^2$	$24 \cdot 355 + 1 = 8521 = 92{,}30926281^2$
$24 \cdot 306 + 1 = 7345 = 85{,}70297544^2$	$24 \cdot 356 + 1 = 8545 = 92{,}43916919^2$
$24 \cdot 307 + 1 = 7369 = 85{,}84287973^2$	$24 \cdot 357 + 1 = 8569 = 92{,}56889326^2$
$24 \cdot 308 + 1 = 7393 = 85{,}98255637^2$	$24 \cdot 358 + 1 = 8593 = 92{,}6984358^2$
$24 \cdot 309 + 1 = 7417 = 86{,}12200648^2$	$24 \cdot 359 + 1 = 8617 = 92{,}82779756^2$
$24 \cdot 310 + 1 = 7441 = 86{,}26123115^2$	$24 \cdot 360 + 1 = 8641 = 92{,}9569793^2$
$24 \cdot 311 + 1 = 7465 = 86{,}40023148^2$	$24 \cdot 361 + 1 = 8665 = 93{,}08598176^2$

$24 \cdot 312 + 1 = 7489 = 86{,}53900855^2$	$24 \cdot 362 + 1 = 8689 = 93{,}21480569^2$
$24 \cdot 313 + 1 = 7513 = 86{,}67756342^2$	$24 \cdot 363 + 1 = 8713 = 93{,}34345183^2$
$24 \cdot 314 + 1 = 7537 = 86{,}81589716^2$	$24 \cdot 364 + 1 = 8737 = 93{,}47192092^2$
$24 \cdot 315 + 1 = 7561 = 86{,}95401083^2$	$24 \cdot 365 + 1 = 8761 = 93{,}60021368^2$
$24 \cdot 316 + 1 = 7585 = 87{,}09190548^2$	$24 \cdot 366 + 1 = 8785 = 93{,}72833083^2$
$24 \cdot 317 + 1 = 7609 = 87{,}22958214^2$	$24 \cdot 367 + 1 = 8809 = 93{,}8562731^2$
$24 \cdot 318 + 1 = 7633 = 87{,}36704184^2$	$24 \cdot 368 + 1 = 8833 = 93{,}9840412^2$
$24 \cdot 319 + 1 = 7657 = 87{,}50428561^2$	$24 \cdot 369 + 1 = 8857 = 94{,}11163584^2$
$24 \cdot 320 + 1 = 7681 = 87{,}64131446^2$	$24 \cdot 370 + 1 = 8881 = 94{,}23905772^2$
$24 \cdot 321 + 1 = 7705 = 87{,}77812939^2$	$24 \cdot 371 + 1 = 8905 = 94{,}36630755^2$
$24 \cdot 322 + 1 = 7729 = 87{,}91473142^2$	$24 \cdot 372 + 1 = 8929 = 94{,}49338601^2$
$24 \cdot 323 + 1 = 7753 = 88{,}05112151^2$	$24 \cdot 373 + 1 = 8953 = 94{,}62029381^2$
$24 \cdot 324 + 1 = 7777 = 88{,}18730067^2$	$24 \cdot 374 + 1 = 8977 = 94{,}74703162^2$
$24 \cdot 325 + 1 = 7801 = 88{,}32326987^2$	$24 \cdot 375 + 1 = 9001 = 94{,}87360012^2$
$24 \cdot 326 + 1 = 7825 = 88{,}45903006^2$	$24 \cdot 376 + 1 = 9025 = 95^2 = (19 \cdot 5)^2$
$24 \cdot 327 + 1 = 7849 = 88{,}59458223^2$	$24 \cdot 377 + 1 = 9049 = 95{,}12623192^2$
$24 \cdot 328 + 1 = 7873 = 88{,}72992731^2$	$24 \cdot 378 + 1 = 9073 = 95{,}25229656^2$
$24 \cdot 329 + 1 = 7897 = 88{,}86506625^2$	$24 \cdot 379 + 1 = 9097 = 95{,}37819457^2$
$24 \cdot 330 + 1 = 7921 = 89^2$	$24 \cdot 380 + 1 = 9097 = 95{,}37819457^2$
$24 \cdot 331 + 1 = 7945 = 89{,}13472948^2$	$24 \cdot 381 + 1 = 9145 = 95{,}62949336^2$
$24 \cdot 332 + 1 = 7969 = 89{,}26925563^2$	$24 \cdot 382 + 1 = 9169 = 9575489544^2$
$24 \cdot 333 + 1 = 7993 = 89{,}40357935^2$	$24 \cdot 383 + 1 = 9193 = 95{,}8801335^2$
$24 \cdot 334 + 1 = 8017 = 89{,}53770156^2$	$24 \cdot 384 + 1 = 9217 = 96{,}00520819^2$
$24 \cdot 335 + 1 = 8041 = 89{,}67162316^2$	$24 \cdot 385 + 1 = 9241 = 96{,}13012015^2$
$24 \cdot 336 + 1 = 8065 = 89{,}80534505^2$	$24 \cdot 386 + 1 = 9265 = 96{,}25487001^2$

$24 \cdot 337 + 1 = 8089 = 89{,}93886813^2$	$24 \cdot 387 + 1 = 9289 = 96{,}37945839^2$
$24 \cdot 338 + 1 = 8113 = 90{,}07219327^2$	$24 \cdot 388 + 1 = 9313 = 96{,}50388593^2$
$24 \cdot 339 + 1 = 8137 = 90{,}20532135^2$	$24 \cdot 389 + 1 = 9337 = 96{,}62815325^2$
$24 \cdot 340 + 1 = 8161 = 90{,}33825325^2$	$24 \cdot 390 + 1 = 9361 = 96{,}75226096^2$
$24 \cdot 341 + 1 = 8185 = 90{,}47098983^2$	$24 \cdot 391 + 1 = 9385 = 96{,}87620967^2$
$24 \cdot 342 + 1 = 8209 = 90{,}60353194^2$	$24 \cdot 392 + 1 = 9409 = 97^2$
$24 \cdot 343 + 1 = 8233 = 90{,}73588044^2$	$24 \cdot 393 + 1 = 9433 = 97{,}12363255^2$
$24 \cdot 344 + 1 = 8257 = 90{,}86803618^2$	$24 \cdot 394 + 1 = 9457 = 97{,}24710793^2$
$24 \cdot 345 + 1 = 8281 = 91^2 = (13 \cdot 7)^2$	$24 \cdot 395 + 1 = 9481 = 97{,}37042672^2$
$24 \cdot 346 + 1 = 8305 = 91{,}13177273^2$	$24 \cdot 396 + 1 = 9505 = 97{,}49358953^2$
$24 \cdot 347 + 1 = 8329 = 91{,}26335519^2$	$24 \cdot 397 + 1 = 9529 = 97{,}61659695^2$
$24 \cdot 348 + 1 = 8353 = 91{,}39474821^2$	$24 \cdot 398 + 1 = 9553 = 97{,}73944956^2$
$24 \cdot 349 + 1 = 8377 = 91{,}5259526^2$	$24 \cdot 399 + 1 = 9577 = 97{,}21479486^2$
$24 \cdot 350 + 1 = 8401 = 91{,}65696918^2$	$24 \cdot 400 + 1 = 9601 = 97{,}98469268^2$

$24 \cdot 401 + 1 = 9625 = 98{,}10708435^2$	$24 \cdot 451 + 1 = 10825 = 104{,}0432602^2$
$24 \cdot 402 + 1 = 9649 = 98{,}22932352^2$	$24 \cdot 452 + 1 = 10849 = 104{,}158533^2$
$24 \cdot 403 + 1 = 9673 = 98{,}35141077^2$	$24 \cdot 453 + 1 = 10873 = 104{,}2736784^2$
$24 \cdot 404 + 1 = 9697 = 98{,}47334665^2$	$24 \cdot 454 + 1 = 10897 = 104{,}3886967^2$
$24 \cdot 405 + 1 = 9721 = 98{,}59513173^2$	$24 \cdot 455 + 1 = 10921 = 104{,}5035885^2$
$24 \cdot 406 + 1 = 9745 = 98{,}71676656^2$	$24 \cdot 456 + 1 = 10945 = 104{,}618354^2$
$24 \cdot 407 + 1 = 9769 = 98{,}8382517^2$	$24 \cdot 457 + 1 = 10969 = 1047329938^2$
$24 \cdot 408 + 1 = 9793 = 98{,}95958771^2$	$24 \cdot 458 + 1 = 10993 = 104{,}8475083^2$
$24 \cdot 409 + 1 = 9817 = 99{,}08077513^2$	$24 \cdot 459 + 1 = 11017 = 104{,}9618978^2$
$24 \cdot 410 + 1 = 9841 = 99{,}2018145^2$	$24 \cdot 460 + 1 = 11041 = 105{,}0761629^2$

24·411 + 1 = 9865 = 99,32270637²	24·461 + 1 = 11065 = 105,1903037²
24·412 + 1 = 9889 = 99,44345127²	24·462 + 1 = 11089 = 105,3043209²
24·413 + 1 = 9913 = 99,56404974²	24·463 + 1 = 11113 = 105,4182147²
24·414 + 1 = 9937 = 99,68450231²	24·464 + 1 = 11137 = 105,5319857²
24·415 + 1 = 9961 = 99,8048095²	24·465 + 1 = 11161 = 105,6456341²
24·416 + 1 = 9985 = 99,92497185²	24·466 + 1 = 11185 = 105,7591604²
24·417 + 1 = 10009 = 100,0449899²	24·467 + 1 = 11209 = 105,8725649²
24·418 + 1 = 10033 = 100,16486441²	24·468 + 1 = 11233 = 1059858481²
24·419 + 1 = 10057 = 100,284595²	24·469 + 1 = 11257 = 106,0990104²
24·420 + 1 = 10081 = 100,4041832²	24·470 + 1 = 11281 = 106,212052²
24·421 + 1 = 10105 = 100,5236391²	24·471 + 1 = 11305 = 106,3249735²
24·422 + 1 = 10129 = 100,6429332²	24·472 + 1 = 11329 = 106,4377752²
24·423 + 1 = 10153 = 100,762096²	24·473 + 1 = 11353 = 106,5504575²
24·424 + 1 = 10177 = 100,8811182²	24·474 + 1 = 11376 = 106,658333²
24·425 + 1 = 10201 = 101²	24·475 + 1 = 11401 = 106,7754653²
24·426 + 1 = 10225 = 101,1187421²	24·476 + 1 = 11425 = 106,8877916²
24·427 + 1 = 10249 = 101,2373449²	24·477 + 1 = 11449 = 107²
24·428 + 1 = 10273 = 101,3558089²	24·478 + 1 = 11473 = 107,1120908²
24·429 + 1 = 10297 = 101,4741346²	24·479 + 1 = 11497 = 107,2240645²
24·430 + 1 = 10321 = 101,5923225²	24·480 + 1 = 11521 = 107,3359213²
24·431 + 1 = 10345 = 101,7103731²	24·481 + 1 = 11545 = 107,4476617²
24·432 + 1 = 10369 = 101,8282868²	24·482 + 1 = 11569 = 107,559286²
24·433 + 1 = 10393 = 101,9460642²	24·483 + 1 = 11593 = 107,6707946²
24·434 + 1 = 10417 = 102,0637056²	24·484 + 1 = 11617 = 107,7821879²
24·435 + 1 = 10441 = 102,1812116²	24·485 + 1 = 11641 = 107893466²

$24 \cdot 436 + 1 = 10465 = 102{,}2985826^2$	$24 \cdot 486 + 1 = 11665 = 108{,}0046295^2$
$24 \cdot 437 + 1 = 10489 = 102{,}4158191^2$	$24 \cdot 487 + 1 = 11689 = 108{,}1156788^2$
$24 \cdot 438 + 1 = 10513 = 102{,}5329215^2$	$24 \cdot 488 + 1 = 11713 = 108{,}2266141^2$
$24 \cdot 439 + 1 = 10537 = 102{,}6498904^2$	$24 \cdot 489 + 1 = 11737 = 108{,}3374358^2$
$24 \cdot 440 + 1 = 10561 = 102{,}7667261^2$	$24 \cdot 490 + 1 = 11761 = 108{,}4481443^2$
$24 \cdot 441 + 1 = 10585 = 102{,}8834292^2$	$24 \cdot 491 + 1 = 11785 = 108{,}5587399^2$
$24 \cdot 442 + 1 = 10609 = 103^2$	$24 \cdot 492 + 1 = 11809 = 108{,}6692229^2$
$24 \cdot 443 + 1 = 10633 = 103{,}116439^2$	$24 \cdot 493 + 1 = 11833 = 108{,}7795937^2$
$24 \cdot 444 + 1 = 10657 = 103{,}2327467^2$	$24 \cdot 494 + 1 = 11857 = 108{,}8898526^2$
$24 \cdot 445 + 1 = 10681 = 103{,}3489236^2$	$24 \cdot 495 + 1 = 11881 = 109^2$
$24 \cdot 446 + 1 = 10705 = 103{,}4649699^2$	$24 \cdot 496 + 1 = 11905 = 109{,}1100362^2$
$24 \cdot 447 + 1 = 10729 = 103{,}5808863^2$	$24 \cdot 497 + 1 = 11929 = 109{,}2199615^2$
$24 \cdot 448 + 1 = 10753 = 103{,}696673^2$	$24 \cdot 498 + 1 = 11953 = 109{,}3297764^2$
$24 \cdot 449 + 1 = 10777 = 103{,}8123307^2$	$24 \cdot 499 + 1 = 11977 = 109{,}439481^2$
$24 \cdot 450 + 1 = 10801 = 103{,}9278596^2$	$24 \cdot 500 + 1 = 12001 = 109{,}5490758^2$

$24 \cdot 501 + 1 = 12025 = 109{,}658561^2$	$24 \cdot 551 + 1 = 13225 = 115^2 = (23 \cdot 5)^2$
$24 \cdot 502 + 1 = 12049 = 109{,}767937^2$	$24 \cdot 552 + 1 = 13249 = 115{,}1043005^2$
$24 \cdot 503 + 1 = 12073 = 109{,}8772042^2$	$24 \cdot 553 + 1 = 13273 = 115{,}2085066^2$
$24 \cdot 504 + 1 = 12097 = 109{,}9863628^2$	$24 \cdot 554 + 1 = 13297 = 115{,}3126186^2$
$24 \cdot 505 + 1 = 12121 = 110{,}0954132^2$	$24 \cdot 555 + 1 = 13321 = 115{,}4166366^2$
$24 \cdot 506 + 1 = 12145 = 110{,}2043556^2$	$24 \cdot 556 + 1 = 13345 = 115{,}5205609^2$
$24 \cdot 507 + 1 = 12169 = 110{,}3131905^2$	$24 \cdot 557 + 1 = 13369 = 115{,}6243919^2$
$24 \cdot 508 + 1 = 12193 = 110{,}4219181^2$	$24 \cdot 558 + 1 = 13393 = 115{,}7281297^2$
$24 \cdot 509 + 1 = 12217 = 110{,}5305388^2$	$24 \cdot 559 + 1 = 13417 = 115{,}8317746^2$

24·510 + 1 = 12241 = 110,6390528²	24·560 + 1 = 13441 = 115,9353268²
24·511 + 1 = 12265 = 110,7474605²	24·561 + 1 = 13465 = 116,0387866²
24·512 + 1 = 12289 = 110,8557621²	24·562 + 1 = 13489 = 116,1421543²
24·513 + 1 = 12313 = 110,9639581²	24·563 + 1 = 13513 = 116,24543²
24·514 + 1 = 12337 = 111,0720487²	24·564 + 1 = 13536 = 116,3443166²
24·515 + 1 = 12361 = 111,1800342²	24·565 + 1 = 13561 = 116,4517067²
24·516 + 1 = 12385 = 111,2879149²	24·566 + 1 = 13585 = 116,5547082²
24·517 + 1 = 12409 = 111,3956911²	24·567 + 1 = 13609 = 116,6576187²
24·518 + 1 = 12433 = 111,5033632²	24·568 + 1 = 13633 = 116,7604385²
24·519 + 1 = 12457 = 111,6109314²	24·569 + 1 = 13657 = 116,8631679²
24·520 + 1 = 12481 = 111,718396²	24·570 + 1 = 13681 = 116,965807²
24·521 + 1 = 12505 = 111,8257573²	24·571 + 1 = 13705 = 117,0683561²
24·522 + 1 = 12529 = 111,9330157²	24·572 + 1 = 13729 = 117,1708155
24·523 + 1 = 12553 = 112,0401714²	24·573 + 1 = 13753 = 117,2731853²
24·524 + 1 = 12577 = 112,1472247²	24·574 + 1 = 13777 = 117,3754659²
24·525 + 1 = 12601 = 112,2541759²	24·575 + 1 = 13801 = 117,4776575²
24·526 + 1 = 12625 = 112,3610253²	24·576 + 1 = 13825 = 117,5797602²
24·527 + 1 = 12649 = 112,4677732²	24·577 + 1 = 13849 = 117,6817743²
24·528 + 1 = 12673 = 112,5744198²	24·578 + 1 = 13873 = 117,7837001²
24·529 + 1 = 12697 = 112,6809656²	24·579 + 1 = 13897 = 117,8855377²
24·530 + 1 = 12721 = 112,7874106²	24·580 + 1 = 13921 = 117,9872875²
24·531 + 1 = 12745 = 112,8937554²	24·581 + 1 = 13945 = 118,0889495²
24·532 + 1 = 12769 = 113²	24·582 + 1 = 13969 = 118,1905242²
24·533 + 1 = 12793 = 113,1061448²	24·583 + 1 = 13993 = 118,2920116²
24·534 + 1 = 12817 = 113,2121902²	24·584 + 1 = 14017 = 118,393412²

$24 \cdot 535 + 1 = 12841 = 113{,}3181362^2$	$24 \cdot 585 + 1 = 14041 = 118{,}4947256^2$
$24 \cdot 536 + 1 = 12865 = 113{,}4239834^2$	$24 \cdot 586 + 1 = 14065 = 118{,}59527^2$
$24 \cdot 537 + 1 = 12889 = 113{,}5297318^2$	$24 \cdot 587 + 1 = 14089 = 118{,}6970935^2$
$24 \cdot 538 + 1 = 12913 = 113{,}6353818^2$	$24 \cdot 588 + 1 = 14113 = 118{,}7981481^2$
$24 \cdot 539 + 1 = 12937 = 113{,}7409337^2$	$24 \cdot 589 + 1 = 14137 = 118{,}8991169^2$
$24 \cdot 540 + 1 = 12961 = 113{,}8463877^2$	$24 \cdot 590 + 1 = 14161 = 119^2 = (17 \cdot 7)^2$
$24 \cdot 541 + 1 = 12985 = 113{,}9517442^2$	$24 \cdot 591 + 1 = 14185 = 119{,}1007976^2$
$24 \cdot 542 + 1 = 13009 = 114{,}0570033^2$	$24 \cdot 592 + 1 = 14209 = 119{,}2015101^2$
$24 \cdot 543 + 1 = 13033 = 114{,}1621654^2$	$24 \cdot 593 + 1 = 14233 = 119{,}3021374^2$
$24 \cdot 544 + 1 = 13057 = 114{,}2672306^2$	$24 \cdot 594 + 1 = 14257 = 119{,}40268^2$
$24 \cdot 545 + 1 = 13081 = 114{,}3721994^2$	$24 \cdot 595 + 1 = 14281 = 119{,}503138^2$
$24 \cdot 546 + 1 = 13105 = 114{,}4770719^2$	$24 \cdot 596 + 1 = 14305 = 119{,}6035117^2$
$24 \cdot 547 + 1 = 13129 = 114{,}5818485^2$	$24 \cdot 597 + 1 = 14329 = 119{,}7038011^2$
$24 \cdot 548 + 1 = 13153 = 114{,}6865293^2$	$24 \cdot 598 + 1 = 14352 = 119{,}7998331^2$
$24 \cdot 549 + 1 = 13177 = 114{,}7911146^2$	$24 \cdot 599 + 1 = 14377 = 119{,}9041284^2$
$24 \cdot 550 + 1 = 13201 = 114{,}8956048^2$	$24 \cdot 600 + 1 = 14401 = 120{,}0041666^2$

$24 \cdot 601 + 1 = 14425 = 120{,}1041215^2$	$24 \cdot 651 + 1 = 15625 = 125^2 = (5^3)^2 = 5^6$
$24 \cdot 602 + 1 = 14449 = 120{,}2039933^2$	$24 \cdot 652 + 1 = 15649 = 125{,}0959632^2$
$24 \cdot 603 + 1 = 14473 = 120{,}3037822^2$	$24 \cdot 653 + 1 = 15673 = 125{,}1918528^2$
$24 \cdot 604 + 1 = 14497 = 120{,}4034883^2$	$24 \cdot 654 + 1 = 15697 = 125{,}287669^2$
$24 \cdot 605 + 1 = 14521 = 120{,}503112^2$	$24 \cdot 655 + 1 = 15721 = 125{,}383412^2$
$24 \cdot 606 + 1 = 14545 = 120{,}6026534^2$	$24 \cdot 656 + 1 = 15745 = 125{,}4790819^2$
$24 \cdot 607 + 1 = 14569 = 120{,}7021127^2$	$24 \cdot 657 + 1 = 15769 = 125{,}574679^2$
$24 \cdot 608 + 1 = 14593 = 120{,}8014901^2$	$24 \cdot 658 + 1 = 15793 = 125{,}6702033^2$

$24 \cdot 609 + 1 = 14617 = 120{,}9007858^2$	$24 \cdot 659 + 1 = 15817 = 125{,}7656551^2$
$24 \cdot 610 + 1 = 14641 = 121^2 = (11^2)^2$	$24 \cdot 660 + 1 = 15841 = 125{,}8610345^2$
$24 \cdot 611 + 1 = 14665 = 121{,}0991329^2$	$24 \cdot 661 + 1 = 15865 = 125{,}9563416^2$
$24 \cdot 612 + 1 = 14689 = 121{,}1981848^2$	$24 \cdot 662 + 1 = 15889 = 126{,}0515767^2$
$24 \cdot 613 + 1 = 14713 = 121{,}2971558^2$	$24 \cdot 663 + 1 = 15912 = 126{,}1427763^2$
$24 \cdot 614 + 1 = 14737 = 121{,}3960461^2$	$24 \cdot 664 + 1 = 15936$
$24 \cdot 615 + 1 = 14761 = 121{,}4948559^2$	$24 \cdot 665 + 1 = 15960$
$24 \cdot 616 + 1 = 14785 = 12159358 54^2$	$24 \cdot 666 + 1 = 15984$
$24 \cdot 617 + 1 = 14809 = 121{,}6922348^2$	$24 \cdot 667 + 1 = 16009$
$24 \cdot 618 + 1 = 14833 = 121{,}7908043^2$	$24 \cdot 668 + 1 = 16033$
$24 \cdot 619 + 1 = 14857 = 121{,}889294^2$	$24 \cdot 669 + 1 = 16057$
$24 \cdot 620 + 1 = 14881 = 121{,}9877043^2$	$24 \cdot 670 + 1 = 16081$
$24 \cdot 621 + 1 = 14905 = 122{,}0860352^2$	$24 \cdot 671 + 1 = 16105$
$24 \cdot 622 + 1 = 14929$	$24 \cdot 672 + 1 = 16129 = 127^2$
$24 \cdot 623 + 1 = 14953$	$24 \cdot 673 + 1 = 16153$
$24 \cdot 624 + 1 = 14977$	$24 \cdot 674 + 1 = 16177$
$24 \cdot 625 + 1 = 15001$	$24 \cdot 675 + 1 = 16201$
$24 \cdot 626 + 1 = 15025$	$24 \cdot 676 + 1 = 16225$
$24 \cdot 627 + 1 = 15049$	$24 \cdot 677 + 1 = 16249$
$24 \cdot 628 + 1 = 15073$	$24 \cdot 678 + 1 = 16273$
$24 \cdot 629 + 1 = 15097 = 122{,}8698498^2$	$24 \cdot 679 + 1 = 16297$
$24 \cdot 630 + 1 = 15121 = 122{,}9674754^2$	$24 \cdot 680 + 1 = 16321$
$24 \cdot 631 + 1 = 15145 = 123{,}0650235^2$	$24 \cdot 681 + 1 = 16345$
$24 \cdot 632 + 1 = 15169$	$24 \cdot 682 + 1 = 16369 = 127{,}9413928^2$
$24 \cdot 633 + 1 = 15193$	$24 \cdot 683 + 1 = 16393 = 128{,}0351514^2$

$24 \cdot 634 + 1 = 15217$	$24 \cdot 684 + 1 = 16417 = 128{,}1288414^2$
$24 \cdot 635 + 1 = 15241$	$24 \cdot 685 + 1 = 16441$
$24 \cdot 636 + 1 = 15265$	$24 \cdot 686 + 1 = 16465$
$24 \cdot 637 + 1 = 15289$	$24 \cdot 687 + 1 = 16489$
$24 \cdot 638 + 1 = 15313$	$24 \cdot 688 + 1 = 16513$
$24 \cdot 639 + 1 = 15337$	$24 \cdot 689 + 1 = 16537$
$24 \cdot 640 + 1 = 15361 = 123{,}9395014^2$	$24 \cdot 690 + 1 = 16561$
$24 \cdot 641 + 1 = 15385 = 124{,}036285^2$	$24 \cdot 691 + 1 = 16585$
$24 \cdot 642 + 1 = 15409$	$24 \cdot 692 + 1 = 16609$
$24 \cdot 643 + 1 = 15433 = 124{,}2296261^2$	$24 \cdot 693 + 1 = 16633 = 128{,}9689885^2$
$24 \cdot 644 + 1 = 15457$	$24 \cdot 694 + 1 = 16657 = 129{,}0620006^2$
$24 \cdot 645 + 1 = 15481$	$24 \cdot 695 + 1 = 16681$
$24 \cdot 646 + 1 = 15505$	$24 \cdot 696 + 1 = 16705$
$24 \cdot 647 + 1 = 15529$	$24 \cdot 697 + 1 = 16729$
$24 \cdot 648 + 1 = 15553$	$24 \cdot 698 + 1 = 16753 = 129{,}4333805^2$
$24 \cdot 649 + 1 = 15577 = 124{,}8078523^2$	$24 \cdot 699 + 1 = 16777$
$24 \cdot 650 + 1 = 15601 = 124{,}9039631^2$	$24 \cdot 700 + 1 = 16801 = 129{,}6186715^2$

$24 \cdot 701 + 1 = 16825 = 129{,}7112177^2$	$24 \cdot 751 + 1 = 18025 = 134{,}2572158^2$
$24 \cdot 702 + 1 = 16849 = 129{,}8036979^2$	$24 \cdot 752 + 1 = 18049$
$24 \cdot 703 + 1 = 16873 = 129{,}8961123^2$	$24 \cdot 753 + 1 = 18073$
$24 \cdot 704 + 1 = 16879 = 129{,}988461^2$	$24 \cdot 754 + 1 = 18097$
$24 \cdot 705 + 1 = 16921 = 130{,}0807442^2$	$24 \cdot 755 + 1 = 18121$
$24 \cdot 706 + 1 = 16945 = 130{,}1729619^2$	$24 \cdot 756 + 1 = 18145$
$24 \cdot 707 + 1 = 16969 = 130{,}2651143^2$	$24 \cdot 757 + 1 = 18169 = 134{,}792433^2$

24·708 + 1 = 16993 = 130,3572016²	24·758 + 1 = 18193 = 134,8814294²
24·709 + 1 = 17017	24·759 + 1 = 18217 = 134,9703671²
24·710 + 1 = 17041	24·760 + 1 = 18241 = 135,0592463²
24·711 + 1 = 17065	24·761 + 1 = 18265
24·712 + 1 = 17089	24·762 + 1 = 18289
24·713 + 1 = 17113	24·763 + 1 = 18313
24·714 + 1 = 17137	24·764 + 1 = 18337
24·715 + 1 = 17161 = 131²	24·765 + 1 = 18361 = 135,5027675²
24·716 + 1 = 17185	24·766 + 1 = 18385
24·717 + 1 = 17209	24·767 + 1 = 18409
24·718 + 1 = 17233	24·768 + 1 = 18433
24·719 + 1 = 17257	24·769 + 1 = 18457
24·720 + 1 = 17281	24·770 + 1 = 18481 = 135,9448418²
24·721 + 1 = 17305	24·771 + 1 = 18505 = 136,0330842²
24·722 + 1 = 17329	24·772 + 1 = 18529 = 136,1212695²
24·723 + 1 = 17353	24·773 + 1 = 18553
24·724 + 1 = 17377	24·774 + 1 = 18577
24·725 + 1 = 17401 = 131,91285²	24·775 + 1 = 18601
24·726 + 1 = 17425 = 132,0037878²	24·776 + 1 = 18625
24·727 + 1 = 17449	24·777 + 1 = 18649
24·728 + 1 = 17473	24·778 + 1 = 18673
24·729 + 1 = 17497	24·779 + 1 = 18697
24·730 + 1 = 17521	24·780 + 1 = 18721
24·731 + 1 = 17545	24·781 + 1 = 18745
24·732 + 1 = 17569	24·782 + 1 = 18769 = 137²

$24 \cdot 733 + 1 = 17593$	$24 \cdot 783 + 1 = 18793$
$24 \cdot 734 + 1 = 17617 = 132{,}7290473^2$	$24 \cdot 784 + 1 = 18817$
$24 \cdot 735 + 1 = 17641$	$24 \cdot 785 + 1 = 18841$
$24 \cdot 736 + 1 = 17665 = 132{,}9097438^2$	$24 \cdot 786 + 1 = 18865$
$24 \cdot 737 + 1 = 17689 = 133^2 = (19 \cdot 7)^2$	$24 \cdot 787 + 1 = 18889$
$24 \cdot 738 + 1 = 17713 = 133{,}090195^2$	$24 \cdot 788 + 1 = 18913$
$24 \cdot 739 + 1 = 17737$	$24 \cdot 789 + 1 = 18937$
$24 \cdot 740 + 1 = 17761$	$24 \cdot 790 + 1 = 18961$
$24 \cdot 741 + 1 = 17785$	$24 \cdot 791 + 1 = 18985$
$24 \cdot 742 + 1 = 17809$	$24 \cdot 792 + 1 = 19009$
$24 \cdot 743 + 1 = 17833$	$24 \cdot 793 + 1 = 19033 = 137{,}9601392^2$
$24 \cdot 744 + 1 = 17857$	$24 \cdot 794 + 1 = 19057 = 138{,}0470934^2$
$24 \cdot 745 + 1 = 17881$	$24 \cdot 795 + 1 = 19081$
$24 \cdot 746 + 1 = 17905$	$24 \cdot 796 + 1 = 19105 = 138{,}2208378^2$
$24 \cdot 747 + 1 = 17929$	$24 \cdot 797 + 1 = 19129 = 138{,}3076281^2$
$24 \cdot 748 + 1 = 17953 = 133{,}9888055^2$	$24 \cdot 798 + 1 = 19153$
$24 \cdot 749 + 1 = 17977 = 134{,}0783353^2$	$24 \cdot 799 + 1 = 19177$
$24 \cdot 750 + 1 = 18001 = 134{,}1678054^2$	$24 \cdot 800 + 1 = 19201 = 138{,}567673^2$

$24 \cdot 801 + 1 = 19225 = 138{,}6542462^2$	$24 \cdot 851 + 1 = 20425 = 142{,}9160593^2$
$24 \cdot 802 + 1 = 19249$	$24 \cdot 852 + 1 = 20449 = 143^2 = (13 \cdot 11)^2$
$24 \cdot 803 + 1 = 19273$	$24 \cdot 853 + 1 = 20473$
$24 \cdot 804 + 1 = 19297$	$24 \cdot 854 + 1 = 20497$
$24 \cdot 805 + 1 = 19321 = 139^2$	$24 \cdot 855 + 1 = 20521$
$24 \cdot 806 + 1 = 19345$	$24 \cdot 856 + 1 = 20545 = 143{,}3352713^2$

24·807 + 1 = 19369	24·857 + 1 = 20569 = 143,4189667²
24·808 + 1 = 19393	24·858 + 1 = 20593
24·809 + 1 = 19417	24·859 + 1 = 20617
24·810 + 1 = 19441	24·860 + 1 = 20641
24·811 + 1 = 19465	24·861 + 1 = 20665
24·812 + 1 = 19489	24·862 + 1 = 20689
24·813 + 1 = 19513	24·863 + 1 = 20713 = 143,9201167²
24·814 + 1 = 19537	24·864 + 1 = 20737 = 144,0034722²
24·815 + 1 = 19561	24·865 + 1 = 20761
24·816 + 1 = 19585 = 139,9464183²	24·866 + 1 = 20785 = 144,1700385²
24·817 + 1 = 19609 = 140,0321392²	24·867 + 1 = 20809
24·818 + 1 = 19633 = 140,1178076²	24·868 + 1 = 20833
24·819 + 1 = 19657	24·869 + 1 = 20857
24·820 + 1 = 19681 = 140,2889875²	24·870 + 1 = 20881
24·821 + 1 = 19705	24·871 + 1 = 20905
24·822 + 1 = 19729	24·872 + 1 = 20929
24·823 + 1 = 19753	24·873 + 1 = 20953
24·824 + 1 = 19777	24·874 + 1 = 20977
24·825 + 1 = 19801	24·875 + 1 = 21001
24·826 + 1 = 19825	24·876 + 1 = 21025 = 145² (29·5)²
24·827 + 1 = 19849	24·877 + 1 = 21049 = 145,082735²
24·828 + 1 = 19873	24·878 + 1 = 21073
24·829 + 1 = 19897	24·879 + 1 = 21097
24·830 + 1 = 19921	24·880 + 1 = 21121
24·831 + 1 = 19945	24·881 + 1 = 21145 = 145,4132044²

24·832 + 1 = 19969	24·882 + 1 = 21169 = 145,4957044²
24·833 + 1 = 19993	24·883 + 1 = 21193
24·834 + 1 = 20017	24·884 + 1 = 21217
24·835 + 1 = 20041	24·885 + 1 = 21241
24·836 + 1 = 20065	24·886 + 1 = 21265
24·837 + 1 = 20089	24·887 + 1 = 21289
24·838 + 1 = 20113	24·888 + 1 = 21313 = 145,9897257²
24·839 + 1 = 20137	24·889 + 1 = 21337 = 146,0719001²
24·840 + 1 = 20161 = 141,9894362²	24·890 + 1 = 21361
24·841 + 1 = 20185 = 142,0739244²	24·891 + 1 = 21385
24·842 + 1 = 20209	24·892 + 1 = 21409
24·843 + 1 = 20223	24·893 + 1 = 21433
24·844 + 1 = 20257	24·894 + 1 = 21457
24·845 + 1 = 20281	24·895 + 1 = 21481
24·846 + 1 = 20305	24·896 + 1 = 21505
24·847 + 1 = 20329	24·897 + 1 = 21529
24·848 + 1 = 20353	24·898 + 1 = 21553
24·849 + 1 = 20377	24·899 + 1 = 21577
24·850 + 1 = 20401	24·900 + 1 = 21601 = 146,9727866²

24·901 + 1 = 21625 = 147,0544117²	24·951 + 1 = 22825
24·902 + 1 = 21649	24·952 + 1 = 22849
24·903 + 1 = 21673	24·953 + 1 = 22873
24·904 + 1 = 21697	24·954 + 1 = 22897
24·905 + 1 = 21721	24·955 + 1 = 22921

24·906 + 1 = 21745	24·956 + 1 = 22945
24·907 + 1 = 21769	24·957 + 1 = 22969
24·908 + 1 = 21793	24·958 + 1 = 22993
24·909 + 1 = 21817 = 147,7057886²	24·959 + 1 = 23017
24·910 + 1 = 21841	24·960 + 1 = 23041
24·911 + 1 = 21865	24·961 + 1 = 23065
24·912 + 1 = 21889 = 147,9493156²	24·962 + 1 = 23089 = 151,9506499²
24·913 + 1 = 21913 = 148,0304023²	24·963 + 1 = 23113 = 152,0296024²
24·914 + 1 = 21937	24·964 + 1 = 23137 = 152,1085139²
24·915 + 1 = 21961	24·965 + 1 = 23161
24·916 + 1 = 21985	24·966 + 1 = 23185
24·917 + 1 = 22009	24·967 + 1 = 23209
24·918 + 1 = 22033	24·968 + 1 = 23233
24·919 + 1 = 22057	24·969 + 1 = 23257
24·920 + 1 = 22081	24·970 + 1 = 23281
24·921 + 1 = 22105	24·971 + 1 = 23305
24·922 + 1 = 22129	24·972 + 1 = 23329
24·923 + 1 = 22153	24·973 + 1 = 23353
24·924 + 1 = 2217	24·974 + 1 = 23377
24·925 + 1 = 22201 = 149²	24·975 + 1 = 23401 = 152,973857²
24·926 + 1 = 22225	24·976 + 1 = 23425 = 153,0522787²
24·927 + 1 = 22249	24·977 + 1 = 23449 = 153,1306632²
24·928 + 1 = 22273	24·978 + 1 = 23473
24·929 + 1 = 22297	24·979 + 1 = 23497
24·930 + 1 = 22321	24·980 + 1 = 23521 = 153,3655763²

$24 \cdot 931 + 1 = 22345$	$24 \cdot 981 + 1 = 23545$
$24 \cdot 932 + 1 = 22369$	$24 \cdot 982 + 1 = 23569$
$24 \cdot 933 + 1 = 22393$	$24 \cdot 983 + 1 = 23593$
$24 \cdot 934 + 1 = 22417$	$24 \cdot 984 + 1 = 23617 = 153{,}6782353^2$
$24 \cdot 935 + 1 = 22441$	$24 \cdot 985 + 1 = 23641$
$24 \cdot 936 + 1 = 22465 = 149{,}8832879^2$	$24 \cdot 986 + 1 = 23665$
$24 \cdot 937 + 1 = 22489 = 149{,}9633289^2$	$24 \cdot 987 + 1 = 23689$
$24 \cdot 938 + 1 = 22513 = 150{,}0433271^2$	$24 \cdot 988 + 1 = 23713 = 153{,}9902594^2$
$24 \cdot 939 + 1 = 22537$	$24 \cdot 989 + 1 = 23737 = 154{,}0681667^2$
$24 \cdot 940 + 1 = 22561$	$24 \cdot 990 + 1 = 23761 = 154{,}1460347^2$
$24 \cdot 941 + 1 = 22585$	$24 \cdot 991 + 1 = 23785$
$24 \cdot 942 + 1 = 22609$	$24 \cdot 992 + 1 = 23809$
$24 \cdot 943 + 1 = 22633$	$24 \cdot 993 + 1 = 23833$
$24 \cdot 944 + 1 = 22657$	$24 \cdot 994 + 1 = 23857$
$24 \cdot 945 + 1 = 22681$	$24 \cdot 995 + 1 = 23881$
$24 \cdot 946 + 1 = 22705$	$24 \cdot 996 + 1 = 23905$
$24 \cdot 947 + 1 = 22729$	$24 \cdot 997 + 1 = 23929$
$24 \cdot 948 + 1 = 22753$	$24 \cdot 998 + 1 = 23953$
$24 \cdot 949 + 1 = 22777$	$24 \cdot 999 + 1 = 23977$
$24 \cdot 950 + 1 = 22801 = 151^2$	$24 \cdot 1000 + 1 = 24001$

$24 \cdot 1001 + 1 = 24025 = 155^2 = (31 \cdot 5)^2$	$24 \cdot 1051 + 1 = 25225$
$24 \cdot 1002 + 1 = 24049$	$24 \cdot 1052 + 1 = 25249$
$24 \cdot 1003 + 1 = 24073$	$24 \cdot 1053 + 1 = 25273 = 158{,}9748408^2$
$24 \cdot 1004 + 1 = 24097$	$24 \cdot 1054 + 1 = 25297 = 159{,}0503065^2$

24·1005 + 1 = 24121	24·1055 + 1 = 25321
24·1006 + 1 = 24145	24·1056 + 1 = 25345
24·1007 + 1 = 24169	24·1057 + 1 = 25369
24·1008 + 1 = 24193	24·1058 + 1 = 25393
24·1009 + 1 = 24217	24·1059 + 1 = 25417
24·1010 + 1 = 24241	24·1060 + 1 = 25441
24·1011 + 1 = 24265	24·1061 + 1 = 25465
24·1012 + 1 = 24289	24·1062 + 1 = 25489
24·1013 + 1 = 24313 = 155,9262646²	24·1063 + 1 = 25513
24·1014 + 1 = 24337 = 156,0032051²	24·1064 + 1 = 25537
24·1015 + 1 = 24361	24·1065 + 1 = 25561
24·1016 + 1 = 24385	24·1066 + 1 = 25585 = 159,9531181²
24·1017 + 1 = 24409	24·1067 + 1 = 25609 = 160,0281225²
24·1018 + 1 = 24433	24·1068 + 1 = 25633
24·1019 + 1 = 24457	24·1069 + 1 = 25657
24·1020 + 1 = 24481	24·1070 + 1 = 25681
24·1021 + 1 = 24505	24·1071 + 1 = 25705
24·1022 + 1 = 24259	24·1072 + 1 = 25729
24·1023 + 1 = 24553	24·1073 + 1 = 25753
24·1024 + 1 = 24577	24·1074 + 1 = 25777
24·1025 + 1 = 24601	24·1075 + 1 = 25801
24·1026 + 1 = 24625	24·1076 + 1 = 25825
24·1027 + 1 = 24649 = 157²	24·1077 + 1 = 25849
24·1028 + 1 = 24673	24·1078 + 1 = 25873
24·1029 + 1 = 24697	24·1079 + 1 = 25897

24·1030 + 1 = 24721 = 157,2291322²	24·1080 + 1 = 25921 = 161² (=7·23)²
24·1031 + 1 = 24745	24·1081 + 1 = 25945
24·1032 + 1 = 24769	24·1082 + 1 = 25969
24·1033 + 1 = 24793	24·1083 + 1 = 25993
24·1034 + 1 = 24817	24·1084 + 1 = 26017
24·1035 + 1 = 24841	24·1085 + 1 = 26041
24·1036 + 1 = 24865	24·1086 + 1 = 26065
24·1037 + 1 = 24889	24·1087 + 1 = 26089
24·1038 + 1 = 24913	24·1088 + 1 = 26113
24·1039 + 1 = 24937	24·1089 + 1 = 26137
24·1040 + 1 = 24961 = 157,990506²	24·1090 + 1 = 26161
24·1041 + 1 = 24985 = 158,0664417²	24·1091 + 1 = 26185
24·1042 + 1 = 25009	24·1092 + 1 = 26209
24·1043 + 1 = 25033	24·1093 + 1 = 24233 = 161,9660458²
24·1044 + 1 = 25057	24·1094 + 1 = 26257 = 162,0401185²
24·1045 + 1 = 25081	24·1095 + 1 = 26281
24·1046 + 1 = 25105	24·1096 + 1 = 26305
24·1047 + 1 = 25129	24·1097 + 1 = 26329
24·1048 + 1 = 25153	24·1098 + 1 = 26353
24·1049 + 1 = 25177	24·1099 + 1 = 26377
24·1050 + 1 = 25201	24·1100 + 1 = 26401

24·1101 + 1 = 26425	24·1151 + 1 = 27625
24·1102 + 1 = 26449	24·1152 + 1 = 27649
24·1103 + 1 = 26473	24·1153 + 1 = 27673

24·1104 + 1 = 26497	24·1154 + 1 = 27697
24·1105 + 1 = 26521	24·1155 + 1 = 27721
24·1106 + 1 = 26545	24·1156 + 1 = 27745
24·1107 + 1 = 26569 = 163²	24·1157 + 1 = 27769
24·1108 + 1 = 26593	24·1158 + 1 = 27793
24·1109 + 1 = 26617	24·1159 + 1 = 27817
24·1110 + 1 = 26641	24·1160 + 1 = 27841
24·1111 + 1 = 26665	24·1161 + 1 = 27865
24·1112 + 1 = 26689	24·1162 + 1 = 27889 = 167²
24·1113 + 1 = 26713	24·1163 + 1 = 27913
24·1114 + 1 = 26737	24·1164 + 1 = 27937
24·1115 + 1 = 26761	24·1165 + 1 = 27961
24·1116 + 1 = 26785	24·1166 + 1 = 27985
24·1117 + 1 = 26809	24·1167 + 1 = 28009
24·1118 + 1 = 26833	24·1168 + 1 = 28033
24·1119 + 1 = 26857	24·1169 + 1 = 28057
24·1120 + 1 = 26881 = 163,9542619²	24·1170 + 1 = 28081
24·1121 + 1 = 26905 = 164,0274367²	24·1171 + 1 = 28105
24·1122 + 1 = 26929	24·1172 + 1 = 28129
24·1123 + 1 = 26953	24·1173 + 1 = 28153
24·1124 + 1 = 26977	24·1174 + 1 = 28177 = 167,860²
24·1125 + 1 = 27001	24·1175 + 1 = 28201 = 167,9315337²
24·1126 + 1 = 27025	24·1176 + 1 = 28225 = 168,0029762²
24·1127 + 1 = 27049	24·1177 + 1 = 28249
24·1128 + 1 = 27073	24·1178 + 1 = 28273

24·1129 + 1 = 27097	24·1179 + 1 = 28297
24·1130 + 1 = 27121	24·1180 + 1 = 28321
24·1131 + 1 = 27145	24·1181 + 1 = 28345
24·1132 + 1 = 27169 = 164,8302157²	24·1182 + 1 = 28369
24·1133 + 1 = 27193 = 164,8999697²	24·1183 + 1 = 28393
24·1134 + 1 = 27217 = 164,9757558²	24·1184 + 1 = 28417
24·1135 + 1 = 27241 = 165,0484777²	24·1185 + 1 = 28441
24·1136 + 1 = 27265	24·1186 + 1 = 28465
24·1137 + 1 = 27289	24·1187 + 1 = 28489
24·1138 + 1 = 27313	24·1188 + 1 = 28513 = 168,8579284²
24·1139 + 1 = 27337	24·1189 + 1 = 28537
24·1140 + 1 = 27361	24·1190 + 1 = 28561 = 169² = (13·13)
24·1141 + 1 = 27385	24·1191 + 1 = 28585
24·1142 + 1 = 27409	24·1192 + 1 = 28609
24·1143 + 1 = 27433	24·1193 + 1 = 28633
24·1144 + 1 = 27457	24·1194 + 1 = 28657
24·1145 + 1 = 27481	24·1195 + 1 = 28681
24·1146 + 1 = 27505	24·1196 + 1 = 28705
24·1147 + 1 = 27529	24·1197 + 1 = 28729 = 169,4963126442²
24·1148 + 1 = 27553 = 165,9909636²	24·1198 + 1 = 28753 = 169,5670958647²
24·1149 + 1 = 27577 = 166,063241²	24·1199 + 1 = 28777 = 169,6378496²
24·1150 + 1 = 27601 = 166,1354869²	24·1200 + 1 = 28801 = 169,7085737²

24·1201 + 1 = 28825 = 169,7763234²	
24·1202 + 1 = 28849 = 169,8499338²	

$24 \cdot 1203 + 1 = 28873 = 169{,}9205697^2$	
$24 \cdot 1204 + 1 = 28897 = 169{,}9911762^2$	
$24 \cdot 1205 + 1 = 28921 = 170{,}0617535^2$	

$24 \cdot 1247 + 1 = 29929 = 173^2$
$24 \cdot 1276 + 1 = 30625 = 175^2$
$24 \cdot 1335 + 1 = 32041 = 179^2$

Nachdem bis 24·600 und darüber jede Quadratwurzel ausgerechnet wurde, ist trivial, dass zwischen zwei aufeiander folgenden ganzzahlingen Ertgebnissen mehr als ein Dutzend Rechenschritte liegen, die nicht ganzzalige Ergebnisse liefern könen, und so wurdn diese übersprungen. Danach wurden nur mehr die Überänge berechnet, wo überhaupt ein ganzzahliges Ergebnis möglich war. Damit sind bis $24 \cdot 1205 + 1 = 28921 = 170{,}0617535^2$ alle möglichen ganzzahligen Quadratwurzel aus 24n + 1 berechnet.

$6 \cdot 4 \cdot n + 1 = 24n + 1$

24n + 1 = mit grünem n für Primzahlzwillinge	30m ± (6n ± 1)	15n ± 2, 15n ±4
$24 \cdot 1 + 1 = 25 = 5^2 = (6 \cdot 1 - 1)^2$		
$24 \cdot 2 + 1 = 49 = 7^2 = (6 \cdot 1 + 1)^2$	$= (30 \cdot 1 - 23)^2$	
$24 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2 = (6 \cdot 2 - 1)^2$	$= (30 \cdot 1 - 19)^2$	$= (15 \cdot 1 - 4)^2$
$24 \cdot 7 + 1 = 169 = 13^2\ (6 \cdot 2 + 1)^2$	$= (30 \cdot 1 - 17)^2$	$= (15 \cdot 1 - 2)^2$
$24 \cdot 12 + 1 = 289 = 17^2 = (6 \cdot 3 - 1)^2$	$= (30 \cdot 1 - 13)^2$	$= (15 \cdot 1 + 2)^2$
$24 \cdot 15 + 1 = 361 = 19^2 = (6 \cdot 3 + 1)^2$	$= (30 \cdot 1 - 11)^2$	$= (15 \cdot 1 + 4)^2$
$24 \cdot 22 + 1 = 529 = 23^2 = (6 \cdot 4 - 1)^2$	$= (30 \cdot 1 - 7)^2$	
$24 \cdot 26 + 1 = 625 = 25^2 = (5 \cdot 5)^2 = 5^4$	$= (30 \cdot 2 - 1)^2$	

$24\cdot35 + 1 = 841 = 29^2 = (6\cdot5 - 1)^2$	$= (30\cdot1 + 1)^2$	
$24\cdot40 + 1 = 961 = 31^2 = (6\cdot5 + 1)^2$	$= (30\cdot1 + 7)^2$	
$24\cdot57 + 1 = 1369 = 37^2 = (6\cdot6 + 1)^2$	$= (30\cdot1 + 11)^2$	
$24\cdot70 + 1 = 1681 = 41^2 = (6\cdot7 - 1)^2$	$= (30\cdot1 + 13)^2$	
$24\cdot77 + 1 = 1849 = 43^2 = (6\cdot7 + 1)^2$	$= (30\cdot1 + 17)^2$	
$24\cdot92 + 1 = 2209 = 47^2 = (6\cdot8 - 1)^2$	$= (30\cdot1 + 23)^2$	
$24\cdot117 + 1 = 2809 = 53^2 = (6\cdot9 - 1)^2$	$= (30\cdot1 + 29)^2$	
$24\cdot145 + 1 = 3481 = 59^2 = (6\cdot10 - 1)^2$	$= (30\cdot2 + 1)^2$	
$24\cdot155 + 1 = 3721 = 61^2 = (6\cdot10 + 1)^2$	$= (30\cdot2 + 7)^2$	
$24\cdot187 + 1 = 4489 = 67^2 = (6\cdot11 + 1)^2$	$= (30\cdot2 + 11)^2$	
$24\cdot210 + 1 = 5041 = 71^2 = (6\cdot12 - 1)^2$	$= (30\cdot2 + 13)^2$	
$24\cdot222 + 1 = 5329 = 73^2 = (6\cdot12 + 1)^2$	$= (30\cdot2 + 19)^2$	
$24\cdot260 + 1 = 6241 = 79^2 = (6\cdot13 + 1)^2$	$= (30\cdot2 + 23)^2$	
$24\cdot287 + 1 = 6889 = 83^2 = (6\cdot14 - 1)^2$		
$24\cdot330 + 1 = 7921 = 89^2 = (6\cdot15 - 1)^2$	$= (30\cdot2 + 29)^2$	
$24\cdot392 + 1 = 9409 = 97^2 = (6\cdot16 + 1)^2$	$= (30\cdot3 + 7)^2$	
$24\cdot425 + 1 = 10201 = 101^2 = (6\cdot17 - 1)^2$	$= (30\cdot3 + 11)^2$	$= (15\cdot7 - 4)^2$
$24\cdot442 + 1 = 10609 = 103^2 = (6\cdot17 + 1)^2$	$= (30\cdot3 + 13)^2$	$= (15\cdot7 - 2)^2$
$24\cdot477 + 1 = 11449 = 107^2 = (6\cdot18 - 1)^2$	$= (30\cdot3 + 17)^2$	$= (15\cdot7 + 2)^2$
$24\cdot495 + 1 = 11881 = 109^2 = (6\cdot18 + 1)^2$	$= (30\cdot3 + 19)^2$	$= (15\cdot7 + 4)^2$
$24\cdot532 + 1 = 12769 = 113^2 = (6\cdot19 - 1)^2$	$= (30\cdot3 + 23)^2$	
$24\cdot672 + 1 = 16129 = 127^2 = (6\cdot21 + 1)^2$	$= (30\cdot4 + 7)^2$	
$24\cdot715 + 1 = 17161 = 131^2 = (6\cdot22 - 1)^2$	$= (30\cdot4 + 11)^2$	
$24\cdot737 + 1 = 17689 = 133^2 = (19\cdot7)^2 = (6\cdot22 + 1)^2$	$= (30\cdot4 + 13)^2$	
$24\cdot782 + 1 = 18769 = 137^2 = (6\cdot23 - 1)^2$	$= (30\cdot4 + 17)^2$	
$24\cdot805 + 1 = 19321 = 139^2 = (6\cdot23 + 1)^2$	$= (30\cdot4 + 19)^2$	

$24\cdot925 + 1 = 22201 = 149^2 = (6\cdot25 - 1)^2$	$= (30\cdot4 + 29)^2$	
$24\cdot950 + 1 = 22801 = 151^2 = (6\cdot25 + 1)^2$	$= (30\cdot5 + 1)^2$	
$24\cdot1027 + 1 = 24649 = 157^2 = (6\cdot26 + 1)^2$	$= (30\cdot5 + 7)^2$	
$24\cdot1107 + 1 = 26569 = 163^2 = (6\cdot27 + 1)^2$	$= (30\cdot5 + 13)^2$	
$24\cdot1162 + 1 = 27889 = 167^2 = (6\cdot28 + 1)^2$	$= (30\cdot5 + 17)^2$	
$24\cdot1247 + 1 = 29929 = 173^2 = (6\cdot29 - 1)^2$	$= (30\cdot5 + 23)^2$	
$24\cdot1335 + 1 = 32041 = 179^2 = (6\cdot30 - 1)^2$	$= (30\cdot5 + 29)^2$	
$24\cdot1365 + 1 = 32761 = 181^2 = (6\cdot30 + 1)^2$	$= (30\cdot6 + 1)^2$	
$24\cdot1520 + 1 = 36481 = 191^2 = (6\cdot32 - 1)^2$	$= (30\cdot6 + 11)^2$	$= (15\cdot13 - 4)^2$
$24\cdot1552 + 1 = 37249 = 193^2 = (6\cdot32 + 1)^2$	$= (30\cdot6 + 13)^2$	$= (15\cdot13 - 2)^2$
$24\cdot1617 + 1 = 38809 = 197^2 = (6\cdot33 - 1)^2$	$= (30\cdot6 + 17)^2$	$= (15\cdot13 + 2)^2$
$24\cdot1650 + 1 = 39601 = 199^2 = (6\cdot33 + 1)^2$	$= (30\cdot6 + 19)^2$	$= (15\cdot13 + 4)^2$
$24\cdot1855 + 1 = 44521 = 211^2 = (6\cdot35 + 1)^2$	$= (30\cdot7 + 1)^2$	
$24\cdot2072 + 1 = 49729 = 223^2 = (6\cdot37 + 1)^2$	$= (30\cdot7 + 13)^2$	
$24\cdot2147 + 1 = 52529 = 227^2 = (6\cdot38 - 1)^2$	$= (30\cdot7 + 17)^2$	
$24\cdot2185 + 1 = 52441 = 229^2 = (6\cdot38 + 1)^2$	$= (30\cdot7 + 19)^2$	
$24\cdot2262 + 1 = 54289 = 233^2 = (6\cdot39 - 1)^2$	$= (30\cdot7 + 23)^2$	
$24\cdot2380 + 1 = 57121 = 239^2 = (6\cdot40 - 1)^2$	$= (30\cdot7 + 29)^2$	
$24\cdot2420 + 1 = 58081 = 241^2 = (6\cdot40 + 1)^2$	$= (30\cdot8 + 1)^2$	
$24\cdot2625 + 1 = 63001 = 251^2 = (6\cdot42 - 1)^2$	$= (30\cdot8 + 11)^2$	
$24\cdot2752 + 1 = 66049 = 257^2 = (6\cdot43 - 1)^2$	$= (30\cdot8 + 17)^2$	
$24\cdot2882 + 1 = 69169 = 263^2 = (6\cdot44 - 1)^2$	$= (30\cdot8 + 23)^2$	
$24\cdot3015 + 1 = 72361 = 269^2 = (6\cdot45 - 1)^2$	$= (30\cdot8 + 29)^2$	
$24\cdot3060 + 1 = 73441 = 271^2 = (6\cdot45 + 1)^2$	$= (30\cdot9 + 1)^2$	
$24\cdot3197 + 1 = 76729 = 277^2 = (6\cdot46 + 1)^2$	$= (30\cdot9 + 7)^2$	
$24\cdot3290 + 1 = 78961 = 281^2 = (6\cdot47 - 1)^2$	$= (30\cdot9 + 11)^2$	

$24\cdot3337 + 1 = 80089 = 283^2 = (6\cdot47 + 1)^2$ $24\cdot3577 + 1 = 85849 = 293^2 = (6\cdot49 - 1)^2$	$= (30\cdot9 + 13)^2$ $= (30\cdot9 + 23)^2$	
$24\cdot4030 + 1 = 96721 = 311^2 = (6\cdot52 - 1)^2$ $24\cdot4082 + 1 = 97969 = 303^2 = (6\cdot52 + 1)^2$ $24\cdot4187 + 1 = 100489 = 317^2 = (6\cdot53 - 1)^2$	$= (30\cdot10 + 11)^2$ $= (30\cdot10 + 13)^2$ $= (30\cdot10 + 17)^2$	
…	…	

Die Folge $24n + 1 = p^2 = 6m \pm 1$ kann ab $n > 5$ weiter zerlegt werden[277], nämlich $n = 1 + 5p \pm 1$:

	24n + 1	$P^2 = (6n \pm 1)^2$ mit grünem n für Primzahlzwillinge	$(4\cdot n + 1)^2$
	$24\cdot1 + 1 =$	$24\cdot1 + 1 = 25 = 5^2 = (6\cdot1 - 1)^2$	$(4\cdot1 + 1)^2$
	$24\cdot2 + 1 =$	$24\cdot2 + 1 = 49 = 7^2 = (6\cdot1 + 1)^2$	$(4\cdot1 + 3)^2$
	$24\cdot5 + 1 =$	$24\cdot(1 + 5\cdot1 - 1) + 1 = 121 = 11^2 = (6\cdot2 - 1)^2$	$(4\cdot2 + 3)^2$
	$24\cdot7 + 1 =$	$24\cdot(1 + 5\cdot1 + 1) + 1 = 169 = 13^2 = (6\cdot2 + 1)^2$	$(4\cdot3 + 1)^2$
	$24\cdot12 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot2 + 2) + 1 = 289 = 17^2 = (6\cdot3 - 1)^2$	$(4\cdot4 + 1)^2$
	$24\cdot15 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot3 + 0) + 1 = 361 = 19^2 = (6\cdot3 + 1)^2$	$(4\cdot4 + 3)^2$
	$24\cdot22 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot4 + 2) + 1 = 529 = 23^2 = (6\cdot4 - 1)^2$	$(4\cdot5 + 3)^2$
		$24\cdot(5\cdot5 + 1) + 1$	
	$24\cdot35 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot7 + 0) + 1 = 841 = 29^2 = (6\cdot5 - 1)^2$	$(4\cdot7 + 1)^2$
	$24\cdot40 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot8 + 0) + 1 = 961 = 31^2 = (6\cdot5 + 1)^2$	$(4\cdot7 + 3)^2$
		$24\cdot(5\cdot10 + 1) + 1$	
	$24\cdot57 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot11 + 2) + 1 = 1369 = 37^2 = (6\cdot6 + 1)^2$	$(4\cdot9 + 1)^2$
	$24\cdot70 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot14 + 0) + 1 = 1681 = 41^2 = (6\cdot7 - 1)^2$	$(4\cdot10 + 1)^2$

[277] Waldal 58 ff.

	24·77 + 1 =	24·(5·15 + 2) + 1 = 1849 = 43² = (6·7 + 1)²	(4·10 + 3)²
	24·92 + 1 =	24·(5·18 + 2) + 1 = 2209 = 47² = (6·8 – 1)²	(4·11 + 3)²
		24·(5·20 + 1) + 1	
	24·117 + 1 =	24·(5·23 + 2) + 1 = 2809 = 53² = (6·9 – 1)²	(4·13 + 1)²
		24·(5·25 + 1) + 1	
	24·145 + 1 =	24·(5·29 + 0) + 1 = 3481 = 59² = (6·10 – 1)²	(4·14 + 3)²
	24·155 + 1 =	24·(5·31 + 0) + 1 = 3721 = 61² = (6·10 + 1)²	(4·15 + 1)²
		24·(5·35 + 1) + 1	
	24·187 + 1 =	24·(5·37 + 1) + 1 = 4489 = 67² = (6·11 + 1)²	(4·16 + 3)²
	24·210 + 1 =	24·(5·42 + 0) + 1 = 5041 = 71² = (6·12 – 1)²	(4·17 + 3)²
	24·222 + 1 =	24·(5·44 + 2) + 1 = 5329 = 73² = (6·12 + 1)²	(4·18 + 1)²
		24·(5·49 + 2) + 1	
	24·260 + 1 =	24·(5·52 + 0) + 1 = 6241 = 79² = (6·13 + 1)²	(4·19 + 3)²
	24·287 + 1 =	24·(5·57 + 2) + 1 = 6889 = 83² = (6·14 – 1)²	(4·20 + 3)²
		24·(5·60 + 1) + 1	
	24·330 + 1 =	24·(5·66 + 0) + 1 = 7921 = 89² = (6·15 – 1)²	(4·22 + 1)²
		24·(5·69 + 0) + 1	
		24·(5·75 + 1) + 1	
	24·392 + 1 =	24·(5·78 + 2) + 1 = 9409 = 97² = (6·16 + 1)²	(4·24 + 3)²
	24·425 + 1 =	24·(5·85 + 0) + 1 = 10201 = 101² = (6·17 – 1)²	(4·25 + 1)²
	24·442 + 1 =	24·(5·80 + 2) + 1 = 10609 = 103² = (6·17 + 1)²	(4·25 + 3)²
	24·477 + 1 =	24·(5·95 + 2) + 1 = 11449 = 107² = (6·18 – 1)²	(4·26 + 3)²
	24·495 + 1 =	24·(5·99 + 0) + 1 = 11881 = 109² = (6·18 + 1)²	(4·27 + 3)²
	24·532 + 1 =	24·(5·106 + 2) + 1 = 12769 = 113² = (6·19 – 1)²	(4·28 + 1)²
	24·551 + 1 =	24·(5·110 + 1) + 1 = 13225 = 115²	
	24·672 + 1 =	---------- = 119²	

	24·715 + 1 =	---------- = 121²	
	24·782 + 1 =	---------- = 125²	
	24·805 + 1 =	24·(5·134 + 2) + 1 = 16129 = 127² = (6·21 + 1)²	(4·31 + 3)²
		24·(5·122 + 0) + 1	
		24·(5·130 + 1) + 1	
		24·(5·137 + 2) + 1	
		24·(5·143 + 0) + 1	
		24·(5·147 + 0) + 1 = 17161 = 131² = (6·22 – 1)²	(4·32 + 3)²
		24·(5·156 + 2) + 1 = 18769 = 137² = (6·23 – 1)²	(4·34 + 1)²
		24·(5·161 + 0) + 1 = 19321 = 139² = (6·23 + 1)²	(4·34 + 3)²
	24·925 + 1 =	24·(5·170 + 2) + 1	
	24·950 + 1 =	24·(5·175 + 1) + 1	
	24·1027 + 1 =	24·(5·185 + 0) + 1 = 22201 = 149² = (6·25 – 1)²	(4·37 + 3)²
	24·1107 + 1 =	24·(5·190 + 0) + 1 = 22801 = 151² = (6·25 + 1)²	(4·38 + 1)²
	24·1162 + 1 =	24·(5·200 + 1) + 1	
	24·1247 + 1 =	24·(5·205 + 2) + 1 = 24649 = 157² = (6·26 + 1)²	(4·39 + 1)²
	24·1335 + 1 =	24·(5·216 + 0) + 1	
	24·1365 + 1 =	24·(5·221 + 2) + 1 = 26569 = 163² = (6·27 + 1)²	(4·40 + 3)²
	24·1520 + 1 =	24·(5·232 + 2) + 1 = 27889 = 167² = (6·28 + 1)²	(4·41 + 3)²
	24·1552 + 1 =	24·(5·238 + 0) + 1	
	24·1617 + 1 =	24·(5·249 + 2) + 1 = 29929 = 173² = (6·29 – 1)²	(4·43 + 1)²
	24·1650 + 1 =	24·(5·255 + 1) + 1	
	24·1855 + 1 =	24·(5·267 + 0) + 1 = 32041 = 179² = (6·30 – 1)²	(4·44 + 3)²
	24·2072 + 1 =	24·(5·273 + 0) + 1 = 32761 = 181² = (6·30 + 1)²	(4·45 + 1)²
	24·2147 + 1 =	24·(5·285 + 1) + 1	
	24·2185 + 1 =	24·(5·291 + 2) + 1	

	$24\cdot 2262 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 304 + 0) + 1 = 36481 = 191^2 = (6\cdot 32 - 1)^2$	$(4\cdot 47 + 3)^2$
	$24\cdot 2380 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 310 + 2) + 1 = 37249 = 193^2 = (6\cdot 32 + 1)^2$	$(4\cdot 48 + 1)^2$
	$24\cdot 2420 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 323 + 2) + 1 = 38809 = 197^2 = (6\cdot 33 - 1)^2$	$(4\cdot 49 + 1)^2$
	$24\cdot 2625 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 330 + 0) + 1 = 39601 = 199^2 = (6\cdot 33 + 1)^2$	$(4\cdot 49 + 3)^2$
	$24\cdot 2752 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 343 + 2) + 1$	
	$24\cdot 2882 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 350 + 1) + 1$	
	$24\cdot 3015 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 364 + 0) + 1$	
	$24\cdot 3060 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 371 + 0) + 1 = 44521 = 211^2 = (6\cdot 35 + 1)^2$	$(4\cdot 52 + 3)^2$
	$24\cdot 3197 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 385 + 1) + 1$	
	$24\cdot 3290 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 392 + 2) + 1$	
	$24\cdot 3337 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 407 + 0) + 1$	
	$24\cdot 3480 + 1 =$	$24\cdot(5\cdot 414 + 2) + 1 = 49729 = 223^2 = (6\cdot 37 + 1)^2$	$(4\cdot 55 + 3)^2$
		$24\cdot(5\cdot 429 + 2) + 1 = 52529 = 227^2 = (6\cdot 38 - 1)^2$	$(4\cdot 56 + 3)^2$
		$24\cdot(5\cdot 437 + 0) + 1 = 52441 = 229^2 = (6\cdot 38 + 1)^2$	$(4\cdot 57 + 1)^2$
		$24\cdot(5\cdot 452 + 2) + 1 = 54289 = 233^2 = (6\cdot 39 - 1)^2$	$(4\cdot 58 + 1)^2$
		$24\cdot(5\cdot 460 + 1) + 1$	
		$24\cdot(5\cdot 476 + 0) + 1 = 57121 = 239^2 = (6\cdot 40 - 1)^2$	$(4\cdot 59 + 3)^2$
		$24\cdot(5\cdot 484 + 0) + 1 = 58081 = 241^2 = (6\cdot 40 + 1)^2$	$(4\cdot 60 + 1)^2$
		$24\cdot(5\cdot 500 + 1) + 1$	
		$24\cdot(5\cdot 508 + 2) + 1$	
		$24\cdot(5\cdot 525 + 0) + 1 = 63001 = 251^2 = (6\cdot 42 - 1)^2$	$(4\cdot 62 + 3)^2$
		$24\cdot(5\cdot 533 + 2) + 1$	
		$24\cdot(5\cdot 550 + 2) + 1 = 66049 = 257^2 = (6\cdot 43 - 1)^2$	$(4\cdot 64 + 1)^2$
		$24\cdot(5\cdot 559 + 0) + 1$	
		$24\cdot(5\cdot 576 + 2) + 1 = 69169 = 263^2 = (6\cdot 44 - 1)^2$	$(4\cdot 65 + 3)^2$
		$24\cdot(5\cdot 585 + 1) + 1$	

		24·(5·603 + 0) + 1 = 72361 = 269² = (6·45 – 1)²	(4·67 + 1)²
		24·(5·612 + 0) + 1 = 73441 = 271² = (6·45 + 1)²	(4·67 + 3)²
		24·(5·630 + 1) + 1	
		24·(5·639 + 2) + 1 = 76729 = 277² = (6·46 + 1)²	(4·69 + 1)²
		24·(5·658 + 0) + 1 = 78961 = 281² = (6·47 – 1)²	(4·70 + 1)²
		24·(5·667 + 2) + 1 = 80089 = 283² = (6·47 + 1)²	(4·70 + 3)²
		24·(5·686 + 2) + 1	
		24·(5·696 + 0) + 1 = 83521 = 289² = (6·48 – 1)²	(4·72 + 1)²
		24·(5·715 + 0) + 1	
		24·(5·725 + 1) + 1	
		24·(5·745 + 0) + 1	
	24·4030 + 1 =	24·(5·806 + 0) + 1 = 96721 = 311² = (6·52 – 1)²	(4·77 + 3)²
	24·4082 + 1 =	24·(5·816 + 2) + 1 = 97969 = 303² = (6·52 + 1)²	(4·78 + 1)²
	24·4187 + 1 =	24·(5·837 + 2) + 1 = 100489 = 317² = (6·53 – 1)²	(4·79 + 1)²
	…	…	…

Die Formel 24n + 1 ergibt ausschließlich die Endziffer 1 und 9. Das ist somit das Auswahlkriterium[278] aus der Folge der Quadrate 24n + 1 = p². Allerdings sind alle Endziffer 1 und 9 Kriterium für Primzahlen[279]:

24n + 1 = p²
24·1 + 1 = 25 = 5²
24·2 + 1 = 49 = 7²

[278] Waldal 61 f.
[279] Christof 4 f.

$24 \cdot 3 + 1 = 73 = 8{,}544003745^2$
$24 \cdot 4 + 1 = 97 = 9{,}848857802^2$
$24 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$
$24 \cdot 6 + 1 = 145 = 12{,}04159458^2$
$24 \cdot 7 + 1 = 169 = 13^2$
$24 \cdot 8 + 1 = 193 = 13{,}89244399^2$
$24 \cdot 9 + 1 = 217 = 14{,}73091986^2$
$24 \cdot 10 + 1 = 241 = 15{,}5241747^2$
$24 \cdot 11 + 1 = 265 = 16{,}2788206^2$
$24 \cdot 12 + 1 = 289 = 17^2$
$24 \cdot 13 + 1 = 313 = 17{,}69180601^2$
$24 \cdot 14 + 1 = 337 = 18{,}35755975^2$
$24 \cdot 15 + 1 = 361 = 19^2$
$24 \cdot 16 + 1 = 385 = 19{,}62141687^2$
$24 \cdot 17 + 1 = 409 = 20{,}22374842^2$
$24 \cdot 18 + 1 = 433 = 20{,}80865205^2$
$24 \cdot 19 + 1 = 457 = 21{,}37755833^2$
$24 \cdot 20 + 1 = 481 = 21{,}9317122^2$
$24 \cdot 21 + 1 = 505 = 22{,}47220505^2$
$24 \cdot 22 + 1 = 529 = 23^2$
$24 \cdot 23 + 1 = 553 = 23{,}51595203^2$
$24 \cdot 24 + 1 = 577 = 24{,}0208243^2$
$24 \cdot 25 + 1 = 601 = 24{,}51530134^2$
$24 \cdot 26 + 1 = 625 = 25^2$
$24 \cdot 27 + 1 = 649 = 25{,}47547841^2$

24·28 + 1 = 673 = 25,94224354²
24·29 + 1 = 697 = 26,40075756²
24·30 + 1 = 721 = 26,85144316²
24·31 + 1 = 745 = 27,29468813²
24·32 + 1 = 769 = 28,08914381 ²
24·33 + 1 = 793 = 28,16025568²
24·34 + 1 = 817 = 28,58321186²
24·35 + 1 = 841 = 29²
24·36 + 1 = 865 = 29,41088234²
24·37 + 1 = 889 = 29,81610303²
24·38 + 1 = 913 = 30,21588986²
24·39 + 1 = 937 = 30,61045573²
24·40 + 1 = 961 = 31²
24·41 + 1 = 985 = 31,38470965²
…

Es sind zB 24·10 + 1 = 241 = 15,5241747² oder 24·20 + 1 = 481 = 21,9317122² und 24·17 + 1 = 409 = 20,22374842² haben zwar die Endziffer, nicht jedoch die übrigen Kriterien, wie insb. Ganzzahligkeit[280].

Außer den ungeraden Endziffern 1 und 9 kommen nur gerade vorletzte Ziffern vor: …01, …21, …41, …61, …81, und …09, …29, …49, …69, …89. Alle andere anderen Kombinationen für Primzahlen fehlen in der Formel 24n + 1 für ganzzahligen Ergebnisse.

[280] Waldal 58 ff.

…25, …49, …73, …97, …21, …45, …69, …93, …17, …41, …65, …89, …13,
…37, …61, …85, …09, …33, …57, …81, …05, …29, …53, …77, …01, …25

Die Folge der zweistelligen Zahlen zeigt, dass sie jeweils durch die Addition von 24 zustande kommen, und daher zwar zyklisch, und nicht mit der jeweils kleinster Zahl beginnend, aber kontinuierlich steigend sind.

In den vorangehenden Tabellen ist ersichtlich, dass ein Zyklus insgesamt 600 : 24 = 25, bzw. 24*25 = 600 Einheiten im Intervall erfasst in 25 Schritten. Von den jeweils 25 Rechenschritten im Zyklus haben 10 die Entziffer 1 und 9, bzw. je 5 haben Endziffer 1 und je 5 haben Endziffer 9. Es sind jeweils 1 oder 2 Rechenschritte dazwischen mit anderen Endziffern, wie die gelbe Markierung zeigt. Besonders bei höheren Zahlen zeigt es sich, dass nicht alle Endziffern 9 und 1 ganzzahlige Ergebnisse liefern.

Die Endziffern 5 zeigen den Zyklus $24\cdot(25m + 1) + 1 = (5\cdot P)^2$.

$24\cdot26 + 1 = 625 = 25^2 = (5\cdot5)^2 = 5^4$
$24\cdot51 + 1 = 1225 = 35^2 = (5\cdot7)^2$
$24\cdot126 + 1 = 3025 = 55^2 = (11\cdot5)^2$
$24\cdot176 + 1 = 4225 = 65^2 = (13\cdot5)^2$
$24\cdot301 + 1 = 7225 = 85^2 = (5\cdot17)^2$
$24\cdot376 + 1 = 9025 = 95^2 = (19\cdot5)^2$
$24\cdot551 + 1 = 13225 = 115^2 = (23\cdot5)^2$
$24\cdot651 + 1 = 15625 = 125^2\ (25\cdot5)^2 = (5^3)^2 = 5^6$
$24\cdot876 + 1 = 21025 = 145^2\ (29\cdot5)^2$
$24\cdot1001 + 1 = 24025 = 155^2 = (31\cdot5)^2$

$24 \cdot 1276 + 1 = 30625 = 175^2 = (35 \cdot 5)^2$
$24 \cdot 1426 + 1 = 34225 = 185^2 = (37 \cdot 5)^2$
$24 \cdot 1751 + 1 = 42025 = 205^2 = (41 \cdot 5)^2$

Die Folge n^2

Die Quadrate n^2 zeigen gewisse Gesetzmäßigkeiten. Die Differenzen von benachbarten Quadratzahlen $Q_n - Q_{n-1} = Z$ entspricht der Folge der ungeraden zahlen $2n + 1$.

$n^2 = q$	$Q_n - Q_{n-1} = 2n - 1$	$Q_n + Q_{n-1} = 4n + 1$	$x^2 + (x + 1)^2 = 4n + 1$	$x^2 - (x - 1)^2 = 4n$
		$0 + 1 = 1$		
$1^2 = 1$	$4 - 1 = 3$	$4 + 1 = 5$	$0^2 + 1^2 = 1$	$5 - 1 = 4 = 1 \cdot 4$
$2^2 = 4$	$9 - 4 = 5$	$9 + 4 = 13$	$1^2 + 2^2 = 5 = 1 \cdot 4 + 1$	$13 - 5 = 8 = 2 \cdot 4$
$3^2 = 9$	$16 - 9 = 7$	$16 + 9 = 25$	$2^2 + 3^2 = 13 = 3 \cdot 4 + 1$	$25 - 13 = 12 = 3 \cdot 4$
$4^2 = 16$	$25 - 16 = 9$	$25 + 16 = 41$	$3^2 + 4^2 = 25 = 6 \cdot 4 + 1$	$41 - 25 = 16 = 4 \cdot 4$
$5^2 = 25$	$36 - 25 = 11$	$36 + 25 = 61$	$4^2 + 5^2 = 41 = 10 \cdot 4 + 1$	$61 - 41 = 20 = 5 \cdot 4$
$6^2 = 36$	$49 - 36 = 13$	$49 + 36 = 85$	$5^2 + 6^2 = 61 = 15 \cdot 4 + 1$	$85 - 61 = 24 = 6 \cdot 4$
$7^2 = 49$	$64 - 49 = 15$	$64 + 49 = 113$	$6^2 + 7^2 = 85 = 21 \cdot 4 + 1$	$113 - 85 = 28 = 4 \cdot 7$
$8^2 = 64$	$81 - 64 = 17$	$81 + 64 = 145$	$7^2 + 8^2 = 113 = 28 \cdot 4 + 1$	$145 - 113 = 32 = 4 \cdot 8$
$9^2 = 81$	$100 - 81 = 19$	$100 + 81 = 181$	$8^2 + 9^2 = 145$	
$10^2 = 100$	$121 - 100 = 21$		$9^2 + 10^2 = 181$	
$11^2 = 121$	$144 - 121 = 23$		$10^2 + 11^2 = 221$	
$12^2 = 144$	$169 - 144 = 25$		$11^2 + 12^2 = 265$	
$13^2 = 169$			$12^2 + 13^2 = 313$	
$14^2 = 196$			$13^2 + 14^2 = 365$	
$15^2 = 225$			$14^2 + 15^2 = 421$	
$16^2 = 256$			$15^2 + 16^2 = 481$	

$17^2 = 289$			$16^2 + 17^2 = 545$	
$18^2 = 324$			$17^2 + 18^2 = 613$	
$19^2 = 361$			$18^2 + 19^2 = 685$	
$20^2 = 400$			$19^2 + 20^2 = 761$	
$21^2 = 441$			$20^2 + 21^2 = 841$	
$22^2 = 484$			$21^2 + 22^2 = 925$	
$23^2 = 529$			$22^2 + 23^2 = 1013$	
$24^2 = 576$			$23^2 + 24^2 = 1105$	
$25^2 = 625$			$24^2 + 25^2 = 1201$	
$26^2 = 676$			$25^2 + 26^2 = 1301$	
$27^2 = 729$			$26^2 + 27^2 = 1405$	
$28^2 = 784$			$27^2 + 28^2 = 1513$	
$29^2 = 841$			$28^2 + 29^2 = 1625$	
$30^2 = 900$			$29^2 + 30^2 = 1741$	
$31^2 = 961$			$30^2 + 31^2 = 1861$	
$32^2 = 1024$			$31^2 + 32^2 = 1985$	
$33^2 = 1089$			$32^2 + 33^2 = 2113$	
$34^2 = 1156$			$33^2 + 34^2 = 2245$	
$35^2 = 1225$				
$36^2 = 1296$				
$37^2 = 1369$				
$38^2 = 1444$				
$39^2 = 1521$				
$40^2 = 1600$				
$41^2 = 1681$				
$42^2 = 1764$				
$43^2 = 1849$				

$44^2 = 1936$				
$45^2 = 2025$				
$46^2 = 2116$				
$47^2 = 2209$				
$48^2 = 2304$				
$49^2 = 2401$				
$50^2 = 2500$				
$51^2 = 2601$				
$52^2 = 2704$				
$53^2 = 2809$				
$54^2 = 2916$				
$55^2 = 3025$				
$56^2 = 3136$				
$57^2 = 3249$				
$58^2 = 3364$				
$59^2 = 3481$				
$60^2 = 3600$				
$61^2 = 3721$				
$62^2 = 3844$				
$63^2 = 3969$				
$64^2 = 4096$				
$65^2 = 4225$				
$66^2 = 4356$				
$67^2 = 4489$				
$68^2 = 4624$				
$69^2 = 4761$				
$70^2 = 4900$				

$71^2 = 5041$				
$72^2 = 5184$				
$73^2 = 5329$				
$74^2 = 5476$				
$75^2 = 5625$				
$76^2 = 5776$				
$77^2 = 5929$				
$78^2 = 6048$				
$79^2 = 6241$				
$80^2 = 6400$				
$81^2 = 6561$				
$82^2 = 6724$				
$83^2 = 6889$				
$84^2 = 7056$				
$85^2 = 7225$				
$86^2 = 7396$				
$87^2 = 7569$				
$88^2 = 7744$				
$89^2 = 7921$				
$90^2 = 8100$				
$91^2 = 8281$				
$92^2 = 8464$				
$93^2 = 8649$				
$94^2 = 8836$				
$95^2 = 9025$				
$96^2 = 9216$				
$97^2 = 9409$				

$98^2 = 9604$				
$99^2 = 9801$				
$100^2 = 10.000$				
…				

Die Endziffer 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 wiederholen sich periodisch. Um die bei $24n + 1 = p^2$ ausschließlich vorkommenden Endziffern 1 und 9 zu bekommen, müssen aus der Liste dieser Endziffer jene aussortiert werden, die mit 24 multipliziert + 1 die Endziffer 1 und 9 ergeben. Das wären vor der Addition von 1 die Endziffer 0 und 8. Die bei der Multiplikation mit 24 entstehenden Endziffern sind

$24 \cdot n$	n^2
$24 \cdot 1 = 024$	$1^2 = 1$
$24 \cdot 2 = 048$	$2^2 = 4$
$24 \cdot 3 = 072$	$3^2 = 9$
$24 \cdot 4 = 096$	$4^2 = 16$
$24 \cdot 5 = 120$	$5^2 = 25$
$24 \cdot 6 = 144$	$6^2 = 36$
$24 \cdot 7 = 168$	$7^2 = 49$
$24 \cdot 8 = 192$	$8^2 = 64$
$24 \cdot 9 = 216$	$9^2 = 81$
$24 \cdot 10 = 240$	$10^2 = 100$
$24 \cdot 11 = 264$	$11^2 = 121$
$24 \cdot 12 = 288$	$12^2 = 144$
$24 \cdot 13 = 312$	$13^2 = 169$

$24 \cdot 14 = 336$	$14^2 = 196$
$24 \cdot 15 = 360$	$15^2 = 225$
$24 \cdot 16 = 384$	$16^2 = 256$
$24 \cdot 17 = 408$	$17^2 = 289$
$24 \cdot 18 = 432$	$18^2 = 324$
$24 \cdot 19 = 456$	$19^2 = 361$
$24 \cdot 20 = 480$	$20^2 = 400$
$24 \cdot 21 = 504$	$21^2 = 441$
$24 \cdot 22 = 528$	$22^2 = 484$
$24 \cdot 23 = 552$	$23^2 = 529$
$24 \cdot 24 = 576$	$24^2 = 576$
$24 \cdot 25 = 600$	$25^2 = 625$
$24 \cdot 26 = 624$	$26^2 = 676$
$24 \cdot 27 = 648$	$27^2 = 729$
$24 \cdot 28 = 672$	$28^2 = 784$
$24 \cdot 29 = 696$	$29^2 = 841$
$24 \cdot 30 = 720$	$30^2 = 900$
$24 \cdot 31 = 744$	$31^2 = 961$
$24 \cdot 32 = 768$	$32^2 = 1024$
$24 \cdot 33 = 792$	$33^2 = 1089$
$24 \cdot 34 = 816$	$34^2 = 1156$
$24 \cdot 35 = 840$	$35^2 = 1225$
$24 \cdot 36 = 864$	$36^2 = 1296$
$24 \cdot 37 = 888$	$37^2 = 1369$
$24 \cdot 38 = 912$	$38^2 = 1444$
$24 \cdot 39 = 936$	$39^2 = 1521$

24·40 = 960	40² = 1600
24·41 = 984	41² = 1681
24·42 = 1008	42² = 1764
24·43 = 1032	43² = 1849
24·44 = 1056	44² = 1936
…	…

So ähnlich wie bei der Multiplikation der ungeraden Zahlen die Liste der ungeraden Endziffern durchlaufen werden, 3·7 = 2**1** 3·9 = 2**7**, 9·7 = 6**3**, 9·1 = **9** (vgl 3·3 = **9** 9·9 = 8**1**, 7·7 = 4**9**, 1·1 = **1**), so durchläuft die Multiplikation mit der geraden Zahl 24 alle geraden Endziffern 4, 8, 2, 6, 0, periodisch, allerdings in zwei Perioden so, dass zwischen den Gliedern der Folge immer 4 liegt. Von diesen 5 Endziffern kommen zwei, nämlich 0 und 8, in Frage, um mit + 1 die Endziffer 1 und 9 zu ergeben, wie in der Formel 24n + 1 = p² vorgesehen.

	24n + 1	24n + 1 = p² mit p = 6n – 1 und p = 6n + 1	
	24·1 + 1 = 24·2 + 1 = 24·5 + 1 = 24·7 + 1 =	24·1 + 1 = 25 = 5² = (6·1 – 1)² 24·2 + 1 = 49 = 7² = (6·1 + 1)² 24·(1 + 5·1 – 1) + 1 = 121 = 11² = (6·2 – 1)² 24·(1 + 5·1 + 1) + 1 = 169 = 13² = (6·2 + 1)²	
	24·12 + 1 = 24·15 + 1 = 24·22 + 1 = 24·35 + 1 = 24·40 + 1 = 24·57 + 1 =	24·(1 + 5·2 + 1) + 1 = 289 = 17² = (6·3 – 1)² 24·(1 + 5·3 – 1) + 1 = 361 = 19² = (6·3 + 1)² 24·(1 + 5·4 + 1) + 1 = 529 = 23² = (6·4 – 1)² 24·(1 + 5·7 – 1) + 1 = 841 = 29² = (6·5 – 1)² 24·(1 + 5·8 – 1) + 1 = 961 = 31² = (6·5 + 1)² 24·(1 + 5·11 + 1) + 1 = 1369 = 37² = (6·6 + 1)²	

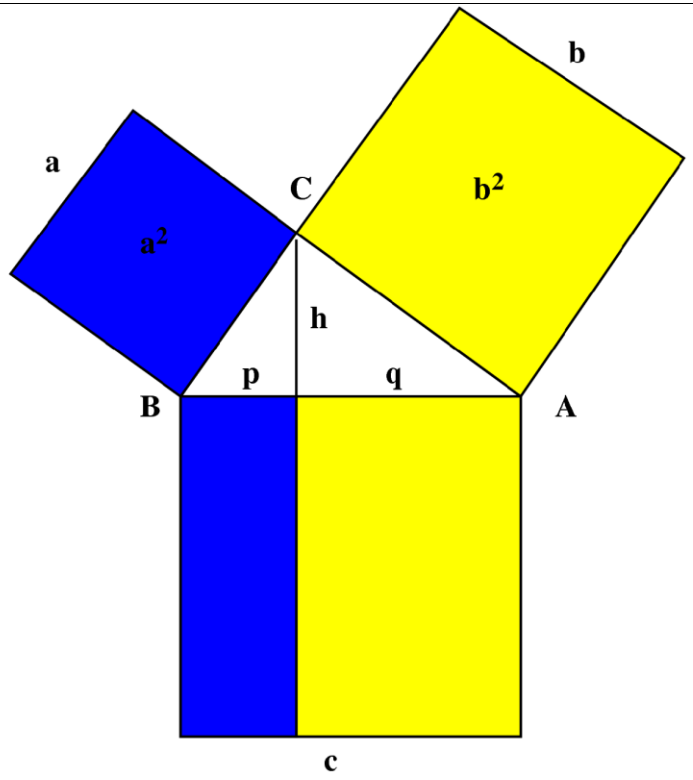
	24·70 + 1 = 24·77 + 1 = 24·92 + 1 = 24·117 + 1 = 24·145 + 1 = 24·155 + 1 = 24·187 + 1 = 24·210 + 1 = 24·222 + 1 = 24·260 + 1 = 24·287 + 1 =	24·(1 + 5·14 – 1) + 1 = 1681 = 41² = (6·7 – 1)² 24·(1 + 5·15 + 1) + 1 = 1849 = 43² = (6·7 + 1)² 24·(1 + 5·18 + 1) + 1 = 2209 = 47² = (6·8 – 1)² 24·(1 + 5·23 + 1) + 1 = 2809 = 53² = (6·9 – 1)² 24·(1 + 5·29 – 1) + 1 = 3481 = 59² = (6·10 – 1)² 24·(1 + 5·31 – 1) + 1 = 3721 = 61² = (6·10 + 1)² 24·(1 + 5·37 +1) + 1 = 4489 = 67² = (6·11 + 1)² 24·(1 + 5·42 – 1) + 1 = 5041 = 71² = (6·12 – 1)² 24·(1 + 5·40 + 1) + 1 = 5329 = 73² = (6·12 + 1)² 24·(1 + 5·52 – 1) + 1 = 6241 = 79² = (6·13 + 1)² 24·(1 + 5·57 + 1) + 1 = 6889 = 83² = (6·14 – 1)²	
	…	…	

Die Multiplikation 24n zeigt bei den gesuchten Primzahlen je 2 bzw. insgesamt 4 Versionen: nämlich 2 und 7 sowie 0 und 5. Um die durch die Multiplikation mit 24 zu bekommen, müssen die Zahlen n der Folge 5n bzw. 5n + 2 angehören: eigentlich 5n + 1 ± 1, wenn man die Folge der Zahlen mit 0 beginnt. Die Multiplikation 24(5n + 1 ± 1) + 1 = ergibt die Endziffer 1 und 9 für p^2. Die Formel 24n + 1 = p² zeigt, dass eine Quadratzahl nicht unbedingt die Multiplikation mit sich selbst voraussetzt. Dies gilt für n = (5n + 1 ± 1) mit 24(5n + 1 ± 1) + 1 = p² um so mehr, was ausmultipliziert 120m ± 24 + 1 sei.

Mit den Besonderheiten der Quadrate hat sich schon die Antike beschäftigt. Es wurden die Verhältnisse vom Dreieck und Quadrat und Viereck und Quadrat untersucht[281]:

[281] Froese, Euklid und die Elemente, in: < URL > 10 ff.

„Zum Schluss von Buch I wendet sich Euklid dem Satz des Pythagoras zu. Er beweist ihn unter Verwendung des so genannten Euklidschen Lehrsatzes oder auch Kathetensatzes (s. Abb. 3).



Euklidscher Lehrsatz (Kathetensatz): Im rechtwinkligen Dreieck gilt:
$a^2=pc$ und $b^2=qc$
Der Satz des Pythagoras ($a^2+b^2=c^2$) folgt hieraus unmittelbar.

Abbildung 3: Euklids Hilfssatz auf dem Weg zum Beweis des Satzes von Pythagoras

Dieser Euklidsche Lehrsatz taucht in den *Elementen* nur als Hilfssatz beim Beweis des Satzes von Pythagoras auf. Er besitzt noch nicht einmal eine eigenständige Satznummer.

Nach dem Beweis des Satzes von Pythagoras (Satz 47, Buch I) folgt noch der Beweis von dessen *Umkehrung*. Der Satz von Pythagoras besagt: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt: $a^2 + b^2 = c^2$. Die *Umkehrung* des Satzes von Pythagoras besagt: gilt $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Diese Umkehrung beweist Euklid als 48. und letzten Satz von Buch I.

Der Text von Buch I enthält keine einzige Wiederholung. Nichts wird dem Leser an späterer Stelle nochmals in Erinnerung gerufen[17], nichts mit anderen Formulierungen ein zweites Mal erläutert. *Definition*, *Satz*, *Beweis* – Punktum. Mehr ist zur Sicherung mathematischer Strenge nicht notwendig, weniger nicht möglich. Durch diesen stilistischen Purismus war es trotz der über 2000jahrigen, teils komplizierten Überlieferungsgeschichte häufig möglich Hinzufugungen von Kopisten und Übersetzern als nicht authentisch zu identifizieren. Zusätzliche Erläuterungen, motivierende Vorbemerkungen, Einschübe ohne klaren mathematischen Gehalt: All das konnte beruhigt als spätere Verfälschung gestrichen werden.

Der besonders strenge Stil charakterisiert die *Elemente* vom ersten bis zum letzten Satz.

[17] Allerdings rechtfertigen die späteren Beweise manche Beweisschritte durch Verweis auf bereits früher Bewiesenes. Dann wird die jeweils einschlagige Satznummer mitgeteilt. Knapper geht es kaum.

Buch II – geometrische Algebra

Buch II der *Elemente* beschäftigt sich mit geradlinig begrenzten Figuren wie Dreieck, Parallelogramm, Rechteck und Quadrat. Viele der dort formulierten Sätze erinnern an Sachverhalte aus der Algebra. Und in der Tat hat sich zur Charakterisierung des Inhalts von Buch II der Begriff *geometrische Algebra* durchgesetzt.

Ein Beispiel kann eine erste ungefähre Vorstellung von Euklids *geometrischer Algebra* vermitteln. Man kennt aus der Schulmathematik die 1. binomische Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Bei Euklid wird dieser Zusammenhang an Hand eines Quadrates mit der Basis c = (a + b) behandelt (Satz 4, Buch II). Betrachtet man die Fläche eines solchen Quadrates, kann man auf rein geometrischem Wege zur 1. binomischen Formel gelangen (vgl. Abb. 4).

Euklid bleibt aber nicht bei derart einfachen Beispielen stehen. In Satz 11, Buch II zeigt er, wie man rein geometrisch die quadratische Gleichung $\mathbf{a(a - x) = x^2}$ löst. Im Anschluss beweist Euklid den *verallgemeinerten Satz des Pythagoras* (*Cosinus-Satz*) für *nicht rechtwinklige* Dreiecke (Satz 12 u. 13, Buch II).

Modern fasst man die verschiedenen Sätze rund um den klassischen Pythagoras Satz mittels der cosinus Funktion in einem einzigen Satz (dem *Cosinus-Satz*) zusammen:

Seien die drei Seiten eines *beliebigen* Dreiecks beliebig mit a, b, c bezeichnet und sei γ der der Seite c gegenüberliegende Winkel, so gilt[18]:

$$\mathbf{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma = c^2}$$

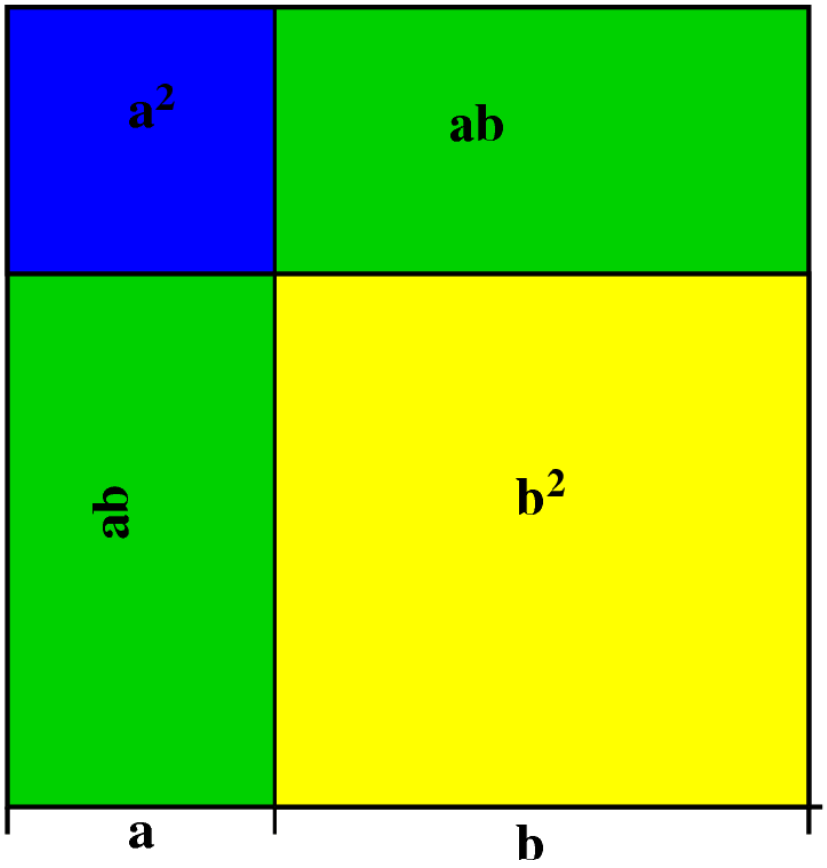


Abbildung 4: Die 1. Binomische Formel in geometrischer Deutung (Satz 4, Buch II)

Die zentrale Fragestellung von Buch II ist die Bestimmung der Fläche geradlinig begrenzter, ebener Figuren. Diesem Zweck dient auch die *geometrische Algebra*. Euklid interessiert sich für Regeln, nach denen man den einen Ausdruck für eine *Größe* durch einen anderen Ausdruck für dieselbe *Größe* ersetzen kann. So etwas zahlen wir heute für gewöhnlich zur Algebra (s. 1. binomische Formel). *Geometrisch* ist Euklids Algebra *einerseits*, weil es sich bei seinen Größen speziell um Flächen geometrischer Figuren handelt. (Schließlich sucht er Möglichkeiten die Größe der Flächen von allen Arten von geradlinig begrenzten, ebenen Figuren möglichst einfach und elegant zu charakterisieren.) *Anderseits* ist seine Algebra aber auch geometrisch, weil die Methoden, mit denen er die Gültigkeit der Regeln beweist, geometrisch sind.

Für Euklid ist die Diskussion der Fläche (des Flächeninhalts) einer Figur erst dann befriedigend abgeschlossen, wenn man ein Verfahren angeben kann, das beschreibt, wie man zu einer gegebenen Figur ein (beweisbar) flächengleiches Quadrat konstruieren kann.

[18] *Ganz genau genommen hat Euklid ein kleines bisschen weniger bewiesen, als die moderne Formulierung ausdrückt. Man muss aber nur eine Ungeschicklichkeit bei der Formulierung von Satz 13, Buch II ändern und schon ist auch dieses Problem beseitigt. Die Ungeschicklichkeit bei der Formulierung von Satz 13, Buch II ist bereits früh aufgefallen. Es gibt eine alte Randbemerkung eines Kopisten (Scholion), die darauf hinweist.*

Die heute typischen Formeln zur Flächenberechnung für die verschiedenen Grundfiguren wie Dreieck, Parallelogramm, Rechteck, etc. findet man übrigens bei Euklid so nicht. Resultate der Geometrie mittels Formeln auszudrücken wurde in der *akademischen* Mathematik erst mit der analytischen Geometrie (Descartes und andere) gängig.

Wir sind gewohnt, die Fläche als ein Vielfaches eines Einheitsquadrats (im Alltag: mm^2, cm^2, m^2, km^2 etc.) auszudrucken. In den Augen der antiken Griechen war dieser Zugang in einer strengen

Geometrie gar nicht immer möglich. Zumindest in einer auf äußerste Strenge zielenden mathematischen Abhandlung stellte sich das Problem, dass es eben passieren kann, dass sich die Größenverhältnisse zwischen einer gegebenen Figur und einem Einheitsquadrat nicht mittels *rationaler* Zahlen ausdrucken lassen. Da die antiken Griechen aber *keine irrationalen* Zahlen kannten, jedoch sehr wohl wussten, dass *nicht* alle geometrischen Proportionen mit *rationalen* Zahlen beschreibbar sind, war für sie ein solcher Ansatz zur Charakterisierung von Flächen in der *akademischen* Mathematik problematisch und höchstens für Spezialfalle, nicht aber allgemein tauglich.

Die von Euklid benutzte Strategie zu gegebenen Figuren flächengleiche Quadrate zu erzeugen, umgeht das Problemfeld der irrationalen Zahlen.

Das Buch II endet mit dem Beweis, dass sich zu *jeder* geradlinig begrenzten, ebenen Figur ein flächengleiches Quadrat konstruieren lässt (Satz 14, Buch II). Das Verfahren zur Erzeugung flächengleicher Quadrate zerfällt in zwei Hauptschritte:

(i) Erzeuge zur gegebenen geradlinigen Figur ein flächengleiches Rechteck;

(ii) Erzeuge aus dem Rechteck ein flächengleiches Quadrat.

Dass und wie (i) möglich ist, klaren verschiedene Sätze aus Buch I und II. Die Vorgehensweise bei Schritt (ii) soll kurz skizziert werden. Es wird nur das Verfahren und nicht der zugehörige Beweis referiert.

Gegeben sei ein beliebiges Rechteck mit den Seiten **a** und **b**. Gesucht wird die Seite **c**, so dass das Quadrat über **c** flächengleich zum gegebenen Rechteck ist.

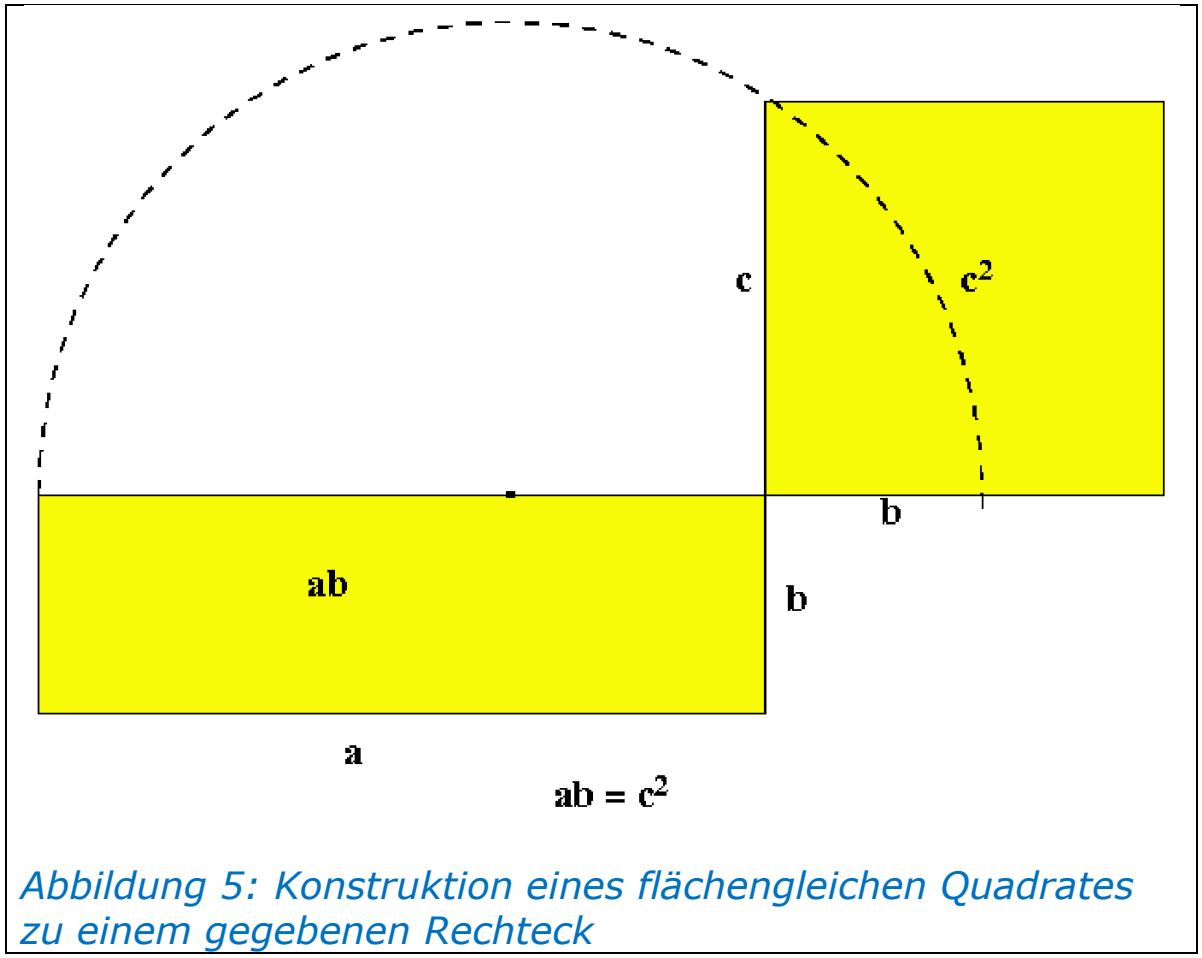


Abbildung 5: Konstruktion eines flächengleichen Quadrates zu einem gegebenen Rechteck

Hat man ein Rechteck mit den Seiten *a* und *b*, so verlängert man die Strecke *a* um die Strecke *b*. Man bestimmt den Mittelpunkt dieser neuen Strecke (a + b) und schlagt einen Halbkreis mit dem Radius (a + b)/2 über der Strecke. Sodann errichtet man das Lot über dem Ansatzpunkt der

Verlängerung (um *b*) bis der Halbkreis erreicht wird. Die so gewonnene Strecke *c* ist die Basis eines flächengleichen Quadrats.(vgl. Abb. 5)

Mit dem Nachweis der Möglichkeit, dass man zu jeder geradlinig begrenzten Figur ein flächengleiches Quadrat erzeugen kann, ist für Euklid die Behandlung der Flachen derartiger Figuren abgeschlossen. Damit ist für ihn alles, was von theoretischem Interesse sein konnte, geklärt. Und über das Theoretische hinausgehende, anwendungsbezogene Fragen interessieren ihn (zumindest in den *Elementen*) nicht.

Nachbemerkung zu den Voraussetzungen derartiger Konstruktionen:

Zur Sicherung der Durchführbarkeit solcher Konstruktionen hat Euklid seine *Postulate* (Axiome) formuliert.

Hat man ein Rechteck von der Größe der USA, wird das obige Verfahren zwar praktisch scheitern, aber das interessiert Euklid nicht. Er hat in seinen Postulaten schließlich gefordert, dass man

> von jedem Punkt zu jedem Punkt die Strecke ziehen kann (Postulat 1);
> jede Strecke beliebig verlängern kann (Postulat 2);
> um jeden Punkt einen Kreis mit beliebigem Radius schlagen kann (Postulat 3).

Euklid beschäftigt sich eben mit der Theorie idealer Objekte und nicht mit den Tücken der wirklichen Welt. Das Postulat 3 einerseits, sowie die Postulate 1 und 2 anderseits repräsentieren die beiden klassisch gewordenen Werkzeuge der euklidischen Konstruktionen: *Zirkel* und *Lineal*. Wortwörtlich

kommen *Zirkel* und *Lineal* in Euklids *Elementen* allerdings nirgends vor. Es sind nur Metaphern (oder Metonymien) für die drei ersten euklidischen Postulate."[282]

Speziell mit den Quadraten der Primzahlen hat es ein besonderes Bewandtnis, weil sie um eins vermindert mit 24 teilbar sind[283]:

„Vermindert man das Quadrat einer Primzahl p um 1, so kann auf das entstehende Ergebnis Z die dritte binomische Formel angewendet werden und Z lässt sich als Produkt von zwei Faktoren in folgender Weise darstellen:

$$Z = p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$$

Da nur Primzahlen p genommen werden dürfen, die größer als 3 sind, muss p immer ungerade sein, da die einzige gerade Primzahl die 2 ist.

Deshalb muss der erste Faktor (p – 1) gerade sein. Z ist also immer ohne Rest durch 2 teilbar.

Ebenso muss auch der zweite Faktor (p + 1) gerade sein. Deshalb ist Z sogar ohne Rest durch 4 teilbar.

Die Faktoren (p – 1) und (p + 1) sind benachbarte gerade Zahlen. Da jede zweite gerade Zahl durch 4 teilbar ist, muss einer der beiden Faktoren durch 4, der andere durch 2 teilbar sein. Das Ergebnis Z ist also sogar ohne Rest durch 8 teilbar.

---

[282] Froese, Euklid und die Elemente, in: < URL > 10 ff.
[283] Waldal 81, 86.

Die Zahlen (p – 1), p und (p + 1) folgen direkt aufeinander. Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar. Entsprechend der Aufgabe muss die Primzahl p aber größer als 3 sein und kann deshalb nicht durch 3 teilbar sein. Dann muss einer der beiden verbleibenden Ausdrücke (p – 1) oder (p + 1) durch 3 teilbar sein. Da das Ergebnis Z das Produkt dieser beiden Ausdrücke ist, muss Z folglich auch durch 3 und deshalb insgesamt sogar ohne Rest durch 24 teilbar sein.

Die kleinste Primzahl größer als 3 ist die 5. Für sie ist $Z = p^2 - 1 = 24$. Das bedeutet, dass 24 auch die größte Zahl ist, durch die Z immer ohne Rest geteilt werden kann."[284]

„9. Die natürliche Zahlenfolge kann als ein kontinuierliches Spektrum auffassen, dessen Homogenität durch die eingebetteten Primzahlen beeinträchtigt wird. Mittels eines beliebigen Variablen Periode λ kann man experimentell durch die entsprechenden «Interferenzen» nachweisen, dass die Folge der Primzahlen ausgeprägten Periodizitäten unterliegen.

10. Diese Periodizitäten sind nicht äquivalent, sondern es treten bei der Periode λ = 6 sowie deren Multipla starke Maxima der Primzahlkonzentration auf.

*

11. Die natürliche Zahlenfolge kann – soweit man beliebt – laut Euler bzw. Dirichlet vollständig und ein-ein-deutig zerlegt werden in simultane, lineare arithmetische Folgen von der Form

$$\lambda \cdot n + a$$

[284] Brefeld, Primzahlen, Teilbarkeit und die Zahl 24, in: < URL >.

wobei nur diejenigen Folgen Primzahlen enthalten können, wo λ, *a* teilerfremd sind (außer höchstens bei n = 0).

12. Weil *a* in bezug auf λ und n symmetrisch ist, wird es keinen solche Folgen geben können, die nur Primzahlen enthalten: mit variablem Wert von n wird *a* nicht stetig teilerfremd bleiben können. Einen Sonderfall hat man indes bei $a = \pm 1$.

*

13. Bei der Zerlegung der natürlichen Zahlenfolge im 6er-System konzentrieren sich alle Primzahlen > 3 in nur zwei arithmetischen Folgen, und zwar

$$6n + 1 \text{ und } 6n - 1$$

die sich zu einer Zwillingsfolge

$$6n \mp 1$$

Reduzieren lassen. Dies weist eine maximale Primzahlkonzentration auf, ferner ergibt sie – auch anschaulich – direkt alle Primzahlzwillinge ≧ 5, 7. Sie erweist sich somit als die optimale Folge.

14. Ganz entsprechend könnte man alternativ die Primzahlfolge mittels einer der arithmetischen Doppelfolgen

$$3n \mp 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 4n \mp 1$$

darstellen, doch wäre dies weniger dienlich – es sei denn für besondere Zwecke –, da sie im Verhältnis mehr zusammengesetzte Zahlen enthalten.

15. Somit werden am zweckmäßigsten alle existierenden Primzahlen durch die arithmetische Folge

$$P = 1, 2, 3, 6n \mp 1$$

dargestellt.

16. Eine beliebige Zahl kann somit nur dann eine Primzahl sein, wenn sie, durch 6 dividiert, einen Rest ∓ 1 erigibt.

*

17. Das Quadrat jedweder Primzahl (außer 2, 3) lässt sich immer auf die Form

$$P^2 = 24 \cdot n + 1$$

schreiben, wo n eine ganze Zahl ist.

18. Somit wird jede Primzahl, (außer 2, 3) in der nichtlinearen Funktion

$$p = \sqrt{24 \cdot n + 1}$$

enthalten sein. Dabei kommen nur rationale Werte der Wurzel in Betracht; doch werden unter diesen nicht ausschließlich Primzahlen, sondern auch zusammengesetzte Zahlen enthalten sein.

*

19. Alle Primzahlen > 7 werden enthalten sein in der Matrix

$$P = \begin{Bmatrix} 11, & 13 \\ 17, & 19 \\ 23, & - \\ 29, & 31 \\ - & 37 \end{Bmatrix} + 30 \cdot n \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

sowie alle Primzahlzwillinge > 5, 7 in der davon abgeleiteten Matrix

$$Z = \begin{Bmatrix} 11, & 13 \\ 17, & 19 \\ 29, & 31 \end{Bmatrix} + 30 \cdot n.$$"[285]

Wegen $6n_a - 1 = 4n_b + 1$ korrespondiert die Folge 6n – 1 für Primzahlen[286] mit der Folge 4n + 1 für Quadrate[287]. Im rationalen Zahlkörper ist 2 bekanntlich eine Primzahl, das gilt aber nicht im Körper quadratischer Zahlen $\mathbb{Q}(i)$, wo die rationale Primzahl 2 = (1 + i)(1 – i) so zerlegt wird, dass 1 + i und 1 – i Primzahlen sind, weil $N(1 - i) = (-i)^2$ $f_{1+i}(0) = 2$ eine rationale Primzahl (mit $f_{1+i}(x) = x^2 - 2x + 2$) sei[288]. (1 – i) ist die zu (1 + i) konjugierte – aber auch assoziierte – Primzahl: 1 – i = – i(1 + i). Eine rationale Primzahl der Form 4n + 1 ergibt mindestens eine der Gleichungen $a^2 - db^2 =$

[285] Waldal 80 f.
[286] Waldal 80 f.
[287] Wiener 54 f.
[288] Wiener 38.

$a^2 + b^2 = \pm p$ eine Lösung. Die Gleichung $a^2 + b^2 = -p$ kann offensichtlich nicht erfüllt werden, deshalb muss $a^2 + b^2 = p$ in ganzzalligen a, b lösbar sein und so sind alle Zahlen $a_p + ib_p$, $a_p - ib_p$ (und deren Assoziierte) Primzahlen in $\mathbb{Q}(i)$, d. h. im Körper quadratsicher Zahlen. Sämtliche rationale Primzahlen der Form $4n + 3$ (zusammen mit den Assoziierten) Primzahlen $\mathbb{Q}(i)$. Daraus ergibt sich der Beweis für den Satz von Fermat[289]. Satz: ist p eine Primzahl und $p \not\equiv 3 \pmod 4$, so gibt es natürlich Zahlen a und b mit $p = a^2 + b^2$. Für $p = 2$ ist die Lösbarkeit trivial, sämtliche anderen Primzahlen $\not\equiv 3 \pmod 4$ sind von der Form $4n + 1$ und im gesamten $\mathbb{Q}(i)$ gilt die Gleichung $a^2 - db^2 = p$, die gleichbedeutend mit $a^2 + b^2 = p$ ist, und Lösungen im Köper der natürlichen Zahlen $(a, b \in \mathbb{N})$ hat[290].

Euler hat den von Fermat behaupteten Satz[291] bewiesen, dass die „Primzahlen von der Form $p = 4n + 1$ in eine Summe von zwei Quadratzahlen zerlegt werden können, dass also immer gilt

$$p = 4n + 1 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Der Satz gilt in einer Umkehrung: Jede ganze Zahl, die auf eine einzige Weise als Summe zweier teilerfremder Quadrate darstellbar ist, ist prim. […] Von hier gelangt Euler über die allgemeine Darstellung von Primzahlen der Struktur

$$p = mx^2 + ny^2 \qquad (2)$$

zur Entwicklung von wirksamen Methoden zur Entscheidung über den allfälligen Primcharakter großer Zahlen, was schließlich die Grundlage für die allgemeine der binären quadratischen Formen

[289] Rettenbacher 3 ff, 83 ff.
[290] Wiener 54 f.
[291] Rettenbacher 3 ff, 83 ff.

abgab, die in der Folge von Lagrange und Gauss entwickelt und ausgebaut werden sollte. Für m = 1 ergibt sich aus (2) die Gleichung

$$p = x^2 + ny^2 \qquad (3)$$

und Euler formulierte daraus das Problem, alle natürlichen Zahlen *n* anzugeben, für welche gilt: Wenn eine Zahl *p* auf nur eine Weise in der Form (3) bei teilerfremden *x* und *y* darstellbar ist, dann ist sie eine prim. Beispielsweise erfüllen die Zahlen n = 1, 2, 3, 5 unter den angegebenen Voraussetzungen die Gleichung (3), nicht aber die Zahl n = 11 (Gegenbeispiel: $15 = 2^2 + 11 \cdot 1^2$). Euler nannte solche Zahlen *numeri idonei* («passende» oder «taugliche» Zahlen) und suchte nach einer Methode, sie zu bestimmen. Um nicht für jedes *n* unendlich viele Zahlen *p* auf ihre Darstellbarkeit gemäß Gleichung (3) prüfen zu müssen, stützte Euler die Untersuchung auf folgendes Resultat seiner Überlegungen ab: Für jedes *n*, das *nicht* «tauglich» ist, gibt es ein natürliches $m < 4n$, das auf eine einzige Weise durch $p = x^2 + ny^2$ darstellbar ist, obwohl *m* keine Primzahl ist. Mit diesem Kriterium rechnete Euer sukzessive bis $n = 1000$ und mehr und machte dabei die unerwartete Entdeckung, dass nach n = 1848 keine *numeri idonei* mehr auftauchen! Insgesamt existieren deren nur 65, und Euler gab sie vollständig an:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	13	15	16	18	21	22	24	25	28
30	33	37	40	42	45	48	57	58	60
70	72	78	85	88	93	102	105	112	120
130	133	165	168	177	190	210	232	240	253
273	280	312	330	345	357	385	408	462	520
760	840	1320	1365	1848					

Es ist heute klar, dass Euler – und auch noch später Gauss – mit den ihnen zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln den Beweis für die Endlichkeit der *numeri idonei* nicht erbringen konnten. Dies wurde erst 1934 durch Heilbronn und Chowla geleistet."[292]

Euler war auch der Erste, der analytische Methoden in die Zahlentheorie eingeführt hat. „So arbeitete er bereits während der ersten Petersburger Periode mit der Beziehung

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{1^k}\right)\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\left(1-\frac{1}{5^k}\right)\ldots},$$

kürzer geschrieben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p} \left[1 : \left(1-\frac{1}{p^k}\right)\right],$$

wobei die linke Seite die Riemannsche Zahlenfunktion ζ(k) darstellt und *p* die Reihe der Primzahlen durchläuft. In diesen Zusammenhang stellt und studiert Euler Probleme, die sich für die Theorie der transzendenten Zahlen als wichtig erweisen sollte. Seine von 1744 datierte Kettenbruchentwicklung der fundamentalen Transzendenten

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

der Basis der natürlichen Logarithmen, wurde 1768 von Johann Heinrich Lambert (1728-1777)(Abb. 20) für die Irrationalitätsbeweis der Zahlen π und *e* aufgegriffen, und Lindemann (1852-1938) benützte für seinen Transzendenzbeweis von π die von Euler 1728 gefundene Gleichung lg(−1) = πi, wobei *i* die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet."[293]

[292] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f.
[293] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; vgl Waldschmidt 4 [248].

Eulers Ansatz[294] erwies sich beim verspäteten Beweis des großen Primzahlsatzes[295]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

als Voraussetzung: „Es vergingen mehr als 100 jahre, bis ein erster vollständiger Beweis des großen Primzahlsatzes gegeben wurde. Erst 1896 gelang es – zwar gleichzeitig, aber unabhängig voneinander – dem französischen Mathematiker J. HADAMARD (1865 – 1963) und dem belgischen Mathematiker C. DE LA VALLÉE-POUSSIN (1866 – 1962). Der Beweis gehört in die analytische Zahlentheorie und kann hier nicht erbracht werden: Entscheidendes Hilfsmittel ist die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1,$$

die in folgendem Zusammenhang mit Primzahlen steht:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \lim_{x\to\infty} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\leqq x}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Diese Zetafunktion muss auch für komplexe[296] Argumente s mit funktionstheoretischen Methoden studiert werden[297]. 1949 zeigten A. SELBERG und P. ERDÖS, dass man mit entsprechend großem Aufwand auf die funktionstheoretischen Hilfsmittel verzichten kann (sogenannter elementarer Beweis des großen Primzahlsatzes).“[298]

---

[294] Bundschuh 52 f.
[295] Padberg 80.
[296] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.
[297] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[298] Remmert/Ullrich 73 f; Trost 62 ff; vgl Aigner/Ziegler, Das BUCH der Beweise, in: < URL >.

Die Folge 30n

Die Zahl 30 hat die Eigenschaft, dass in den unter ihr liegenden (n < 30) und zu ihr teilerfremden Zahlen, 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, keine zusammengesetzte Zahl vorkommt, sondern abgesehen von von der Einheit nur Primzahlen[299].

Weil jede ungerade Zahl in der Form $30n \pm 1$, $30n \pm 3$, $30n \pm 5$, $30n \pm 7$, ..., $30n \pm 25$, $30n \pm 27$, $30n \pm 29$ darstellbar ist und die Primzahlen > 27 nicht die Formen $30n \pm 3$, $30n \pm 5$, $30n \pm 9$, $30n \pm 15$, $30n \pm 21$, $30n \pm 25$ und $30n \pm 27$ haben,denn diese 7 Formen stets durch 3 oder durch 5 teilbar sind[300]: hat jeder Primzahlzwilling eine der drei Formen: $30n \pm 1$, $30n \pm 11$, $30n \pm 13$, $30n \pm 17$, $30n \pm 19$. Es bleiben daher:

$$(30n - 1, 30n + 1)$$
$$(30n - 11, 30n + 11)$$
$$(30n - 13, 30n + 13)$$

als die möglichen Formen für Primzahlzwillinge[301]:

$$30n \pm 1,$$

---

[299] Landau I 229.

[300] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >: „Mit Ausnahme von $n = 1$ ist die letzte Ziffer eines n eine 0, 2, 3, 5, 7 oder eine 8, da im anderen Fall eine der beiden Zahlen $6n - 1$ bzw. $6n + 1$ durch 5 teilbar und damit keine Primzahl wäre."

[301] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.

$$30n \pm 11,$$
$$30n \pm 13,$$

Bereits in der Anwenedung des Siebes des Eratosthenes[302] kaum ein Zyklus 30n zum Vorschein, der dem Zyklus 6n ± 1 überlagert war, dessen Obereinheit ist[303]. Die bestimmende Rolle von 30n bei den Primzahlzwillingen[304] ist analog der bestimmenden Rolle von 6n ± 1 bei den Primzahlen. So wie die Primzahlzwillinge nur die Endziffer 0, 2, 3, 5, 7, 8, 0, haben können[305], so haben analog die numeri idonei > 30 keine dieser Endziffer. Auch die Endziffer bei Zahlen der numeri idonei < 30, oder vielmehr die Lücken, lassen sich durch 30n – k berechnen: 30 – 19 = 11, 30 – 2·7 = 14, 30 – 13 = 17, 30 – 11 = 19, 30 – 2·5 = 20, 30 – 7 = 23, 30 – 2·2 = 26, 30 – 3 = 27, 30 – 1 = 29. Jenseits von 30 gibt es keine numeri idonei < 30 mit den Endziffern 1, 4, 6, 9, weil das ein Primzahlkriterium ist[306], außer bei Primzahlen < 30 und numeri idonei < 30.

Neure Forschungsergebnisse zeigen, das sich die Häufigkeit von Primzahlzwillingen in sog. 30-er Blocks, d. h. mit 30n, bestimmen lässt[307].

„Es ist hinlänglich bekannt und bewiesen: Jede Zahl, die mod 30 einen der Reste 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 oder 29 liefert, ist möglicherweise eine Primzahl. Oder anders betrachtet: Verwendet man das viel besprochene 'Sieb des Eratosthenes', dann ist obige erste Zeile eine Abbildung der Zahlengeraden nach den Streichungen durch die Primfaktoren 2, 3 und 5. Dabei ist jeder 'Punkt' eine nach Eratosthenes gestrichene Zahl und jedes Zeichen o ein verbleibender 'möglicher' Primzahlplatz.

[302] Gaubitzer 26 f; Pittner 98 f.
[303] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.
[304] Gaubitzer 28.
[305] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; vgl Trost 10 f.
[306] Christof 4 f.
[307] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >

In der 3. Zeile sind drei beliebige Abstände eingetragen... zweimal a=6 und einmal a=20. Bereits durch einfaches Abzählen kann ermittelt werden, wie oft ein 'möglicher' Primzahlabstand in einem 30-er Zahlenblock auftritt. Wohlgemerkt: ein 'möglicher', kein 'tatsächlicher'. Das Zählen beginnt immer in einem ersten 30-er Block und endet spätestens im zweiten Block. Für größere Modulwerte kann man vorteilhaft ein Zählprogramm verwenden.

Als Resultat des Zählens wird man die Häufigkeit der Abstände pro 30-er Block feststellen mit:

```
pi.a .... Anzahl der Abstände     a
pi.2 .... Anzahl Zwillinge        a=2            (pi.2 = Grundmenge M0)
Abstände, nur mit Primfaktor   2  a=2,4,8,16,32  pi.a = pi.2       = 3
Abstände, ein ungerader Faktor 3  a=6,12,18,24   pi.a = pi.2 * 2/1 = 6
Abstände, ein ungerader Faktor 5  a=10,20        pi.a = pi.2 * 4/3 = 4

An dem Abstand 30 mit den Faktoren 3 und 5 läßt sich besonders einfach erkennen:
            pi.30 = pi.2 * 2/1 * 4/3 = 3*2*4/3 = 8
Ohne jede Formel findet man dazu die einfache Bestätigung, denn...
Alle 8 Primzahlplätze eines 30er Zahlenblocks haben mod 30 ihren Partner!
```

Andere Abstände (14, 22, 26, 28...) auszuwerten macht wenig Sinn , da diese die noch nicht gestrichenen Primfaktoren 7, 11, 13... enthalten. Dazu müßten höhere modulo-Werte für die Parkettierung eingesetzt werden. Diesen Schritt kann man sich jedoch sparen, denn die Funktion der 'relativen Häufigkeit' rh(n) liefert die korrekten Werte für alle Primfaktoren in allgemeiner Gültigkeit, ohne jede Begrenzung bis 'abzählbar unendlich'!"[308]

Das Sieb des Eratosthenes[309] lässt sich prinzipiell als Methode auch auf die numeri idonei anwenden[310], allerdings nach anderen Kriterien. Die numeri idonei enthalten zwar auch die gerade Zahlen,

[308] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >
[309] Remmert/Ullrich 77 f; Reiss/Schmieder 102 ff; Bornstein u. a. 370; Pittner 98 f; Gaubitzer 26 f; Simmel 6 ff.

doch die sollen helfen die Primzahlen näher zu bestimmen, die immer ungerade sind, so dass sich die numeri idonei aus ihrem Verhältnis zu Primzahlen bestimmen lassen.

Die nachstehende Tabelle enthält links den Stellenwert 10n der Zeile, allerdings n mit römischen Ziffern. Die Zahlen bis 30 werden wegen ihrer Sonderstellung bezüglich Primzahlen hervorgehoben[311] weil nur für Zahlen > 30 gelten gewisse Regel, die bei Zahlen < 30 nicht gelten.

I.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
II.			12	13		15	16		18		
III.		21	22		24	25			28		30
IV.				33				37			40
V.			42			45			48		
VI.								57	58		60
VII.											70
VIII.			72						78		
IX.						85			88		
X.				93							
XI.			102			105					
XII.			112								120
XIII.											130
XIV.				133							

[310] Trost 9 f, 29.
[311] Landau I 87 ff, 229 ff.

XVII.						165			168		
XVIII.								177			
XIX.											190
XX.											
XXI.											210
XXII.											
XXIII.											
XXIV.			232								240
XXV.											
XXVI.				253							
XXVII.											
XXVIII.				273							280

...

XXXII.			312								
XXXIII.											
XXXIV.											330
XXXV.						345					
XXXVI.								357			

...

XXXIX.						385					

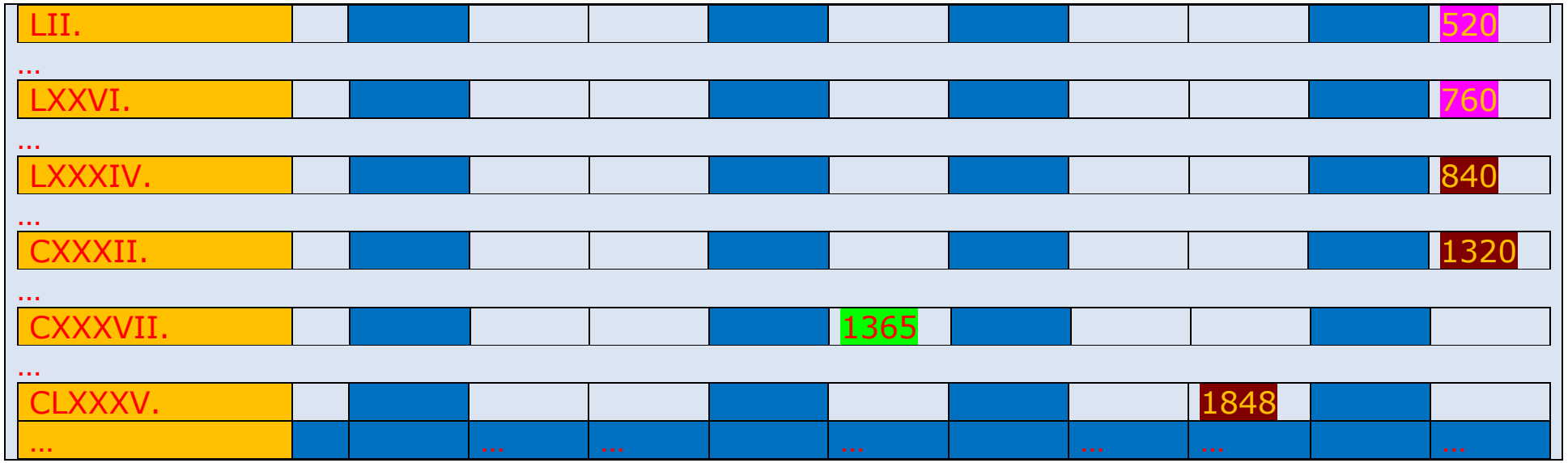
...

XLI.									408		

...

XLVII.			462								

...



Es lassen sich einige numerische Zusammenhänge erkennen: Da ist zunächst die Unterteilung der Zahlen < 30 und > 30. Es gibt eine mit 0 beginnende Folge 6n + 0. Danach gibt es eine mit 1 beginnende Folge 6n + 1. Eine mit 3 beginnende Folge 6n + 3. Eine mit 4 beginnende Folge 6n + 4. Eine 2 mit beginnende Folge 6n + 2 hört sogleich bei 8 auf und besteht, falls man das überhaupt als Folge bezeichnen kann, aus zwei Gliedern. Eine mit 5 beginnende Folge 6n + 5 hätte nur ein Glied, und dürfte innerhalb der numeri idonei keine Folge sein, wohl aber außerhalb. Nichts desto trotz ist in mancher Hinsicht diese Folge außerhalb der numeri idonei schon allein deswegen interessant, weil sie mit – 1 beginnen müsse, und ist um so bezeichnender, dass die Folge, sofern sie eine ist, außerhalb vom System sich befindet. Ohne 6n + 2 und 6n + 5 verbleiben die Folgen

$$6n + 0$$
$$6n + 1$$
$$6n + 3$$

$6n + 4$

Diese verteilen sich im Zahlenfeld nicht gleichmäßig auf die Endziffer, sondern sind einerseits auf die Endziffern der Primzahlzwillinge[312] 0, 2, 3, 5, 7, 8, beschränkt und andererseits gibt es nur jeweils für bestimmte Folgen nur bestimmte Endziffern. $6n + 1$ und $6n + 3$ stehen für die Endziffer 5, es gibt keine Endziffer 3, 5 und 7 für $6n + 0$ und $6n + 4$, während $6n + 3$ und $6n + 4$ nur bei den Endziffern 3 und 7 zu finden sind. Dadurch, dass das Feld der Endziffern 10 Stellen hat, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und nur die Endziffern 0, 2, 3, 5, 7, 8, vorkommen, kann man in einer Reihe mit 6n je zwei Endziffern erreichen, wie zB 2 + 6 = 8, d. h. 42 und 48 sowie 72 und 78. Auffällig ist allerdings, dass der Mindestabstand bei n > 30 in der Folge (außer bei $6n + 0$) zwischen den Gliedern 12 und nicht 6 beträgt. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass offensichtlich durch eine Addition von 1 bis 4 die Glieder der Folge $6n + 1$ den entsprechenden Endziffern der Primzahlzwillinge zugeordnet werden. Jedes der Glieder Folgen < 30 kommt also nur für bestimmte Endziffern in Frage:

$6n + 0$ für die Endziffer 8, 0, 2
$6n + 1$ für die Endziffer 3, 5, 7
$6n + 3$ für die Endziffer 3, 5, 7
$6n + 4$ für die Endziffer 8, 0, 2

So wie bei den Primzahlen, wo (mit Ausnahme von 2) nur die ungerade Zahlen vorkommen, zwei parallele Folgen 6n + 1 und 6n – 1 nebeneinander laufen, so gibt es hier, wo neben den ungeraden Zahlen auch die gerade Zahlen mit berücksichtigt werden, 4 Folgen $6n + 0$, $6n + 1$, $6n + 3$, $6n + 4$, nebeneinander. Bei den Primzahlen sind die Endziffern der geraden Zahlen, 0, 2, 4, 6, 8, und die Endziffer 5, ausgeschlossen, während hier bei n > 30 die Endziffern 1, 4, 6, 9, ausgeschlossen sind.

[312] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.

Die Strukturen der numeri idonei zeigen eine verblüffende Ähnlichkeit zu den Strukturen der Primzahlzwillinge[313].

Es lassen sich einige einfachere bzw. allgemeinere Zusammenhänge zwischen den numeri idonei zeigen:

1848 = 6·308
1848 – 1320 = 6·88
1320 – 840 = 6·80
840 – 760 = 80
840 – 462 = 6·63
1365 – 357 = 6·168 = 6·6·28
760 – 520 = 240 = 6·40
462 = 6·77
462 – 385 = 77
1848 – 462 = 6·231
462 – 408 = 6·9

[313] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >: „Mit Ausnahme des Primzahlzwillings (3, 5) liegt zwischen den beiden Primzahlen eines Primzahlzwillings immer eine durch 6 teilbare Zahl. Jede ganze Zahl lässt sich nämlich in der Form $6n - 2$, $6n - 1$, $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$ oder $6n + 3$ darstellen, wobei n eine ganze Zahl ist. Zahlen der Form $6n - 2$, $6n$ und $6n + 2$ sind durch 2 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Zwei keine Primzahlen sein. Zahlen der Form $6n + 3$ sind durch 3 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Drei auch keine Primzahlen sein. Somit haben alle Primzahlen über 3 die Form $6n - 1$ oder $6n + 1$. Daraus folgt, dass jeder Primzahlzwilling mit Ausnahme von (3, 5) die Darstellung $(6n - 1, 6n + 1)$ hat.“

1848 – 408 = 6·240
408 – 385 = 23
385 – 345 = 40
385 – 253 = 6·22
385 – 232 = 6·21
385 – 133 = 6·6·7
385 – 112 = 273
385 – 85 = 6·50
345 – 45 = 6·50
520 – 112 = 408
357 – 273 = 6·14
357 – 345 = 6·2
…

168 = 6·28
78 = 6·13
72 = 6·12
…

In der ersten Tabelle (oben) sind einmal die numeri idonei < 30 nach dem Stellenwert gereiht worden. Alle Zahlen und damit Endziffern bis bin n < 10 vorhanden. Alle Zahlen n > 30 haben keine Endziffer 1, 4, 6, 9, sondern nur die Endziffern, 2, 3, 5, 7, 8, 0, genau wie die Primzahlzwillinge[314].

Das Sieb des Eratosthenes[315] arbeitet bei den numeri idonei grundsätzlich anders, weil hier die gerade Zahlen erhalten bleiben[316] und nach anderen Kriterien gesiebt werde. Es handelt sich in der nach-

[314] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; vgl Trost 10 f.

stehenden Tabelle um eine analoge Siebmethode, wo die Vielfache der vorhandenen Zahlen nach ihrem Auftreten als Zyklus aus der Tabelle bzw. Liste gestrichen werden (in Klammern sind die Zahlen, wo die Periode beginnt): 1, 2, 3 (11), 4 (19), 5 (34), 6, 7 (52), 8 (76), 9 (81), 10 (36), 11 (96), 12 (202), 13 (43), 14 (97), 15 (31), 16 (226), 17 (128), 18 (103), 19 (97), 20 (39), 21 (54), 22 (62), 23 (296), 24 (277), 25 (113), 26 (146), 27 (217), 28 (281), 29 (117) 30 (387), 31 (161), 32 (272), 33 (793), 34 (307), 35 (123), 36 (366), 37 (317), 38 (39).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	039	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	084	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

101	102	103	104	105	106	107	0108	109	110
111	112	113	114	115	0116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	0135	136	137	138	0139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

[315] Simmel 6 ff; Pittner 98 f.
[316] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f.

151	152	153	154	155	156	157	158	0159	160
161	162	163	0164	165	166	167	168	169	170
171	172	0173	174	175	176	177	178	0179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	0199	200

201	202	203	204	205	0206	207	208	209	210
0211	212	213	214	215	0216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	0228	229	0230
231	232	233	234	235	236	237	238	0239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
0251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	0264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	00274	275	0276	277	278	279	280
281	282	0283	284	285	286	287	288	289	0290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	0304	0305	00306	307	308	309	310
311	312	313	314	315	00316	317	318	319	320
321	322	323	324	00325	326	327	328	329	330
331	0332	333	334	335	336	337	0338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	00349	350
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	00363	364	365	0366	367	368	369	370
371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
0381	382	383	384	385	386	387	0388	389	390

391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

401	402	403	404	405	0406	407	408	409	410
411	412	413	414	415	416	417	418	419	0420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430
431	432	433	0434	435	0436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	0458	0459	460
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470
471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
0481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
491	492	493	494	495	496	497	498	499	500

501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	000514	515	0516	517	518	519	520
521	522	523	524	525	526	527	528	529	530
531	532	533	534	535	0536	0537	538	539	540
541	542	543	544	545	0546	547	548	0549	550
551	552	553	554	555	556	557	558	559	560
561	562	0563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580
581	582	583	584	585	586	0587	588	0589	590
0591	592	593	594	595	0596	597	598	599	600

601	602	603	0604	605	606	607	608	609	0610

611	612	0613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	00626	627	628	629	630
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
651	652	653	0654	0655	656	657	658	659	660
0661	662	663	664	665	666	667	0668	669	670
671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	0684	0685	686	687	688	689	690
691	692	693	694	695	696	697	698	699	700

701	702	703	704	705	0706	707	708	709	710
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720
721	722	0723	00724	725	726	727	728	729	730
731	732	733	734	735	736	737	0738	739	740
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750
751	752	753	754	755	0756	0757	758	759	760
761	762	763	764	765	0766	767	768	769	770
771	772	773	774	775	776	777	778	779	0780
0781	782	783	784	785	786	787	00788	789	790
791	792	793	794	795	796	797	798	799	800

801	802	803	804	805	806	807	808	809	0810
0811	812	813	814	815	816	817	818	819	820
821	822	823	824	825	0826	827	828	0829	830
831	832	833	834	835	836	837	838	839	840

841	842	843	844	845	846	847	848	849	850
851	852	853	854	855	856	857	858	859	860
861	862	863	864	865	0866	0867	868	869	870
871	872	873	874	0875	0876	877	878	879	880
881	882	883	884	885	886	887	888	889	890
891	892	893	894	895	896	897	898	899	900

...

1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310
1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320
1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330
1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340
1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350
1351	1352	1353	01354	1355	1356	1357	1358	1359	1360
1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370
1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380
1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390
1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400

...

1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807	1808	1809	1810
1811	1812	1813	1814	1815	1816	1817	1818	1819	1820
1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	1829	1830
1831	1832	1833	1834	1835	1836	1837	1838	1839	1840
1841	1842	1843	1844	1845	1846	1847	1848	1849	1850

1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860
1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867	1868	1869	1870
1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880
1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890
1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897	1898	1899	1900

Die Zahl 6 scheint eine Sonderstellung aufgrund 6n + 1 einzunehmen, denn im Gegensatz zu allen anderen Zahlen, die spätestens nach dem Quadrat ausgesiebt werden können (zB 3 ab (11), 4 ab (19), 5 ab (34) 7 ab (52), 8 ab (76), 9 ab (81) usw.). Nach dem Aussieben der Zahlen 3 bis 39, mit Ausnahme der 6, sind alle Plätze bis auf die numerie idonei verschwunden: 1, 2, 3 (11), 4 (19), 5 (34), 6, 7 (52), 8 (76), 9 (81), 10 (36), 11 (96), 12 (202), 13 (43), 14 (97), 15 (31), 16 (226), 17 (128), 18 (103), 19 (97), 20 (39), 21 (54), 22 (62), 23 (296), 24 (277), 25 (113), 26 (146), 27 (217), 28 (281), 29 (117) 30 (387), 31 (161), 32 (272), 33 (793), 34 (307), 35 (123), 36 (366), 37 (317), 38 (39).

Die Folge x² + y²

Von dem Eulerschen Ansatz her werden auch neuere Versuche[317] über Primzahlen und Primzahlsatz mit der Formel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

besser verständlich[318]. Die Formel geht von der Unendlichkeit von Primzahlen aus[319], deren Beweis zwar nicht stichhaltig ist[320], aber waren damals noch einige Beweise nicht bekannt[321]. Die ursprüngliche Formel nach Legendre[322]

$$\pi(n) = \pi\left(\sqrt{n}\right) - 1 + \left[\frac{n}{1}\right] - \sum_{P_i \le \sqrt{n}} \left[\frac{n}{P_i}\right] + \sum_{\substack{P_i, P_j, P_k \le \sqrt{n} \\ P_i \neq P_j}} \left[\frac{n}{P_i P_j}\right] - \sum_{\substack{P_i, P_j \le \sqrt{n} \\ P_i \neq P_j \neq P_k}} \left[\frac{n}{P_i P_j P_k}\right] + \ldots$$

meint, dass die Menge der Primzahlen Funktion e^x, also endlicher Größe sei[323]. Dem steht der fälschlich geglaubte Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen entgegen[324].

---

[317] Padberg 80; Landau I S. VII, 29.
[318] Prachar 3.
[319] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f.
[320] Schwarz, Wolfgang (1969) 135; Pieper 23.
[321] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37.
[322] Kracher 43 f; Kowol 44 f; Simmel 7.

Die Formel[325] von Euler $p = 4n + 1 = x^2 + y^2$ verlangt nach der Folge $4n + 1$ als Grundprinzip. Dieser Folge entspricht wiederum der Summe zweier Quadrate[326].

$x^2 + dy^2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1² + 3·1²=4	1² + 3·2²=13	1² + 3·3²=28	1² + 3·4²=49	1² + 3·5²=76	1² + 3·6²=109	1² + 3·7²=148	1² + 3·8²=193	1² + 3·9²=244
2² + 3·1²=7	2² + 3·2²=16	2² + 3·3²=31	2² + 3·4²=52	2² + 3·5²=79	2² + 3·6²=112	2² + 3·7²=151	2² + 3·8²=196	2² + 3·9²=247
3² + 3·1²=12	3² + 3·2²=21	3² + 3·3²=36	3² + 3·4²=57	3² + 3·5²=84	3² + 3·6²=117	3² + 3·7²=156	3² + 3·8²=201	3² + 3·9²=252
4² + 3·1²=19	4² + 3·2²=28	4² + 3·3²=43	4² + 3·4²=64	4² + 3·5²=91	4² + 3·6²=124	4² + 3·7²=163	4² + 3·8²=208	4² + 3·9²=259
5² + 3·1²=28	5² + 3·2²=37	5² + 3·3²=52	5² + 3·4²=73	5² + 3·5²=100	5² + 3·6²=133	5² + 3·7²=172	5² + 3·8²=217	5² + 3·9²=268
6² + 3·1²=39	6² + 3·2²=48	6² + 3·3²=63	6² + 3·4²=84	6² + 3·5²=111	6² + 3·6²=144	6² + 3·7²=183	6² + 3·8²=228	6² + 3·9²=279
7² + 3·1²=52	7² + 3·2²=61	7² + 3·3²=76	7² + 3·4²=97	7² + 3·5²=124	7² + 3·6²=157	7² + 3·7²=196	7² + 3·8²=241	7² + 3·9²=292
8² + 3·1²=67	8² + 3·2²=76	8² + 3·3²=91	8² + 3·4²=112	8² + 3·5²=139	8² + 3·6²=172	8² + 3·7²=211	8² + 3·8²=256	8² + 3·9²=307
9² + 3·1²=94	9² + 3·2²=93	9²+3·3²=108	9² + 3·4²=129	9² + 3·5²=156	9² + 3·6²=183	9² + 3·7²=228	9² + 3·8²=273	9² + 3·9²=324
…	…	…	…	…	…	…	…	…

---

[323] Fischer, Die Eulersche Zahl, in: WOZ, Die Wochenzeitung, vom 12. April 2007 < URL >: „Alle diese Phänomene, bei denen die Menge eng an ihre Veränderung geknüpft ist, werden durch Exponentialgleichungen beschrieben, und die Mutter aller Exponentialgleichungen ist die e-Funktion e hoch x. […] Ein schönes Beispiel ist das Auftauchen von e in einem Ausdruck, der die sogenannte Primzahldichte beschreibt (die Anzahl Primzahlen in einem bestimmten Intervall). […] Und noch auf eine andere Art hat Euler e geadelt: Er hat mit der Zahl nämlich die wohl schönste mathematische Gleichung aufgestellt: e hoch iPi + 1 = 0." Mit „e hoch iPi + 1 = 0" ist $e^{i\pi} = -1$ bzw. $e^{i\pi} + 1 = 0$ gemeint (vgl Wikipedia, Eulersche Identität. In: URL < URL >; Remmert/Ullrich 73).

[324] Kracher 44: „Diese Schwierigkeiten lassen durch theoretische Überlegungen verringern. (zB. Formel von Meissel) Da die Formel $\pi(n)$ jedoch rekursiv angibt, dh. unter Rückgriff auf $\pi(\sqrt{n})$, lässt sich daraus das allgemeine Verhalten der Funktion $\pi(n)$, insbesondere für n nach unendlich nicht ableiten." Vgl Schwarz, Wolfgang (1969) 135.

[325] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f; Landau I 549 f.

[326] Tietze 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1^2 + 2 \cdot 1^2 = 3$	$1^2 + 2 \cdot 2^2 = 9$	$1^2 + 2 \cdot 3^2 = 19$	$1^2 + 2 \cdot 4^2 = 33$	$1^2 + 2 \cdot 5^2 = 51$	$1^2 + 2 \cdot 6^2 = 73$	$1^2 + 2 \cdot 7^2 = 99$	$1^2 + 2 \cdot 8^2 = 129$	$1^2 + 2 \cdot 9^2 = 163$
$2^2 + 2 \cdot 1^2 = 6$	$2^2 + 2 \cdot 2^2 = 12$	$2^2 + 2 \cdot 3^2 = 22$	$2^2 + 2 \cdot 4^2 = 36$	$2^2 + 2 \cdot 5^2 = 54$	$2^2 + 2 \cdot 6^2 = 76$	$2^2 + 2 \cdot 7^2 = 102$	$2^2 + 2 \cdot 8^2 = 132$	$2^2 + 2 \cdot 9^2 = 166$
$3^2 + 2 \cdot 1^2 = 11$	$3^2 + 2 \cdot 2^2 = 17$	$3^2 + 2 \cdot 3^2 = 27$	$3^2 + 2 \cdot 4^2 = 41$	$3^2 + 2 \cdot 5^2 = 59$	$3^2 + 2 \cdot 6^2 = 81$	$3^2 + 2 \cdot 7^2 = 107$	$3^2 + 2 \cdot 8^2 = 137$	$3^2 + 2 \cdot 9^2 = 171$
$4^2 + 2 \cdot 1^2 = 18$	$4^2 + 2 \cdot 2^2 = 24$	$4^2 + 2 \cdot 3^2 = 34$	$4^2 + 2 \cdot 4^2 = 48$	$4^2 + 2 \cdot 5^2 = 66$	$4^2 + 2 \cdot 6^2 = 88$	$4^2 + 2 \cdot 7^2 = 114$	$4^2 + 2 \cdot 8^2 = 144$	$4^2 + 2 \cdot 9^2 = 178$
$5^2 + 2 \cdot 1^2 = 27$	$5^2 + 2 \cdot 2^2 = 33$	$5^2 + 2 \cdot 3^2 = 43$	$5^2 + 2 \cdot 4^2 = 57$	$5^2 + 2 \cdot 5^2 = 75$	$5^2 + 2 \cdot 6^2 = 97$	$5^2 + 2 \cdot 7^2 = 123$	$5^2 + 2 \cdot 8^2 = 153$	$5^2 + 2 \cdot 9^2 = 187$
$6^2 + 2 \cdot 1^2 = 38$	$6^2 + 2 \cdot 2^2 = 44$	$6^2 + 2 \cdot 3^2 = 54$	$6^2 + 2 \cdot 4^2 = 68$	$6^2 + 2 \cdot 5^2 = 86$	$6^2 + 2 \cdot 6^2 = 108$	$6^2 + 2 \cdot 7^2 = 134$	$6^2 + 2 \cdot 8^2 = 164$	$6^2 + 2 \cdot 9^2 = 198$
$7^2 + 2 \cdot 1^2 = 51$	$7^2 + 2 \cdot 2^2 = 57$	$7^2 + 2 \cdot 3^2 = 67$	$7^2 + 2 \cdot 4^2 = 81$	$7^2 + 2 \cdot 5^2 = 99$	$7^2 + 2 \cdot 6^2 = 121$	$7^2 + 2 \cdot 7^2 = 147$	$7^2 + 2 \cdot 8^2 = 177$	$7^2 + 2 \cdot 9^2 = 211$
$8^2 + 2 \cdot 1^2 = 86$	$8^2 + 2 \cdot 2^2 = 72$	$8^2 + 2 \cdot 3^2 = 82$	$8^2 + 2 \cdot 4^2 = 96$	$8^2 + 2 \cdot 5^2 = 114$	$8^2 + 2 \cdot 6^2 = 136$	$8^2 + 2 \cdot 7^2 = 162$	$8^2 + 2 \cdot 8^2 = 192$	$8^2 + 2 \cdot 9^2 = 226$
$9^2 + 2 \cdot 1^2 = 83$	$9^2 + 2 \cdot 2^2 = 89$	$9^2 + 2 \cdot 3^2 = 99$	$9^2 + 2 \cdot 4^2 = 113$	$9^2 + 2 \cdot 5^2 = 131$	$9^2 + 2 \cdot 6^2 = 153$	$9^2 + 2 \cdot 7^2 = 179$	$9^2 + 2 \cdot 8^2 = 209$	$9^2 + 2 \cdot 9^2 = 243$
…	…	…	…	…	…	…	…	…

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1^2 + 1^2 = 2$	$1^2 + 2^2 = 5$	$1^2 + 3^2 = 10$	$1^2 + 4^2 = 17$	$1^2 + 5^2 = 26$	$1^2 + 6^2 = 37$	$1^2 + 7^2 = 50$	$1^2 + 8^2 = 65$	$1^2 + 9^2 = 82$	$1^2 + 10^2 = 101$
$2^2 + 1^2 = 5$	$2^2 + 2^2 = 8$	$2^2 + 3^2 = 13$	$2^2 + 4^2 = 20$	$2^2 + 5^2 = 29$	$2^2 + 6^2 = 40$	$2^2 + 7^2 = 53$	$2^2 + 8^2 = 69$	$2^2 + 9^2 = 85$	$2^2 + 10^2 = 104$
$3^2 + 1^2 = 10$	$3^2 + 2^2 = 13$	$3^2 + 3^2 = 18$	$3^2 + 4^2 = 25$	$3^2 + 5^2 = 34$	$3^2 + 6^2 = 45$	$3^2 + 7^2 = 58$	$3^2 + 8^2 = 73$	$3^2 + 9^2 = 90$	$3^2 + 10^2 = 109$
$4^2 + 1^2 = 17$	$4^2 + 2^2 = 20$	$4^2 + 3^2 = 25$	$4^2 + 4^2 = 32$	$4^2 + 5^2 = 41$	$4^2 + 6^2 = 52$	$4^2 + 7^2 = 65$	$4^2 + 8^2 = 80$	$4^2 + 9^2 = 97$	$4^2 + 10^2 = 116$
$5^2 + 1^2 = 26$	$5^2 + 2^2 = 29$	$5^2 + 3^2 = 34$	$5^2 + 4^2 = 41$	$5^2 + 5^2 = 50$	$5^2 + 6^2 = 61$	$5^2 + 7^2 = 74$	$5^2 + 8^2 = 89$	$5^2 + 9^2 = 106$	$5^2 + 10^2 = 125$
$6^2 + 1^2 = 37$	$6^2 + 2^2 = 40$	$6^2 + 3^2 = 45$	$6^2 + 4^2 = 52$	$6^2 + 5^2 = 61$	$6^2 + 6^2 = 72$	$6^2 + 7^2 = 85$	$6^2 + 8^2 = 100$	$6^2 + 9^2 = 117$	$6^2 + 10^2 = 116$
$7^2 + 1^2 = 50$	$7^2 + 2^2 = 53$	$7^2 + 3^2 = 58$	$7^2 + 4^2 = 63$	$7^2 + 5^2 = 74$	$7^2 + 6^2 = 85$	$7^2 + 7^2 = 98$	$7^2 + 8^2 = 113$	$7^2 + 9^2 = 130$	$7^2 + 10^2 = 149$
$8^2 + 1^2 = 65$	$8^2 + 2^2 = 68$	$8^2 + 3^2 = 73$	$8^2 + 4^2 = 80$	$8^2 + 5^2 = 89$	$8^2 + 6^2 = 100$	$8^2 + 7^2 = 113$	$8^2 + 8^2 = 128$	$8^2 + 9^2 = 145$	$8^2 + 10^2 = 164$
$9^2 + 1^2 = 82$	$9^2 + 2^2 = 85$	$9^2 + 3^2 = 90$	$9^2 + 4^2 = 97$	$9^2 + 5^2 = 106$	$9^2 + 6^2 = 117$	$9^2 + 7^2 = 130$	$9^2 + 8^2 = 145$	$9^2 + 9^2 = 162$	$9^2 + 10^2 = 181$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Von Euler ist die Formel[327] $n^2 + n + 17$ und später $n^2 + n + 41$, mit der sich – jeweils – eine gewisse Anzahl von Primzahlen berechnen lässt[328]. Aus den zwei von Euler gewählten Zahlen, 17 und 41, ist zu ersehen, dass die Zahl variabel ist, und eine Auswahl danach getroffen wurde, um beste Ergebnisse zu errechnen. Es lassen sich aber auch mit der einfachen Form $n^2 + n + 1$, wenn auch in bescheidenerem Umfang, Primzahlen berechnen, und dann analog mit $n^2 + n + 11$ und noch mit ei-

[327] Wikipedia, Seite „Primzahl", < URL >.
[328] Pieper 22 f; vgl Kowol 48; Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.

ner Reihe Primzahlen anstelle von 41, so wie das bereits Euler angedacht hat: man kann die Formel allgemein als $n^2 + n + p$ schreiben.

$1^2 + 1 + 1 = 3$ $2^2 + 2 + 1 = 7$ $3^2 + 3 + 1 = 13$ $4^2 + 4 + 1 = 21$ $5^2 + 5 + 1 = 31$ $6^2 + 6 + 1 = 43$ $7^2 + 7 + 1 = 57$ $8^2 + 8 + 1 = 73$ $9^2 + 9 + 1 = 91$ $10^2 + 10 + 1 = 111$ $11^2 + 11 + 1 = 113$ $12^2 + 12 + 1 = 157$ … $1^2 + 1 + 3 = 5$ $2^2 + 2 + 3 = 9$ $3^2 + 3 + 3 = 15$ $4^2 + 4 + 3 = 23$ $5^2 + 5 + 3 = 33$ …	$1^2 + 1 - 1 = 1$ $2^2 + 2 - 1 = 5$ $3^2 + 3 - 1 = 11$ $4^2 + 4 - 1 = 19$ $5^2 + 5 - 1 = 29$ $6^2 + 6 - 1 = 41$ $7^2 + 7 - 1 = 55$ $8^2 + 8 - 1 = 71$ $9^2 + 9 - 1 = 89$ $10^2 + 10 - 1 = 109$ $11^2 + 11 - 1 = 111$ $12^2 + 12 - 1 = 155$ …

Die einfache Form $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ berechnen, die mit der Dreiecksformel $n(n + 1)/2$ korrespondiert[329].

Es gibt maschinell errechnete Listen von Primzahlen[330]:

$P_{\{+5\}}$	$P_{\{+9\}}$	$P_{\{+3\}}$	$P_{\{+7\}}$	$P_{\{+1\}}$
$P_{\{-5\}}$	$P_{\{-9\}}$	$P_{\{-3\}}$	$P_{\{-7\}}$	$P_{\{-1\}}$
$-5 = 6\cdot(-1) + 1$	1(0)	7(1)	$13 = 3^2 + 2^2$(2)	19(3)
$5 = 6\cdot1 - 1$	11(2)	$17 = 4^2 + 1^2$(3)	23(4)	$29 = 5^2 + 2^2$(5)
$25 = 6\cdot4 + 1$	31(5)	$37 = 6^2 + 1^2$(6)	43((7)) = >6·7 + 1 = 6[6 + 1] + 1)	~~49~~ (= 7·7) (8)
$35 = 6\cdot6 - 1$	$41(7) = 4^2 + 5^2$	47(8)	$53 = 7^2 + 2^2$(9)	59(10)
$55 = 6\cdot9 + 1$	$61(10) = 5^2 + 6^2$	67(11)	$73 = 8^2 + 3^2$(12)	79(13)
$65 = 6\cdot11 - 1$	71(12)	~~77~~ (= 11·7) (13)	83(14)	$89 = 8^2 + 5^2$(15)
$85 = 6\cdot14 + 1$	~~91~~ (= 13·7)(15)	$97 = 9^2 + 4^2$(16)	103(17)	$109 = 10^2 + 3^2$(18)
$95 = 6\cdot16 - 1$	101(17)	107(18)	$113 = 8^2 + 7^2$(19)	~~119~~ (= 17·7) (20)

Die Endziffern der Quadratzahlen ergeben einen ganz bestimmten Zyklus, mit 0, 1, 4, 9, 6, 5, und dann von dort genau in der gleichen Reihenfolge aber rückwärts mit 5, 6, 9, 4, 1, 0, und dann wider

[329] Bartholomé/Rung/Kern 13, 20 f; Wikipedia, Dreieckszahl, in: < URL >; Gronau, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, in: < URL > 22 ff; Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich < URL >.

[330] Wikipedia, Tabelle der Primzahlen, in: < URL >.+-

in die Gegenrichtung, sodass insgesamt mit 0, 1, 4, 9, 6, 5, – 6, 9, 4, 1, 0, die Zahlenfolge – mit 5 in der Mitte – symmetrisch in beide Richtungen als Endziffern der Quadrate vorkommen. In dieser Reihe fehlen die Endziffern 2, 3, 7, 8.

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, …

Etwa genau die nämliche Lücke bei 2, 3, 7, 8, schließen die Zahlen n, deren Quadrate in der Form $(6n)^2$ die Primzahlzwillinge 6n + 1 und 6n – 1 bilden[331].

[331] Christof 4.

Die Folge (n – 1)! + 1

Mit 4! = 24 korrespondiert die Folge $p^2 - 1 = 24n$ aus $p = (24n + 1)^{½}$ mit $4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n + 2)}$ für Primzahlzwillinge aus $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ nach Wilson[332].

„Der folgende Satz, der erstmals von Waring 1770 bewiesen und J. Wilson (1741-1793) zugeschrieben wurde, stellt wohl das bekannteste Primzahlkriterium dar.

Satz 7. Die natürliche Zahl $n > 1$ ist dann und nur dann Primzahl, wenn $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. […] Setzt man $x = 0$, so folgt $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Ist n zusammengesetzt, so enthält n einen Primfaktor $q < n$; q ist ein Teiler von $(n - 1)!$, also ist $(n - 1)! + 1$ nicht durch q und damit auch nicht durch n teilbar.

Als Anwendung bewies CLEMENT [4] den hübschen

Satz 8. n und $n + 2$ sind dann und nur dann Primzahlzwillinge, wenn $4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n + 2)}$, $n > 1$. […] V. F. TKAČEV [45] hat Satz 8 auf das Zahlenpaar n, $n + k$ ($n > k > 0$, k gerade) verallgemeinert.“[333]

„Es sei $n \geq 2$. Die Zahlen n, $n + 2$ bilden genau dann ein Paar von Primzahlzwillingen, wenn

$$4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n + 2)}.$$

Beweis. Wenn die Kongruenz erfüllt ist, dann ist $n \neq 2, 4$ und

$$(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

[332] Pieper 52 ff; Kowol 136 f.
[333] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.

sodass nach Wilsons[334] Satz n eine Primzahl ist. Zudem

$$4(n - 1)! + 2 \equiv 0 \pmod{n + 2};$$

multipliziert mit n(n + 1),

$$4[(n + 1)! + 1] + 2n + 2n - 4 \equiv 0 \pmod{n + 2}$$

daraus

$$4[(n + 1)! + 1] + (n + 2)(2n - 2) \equiv 0 \pmod{n + 2};$$

und nach Wilsons Satz ist auch n + 2 prim.“[335]

Der Satz von Wilson[336] ist eigentlich das gesuchte Primzahlkriterium schlechthin, und würde theoretisch die gesuchte Lösung des Primzahlproblems darstellen, wenn die Berechnung von n! praktisch nicht „ungelöst“ bzw. nicht zu umfangreich[337] wäre:

„Satz von Wilson. Falls p eine Primzahl ist, so gilt

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

[334] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff; Pieper 52 ff.
[335] Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.
[336] Pieper 52 ff; Kowol 49 ff, 136 f; Baxa 2 ff.
[337] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

[…] Der Satz von Wilson stellt zugleich eine Charakterisierung der Primzahlen dar. Wenn nämlich N > 1 eine zerlegbare natürliche Zahl ist, etwa N = nm mit 1 < m, n < N – 1, so ist m ein Teiler von N und (N – 1)!, und damit (N – 1)! ≢ – 1 (mod N).

Allerdings hat Wilsons Charakterisierung der Primzahlen keine praktische Bedeutung, wenn es darum geht, N auf Primalität hin zu testen. Denn es ist kein Algorithmus bekannt, der N! schnell (z. B. in log N Schritten) berechnen könnte."[338]

Da es jedoch neue wissenschaftliche Taschenrechner mit der Taste n! gibt, dürfte der bisherige Einwand nicht mehr gelten, und so könne die Primzahlproblematik als gelöst angesehen werden[339], zumal es mathematische Software gibt, die sehr wohl die Rechenkapazität haben:

---

[338] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f, 241.

[339] Pieper 52 ff; vgl Wikipedia, Seite „Wilson-Primzahl". In: < URL >: „**Wilson-Primzahlen** (nach Sir John Wilson) sind Primzahlen, für die eine stärkere Form des Satzes von Wilson gilt.

Der Satz von Wilson besagt, dass für jede Primzahl p gilt:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

(für die Notation *siehe* Fakultät (Mathematik) sowie Kongruenz (Zahlentheorie)).

Eine Primzahl p heißt *Wilson-Primzahl*, wenn sogar

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^2}$$

gilt. Eine äquivalente Formulierung ist: p ist eine Wilson-Primzahl, wenn

$$\frac{(p-1)! + 1}{p} \equiv 0 \ (mod\ p)$$

gilt. Die linke Seite, die nach dem Satz von Wilson eine ganze Zahl ist, wird in diesem Kontext auch als *Wilson-Quotient* $W(p)$ bezeichnet."

„Der Satz von Wilson lautet: Sei $p \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann ist p genau dann eine Primzahl, wenn $(p-1)! + 1$ durch p teilbar ist. Dabei bezeichnet $(p-1)!$ die Fakultät[340], also das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$.

Mit Hilfe des Begriffes der Kongruenz kann man den Satz auch so formulieren:

$$(p-1)! \equiv -1 \equiv p-1 \pmod{p} \Leftrightarrow p \text{ ist prim.}$$

Umgekehrt kann man mit dem Satz auch schließen: Ist $n \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl, so gilt

$$(n-1)! \equiv \begin{cases} n-1 \pmod{n}, & falls\ n\ Primzahl, \\ 2 \pmod{n}, & falls\ n = 4 \\ 0 \pmod{n} & sonst. \end{cases}$$

Ist also $n > 4$ und $(n-1)!$ nicht durch n teilbar, so ist n eine Primzahl. Ist $(n-1)!$ aber durch n teilbar, so erhält man aus dem Satz von Wilson die Information, dass n zusammengesetzt ist, *ohne eine konkrete Faktorisierung $n = ab$ mit $a, b \neq 1$ zu kennen*. Allerdings ist der Rechenaufwand für die Fakultät nicht geringer als Probedivisionen.

Geschichte

Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte.

Verallgemeinerungen

[340] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

Es gilt allgemein:

$$\prod_{\substack{1\le a\le m\\(a,m)=1}} a \equiv \begin{cases} -1 \pmod m, & wenn\ m = 4, p^a, 2p^a, \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 \pmod m & sonst. \end{cases}$$

Eine leichte Verallgemeinerung des Satzes von Wilson lautet:

Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ ist genau dann Primzahl, wenn für alle $1 \le n \le p$

$$(n-1)!(p-n)! \equiv (-1)^n \bmod p$$

gilt."[341]

Die Folge 6n ± 1 der Primzahlen lässt sich mit gekoppelten Schwindungen[342] wo die Dämpfungskurve der Schwindungen analog mit der Eulerschen Zahl berechnet werden[343], so ähnlich wie die Anzahl der Primzahlen – im Primzahlsatz – abnehme[344]. Diese Periodizität ist analog der Periode Pi in der Eulerschen Identität[345], die von Schulbücher und einem Teil der Fachliteratur verschweigen oder gar expressis verbis ausschließen[346], aber für Kenner einen besonderen Zugang darstellt[347].

[341] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.
[342] Bergmann/Schäfer I (1975) 195 ff.
[343] Bergmann/Schäfer I (1975) 189 ff.
[344] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f; Padberg 80.
[345] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Arndt/Haenel 13; Prachar 61 ff.
[346] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.
[347] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >

Die Primzahlformel $\sqrt{24n+1} = p$ ist eine Abwandlung oder Ableitung der Primzahlformel im Satz von Wilson[348] (n – 1)! + 1 ≡ 0 (mod n), der von Clement auf Primzahlzwillinge 4[(n – 1)! + 1] + n ≡ 0 [mod n (n + 2)], n > 1) ausgedehnt wurde[349]. Die Kongruenz a² ≡ 1 (mod p) für ganzes a gilt genau dann, wenn entweder a ≡ 1 (mod p) oder a ≡ – 1 (mod p) zutrifft, und man kann bei p ≥ 5 die Menge der Zahlen 2, 3, …, p – 2 in ½(p – 3) Paare zueinander modulo p reziproker Partner zerlegen, so dass 3·3·…·(p – 2) ≡ 1 (mod p) gilt[350]. In n! sind die Perioden 6 ±1 = 3! ± 1 und 24n + 1 = 4! + 1 implizit berücksichtigt[351], denn 3! = 1·2·3 = 6 und 4! = 1·2·3·4 = 24. So weit der Satz von Wilson als bewiesen gilt[352], erübrigt sich hier ein – weiterer – Beweis, zumal der Satz und quadratischer Beweis bereits Leibniz bekannt war[353] und ferner auf einen arabischen Mathematiker aus dem 11. Jahrhundert zurückgeht so dass der Satz von Wilson lediglich wieder entdeckt wurde[354].

Die Folge p² = 24n + 1 ist also eine Ableitung vom Satz von Wilson[355], bzw. ist dessen Beweis als a² ≡ 1 (mod p) für ganzes a, und eine echte und vollständige Primzahlformel für Ergebnisse mit ganzen

---

[348] Pieper 52 ff.
[349] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.
[350] Bundschuh 102 f.
[351] Weisstein, Factorial, in: < URL >: „So, for example, 4! = 4·3·2·1 = 24. An older notation for the factorial is |n (Mellin 1909; Lewin 1958, p. 19; Dudeney 1970; Gardner 1978; Conway and Guy 1996).“
[352] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.
[353] Bundschuh 102 f; Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.
[354] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >: „Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte.“
[355] Pieper 52 ff.

Zahlen[356]. So kann das Ergebnis der Forschung bestätigt werden, dass der Satz von Wilson[357] eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, dass eine Zahl > 1 eine Primzahl ist, oder nicht[358], und der Kontrollbeweis vom Satz von Wilson in der quadratischen Form ebenfalls eine vollkommene und vollständige, also die Primzahlformel schlechthin, sei[359].

„*Satz. Sei p eine Primzahl. Die quadratische Kongruenz*

(1) $X^2 \equiv -1 \pmod{p}$

ist lösbar genau dann, wenn $p \not\equiv 3 \pmod 4$ *ist. Insbesondere hat (1) bei p = 2 die eindeutige Lösung 1 modulo 2; bei* $p \equiv 1 \pmod 4$ *hat (1) genau die modulo p verschiedenen Lösungen* $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ *und* $-\left(\frac{p-1}{2}\right)!$.

Beweis. Bei p = 2 wird (1) offenbar durch jede ungerade, aber keine gerade Zahl gelöst. Ist $p \equiv 1 \pmod 4$, so wird

[356] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl m > 1 ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz $(m-1)! \equiv -1 \pmod m$ besteht. […] die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod p$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod p$ oder $a \equiv -1 \pmod p$ zutrifft […] Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den Wilsonschen Satz bereits vor 1683 gekannt haben muss. Publiziert wurde das Resultat offenbar zuerst von E. Warig (Meditationes Algebraicae, Cambridge 1770), der es seinem Schüler J. Wilson zuschrieb. Erst J. L. Lagarange (Oeuvres III, 423-438) scheint dann 1771 wirklich einen Beweis für den Wilsonschen Satz gefunden zu haben. Der angegebene Beweis geht auf Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 77) zurück. […] Der Satz von Wilson liefert ersichtlich eine notwendige und hinreichende Bedigung dafür dass eine ganze Zahl m > 1 Primzahl ist."
[357] Pieper 52 ff.
[358] Bundschuh 103.
[359] Bundschuh 102 f.

(2) $$\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 \equiv -1\ (mod\ p)$$

behauptet, was dann die Lösbarkeit von (1) zeigt. Modulo p ist nämlich nach Wilsons Satz

$$-1 \equiv (p-1)! = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \prod_{j=1}^{(p-1)/2} (p-j) \equiv (-1)^{(p-1)/2} \left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)!^2$$

Wenn man zuletzt p ≡ 1 (mod 4) berücksichtigt.

Wird umgekehrt (1) von einem ganzen x bei ungerader Primzahl p gelöst, so gilt nach dem ‚kleinen' Fermatschen Satz

$$1 \equiv x^{p-1} = (x^2)^{(p-1)/2} = x^{p-1} = (-1)^{(p-1)/2} \text{ (mod p).}$$

Wegen p ≥ 3 muss hier die Zahl rechts gleich 1 sein, was p ≡ 1 (mod 4) nach sich zieht."[360]

Die Ausweitung durch Umrechnung Wilsonschen[361] Satzes auf Primzahlzwillinge durch Clement[362] (n und n + 2 sind dann und nur dann Primzahlzwillinge, wenn 4[(n – 1)! + 1] + n ≡ 0 [mod n (n + 2)], n > 1) und deren Verallgemeinerung (Zahlenpaar n, n + k (n > k > 0, k gerade)) durch Tkačev, leitet zu der Eulerschen Formel n² + n + 41 = p, über, die noch von Euler auf n² + n + 1, und zu n² + n + k

[360] Bundschuh 103.
[361] Pieper 52 ff.
[362] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

verallgemeinert wurde[363], was den Blick auf die negative Minimal-Form $n^2 - n - 1 = 0$ eröffnet, die nur eine Lösung mit $n = (1 + 5^{1/2})/2$ hat, wie die Glieder der Fibonacci-Folge[364]. Die Fibonacci-Folge wiederum bildet die goldene Spirale[365], die ein Spezialfall der von Euler erschlossenen logarithmischen Spirale ist[366], so dass damit der Übergang von der goldenen Zahl Fibonaccis zu der Eulerschen Zahl, und von dort der Übergang zu den irrationalen und reellen Zahlen[367] wie Pi, gezeigt werde[368], und damit deren Rückkoppelung an die Primzahlen[369].

Bisherige Lösungsansätze unterschiedlicher Folgen lassen sich auf einen gemeinsamen Nenner bringen: Angefangen bei 2n – 1, zu 4n + 1 und 6n ± n über 15n und 24n bis hin zu 30n, 36n, 60n sowie 210n, oder ausgehend von 24n für n^2 bis 240n für n^4 und 480n für n^8, Und bis 210n, 5040n und höher. Analog ist der Übergang von $a^2 + b^2$ Fermats zu Eulers $a^2 + nb^2$ und daraus zu $n^2 + n + k$, von wo aus der Übergang zu e mehr oder minder gleitend ist**[370]**. Nach der Auffindung einer Prim-

[363] Stark 2; Bundschuh 71, 283; Sautoy 63; Müller-Stach/Piontkowski 3; Timerding 13 f, 20 ff; Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.
[364] Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f; Timerding 13 f, 20 ff.
[365] Riesenhuber 127 ff, 152 ff; Beuteilspacher/Petri 16; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 18 f, 24 f, 32 ff.
[366] Riesenhuber 127 ff, 152 ff; Schönhacker, Die Zahl e, S. 16 ff, 40: < URL >; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 35 ff.
[367] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff; Lang/Pucker 595 ff.
[368] Arndt/Haenel 13.
[369] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >
[370] Wikipedia, „Primzahlvierling“, In: Wikipedia < URL >; Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.

zahlformel, also eigentlich ab dem Satz von Wilson[371], endet die Abgehobenheit der mit dem natürlichen Logarithmus[372] Eulers bis dahin „schwebenden" Primzahlsatz[373],

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

und kann mit der Primzahlzwillingskonstante (0,66016…) von Hardy und Littlewood

$$\pi_{2k}(x) \sim 2C_2 \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{\substack{p>2 \\ p|k}} \frac{p-1}{p-2'}$$

gestützt werden, bzw. gliedert sich in die „Folge" der Ableitungen ein[374]. Über den Primzahlsatz[375] auf Grundlage des natürlichen Logarithmus[376], kann auf die dieser zugrundeliegende Eulersche Zahl e

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

und von e = 1/k! auf den Satz von Wilson[377] (n – 1)! + 1 ≡ 0 (mod n) zurück, und auf die Riemannsche Zetafunktion ζ(s) = 1/n^s, geschlossen werden[378],

---

[371] Pieper 52 ff.

[372] Prachar 3; vgl Rohringer 42 f; Remmert/Ullrich 73; Bartholomé/Rung/Kern 83 f; Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 8.

[373] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f; Padberg 80.

[374] Ribenboim/Richstein/Keller 271 f.

[375] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f.

[376] Prachar 3; vgl Rohringer 42 f; Remmert/Ullrich 73; Bartholomé/Rung/Kern 83 f; Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 8.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

die 1949 für A. SELBERG und P. ERDÖS als Hilfe zum Beweis des Primzahlsatzes[379] diente. Denn der Satz von Wilson[380] rechnet zunächst mit (m – 1)! ≡ –1 (mod m) und dann mit $a^2 \equiv 1 \pmod p$, woraus die Analogie bzw. Entsprechung zu der jeweils reziproken form $1/s^n$ und 1/n! ersichtlich sei[381]. Die Summe lässt sich als Potenzreihe der Primzahlen $1/p^s$

$$\zeta(s) = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\dots} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \lim_{x\to\infty} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\leqq x}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

d. h. als Euler-Produkt schreiben[382].

Der Lösungsansatz war, dass im Gegensatz zum Postulat der Unendlichkeit[383] als Ausgangsposition und Voraussetzung der Rechnung[384], die Folge der Primzahlen als endlich vorausgesetzt wurde[385]. Mit den bisher Gesagten ist der Satz von Wilson[386] noch nicht an der Grenze seiner Kapazität:

---

[377] Pieper 52 ff.
[378] Remmert/Ullrich 73 f; Trost 62 ff; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >; Landau II 723 ff.
[379] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f; vgl Aigner/Ziegler, Das BUCH der Beweise, in: < URL >; Padberg 80.
[380] Pieper 52 ff.
[381] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl m > 1 ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz (m – 1)! ≡ –1 (mod m) besteht."
[382] Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: Wikipedia URL < URL >.
[383] Vgl Meschkowski 11 ff.
[384] Schwarz, Wolfgang (1969) 135: „Euklids Beweis der Unendlichkeit von ***P*** ist – von wenigen Spezialfällen abgesehen – nicht geeignet, die Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Folgen zu zeigen."

„Setzt man nun für nicht negative ganze Zahlen r, s s * r = max(s – r, 0) und z(s, r) gleich dem kleinsten nicht negativen Rest bei der Division von s durch r, sowie z(s, 0) = s, dann stellt die Formel

$$f(n) = \sum_{s=0}^{n^2} \left(1 \cdot \left(\left\{ \sum_{r=0}^{s} z((r*1)!^2, r) \right\} \cdot n \right) \right)$$

eine Primzahlformel dar. Genauer gilt, daß *f(n)* für n = 1, 2,… genau alle Primzahlen als Werte annimmt, und zwar ist sogar gerade die n-te Primzahl p_n gleich *f(n)*. Wählt man also n = 5 so liefert die Formel gerade die 5. Primzahl 11. Wir wollen auf sie aber nicht näher eingehen, sonder das zugrundeliegende Prinzip an der folgenden, etwas handlicheren Formel erläutern, die ebenfalls auf dem Wilsonschen Satz beruht. Sie lautet:

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left[\left(\frac{1}{1 + \pi(m)} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

mit

$$\pi(m) = \sum_{j=2}^{m} \left[\frac{(j-1)! + 1}{j} - \left[\frac{(j-1)!}{j} \right] \right], falls\ m \geq 2\ und\ \pi(1) = 0,$$

wobei $[x]$ für $x \in \mathbb{R}$ die nächstkleinere ganze Zahl an *x* bedeutet.“[387]

---

[385] Landau I 234 ff.
[386] Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff; Bornstein u. a. 381.
[387] Kowol 49 f.

Die Folge n = p + [(p – 1)/6]

Da hier nachstehend die Quadrate als $n^2 - m^2$ mit $m = n - 1$ berechnet werden, ergibt die Formel

$$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1,$$

oder[388]

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1,$$

oder in dem hier nicht berücksichtigten Fall

$$n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n + 1) + 1$$

sollen zunächst analytisch alle möglichen Endziffer in Betracht gezogen werden.

1 + 4 = 5	4 + 1 = 5	9 + 1 = 10	6 + 1 = 7	5 + 1 = 6
1 + 9 = 10	4 + 4 = 8	9 + 4 = 13	6 + 4 = 10	5 + 4 = 9
1 + 6 = 7	4 + 9 = 13	9 + 9 = 18	6 + 9 = 15	5 + 9 = 14
1 + 5 = 6	4 + 6 = 10	9 + 6 = 15	6 + 6 = 12	5 + 6 = 11
1 + 1 = 2	4 + 5 = 9	9 + 5 = 14	6 + 5 = 11	5 + 5 = 10

[388] Trost 28 f.

Demnach wären grundsätzlich alle Endziffern – zumal für ungerade Zahlen – möglich. Im Sinne des weiter oben gezeigten Gesetzes ist einerseits die Auswahl an Endziffern 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 begrenzt, und andererseits die Möglichkeiten der Kombination begrenzt. Um die möglichen Endziffern bei $n^2 – (n – 1)^2$ zu berechnen, müsse dort, wo die zweite Endziffer größer als die erste ist, eine Zehnerstelle eingeschoben werden.

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0

$$
\begin{aligned}
10 - 1 &= 9 \\
11 - 4 &= 7 \\
14 - 9 &= 5 \\
9 - 6 &= 3 \\
6 - 5 &= 1 \\
15 - 6 &= 9 \\
16 - 9 &= 7 \\
9 - 4 &= 5 \\
4 - 1 &= 3 \\
1 - 0 &= 1
\end{aligned}
$$

In dieser Folge kommen also der Reihe nach alle ungerade Endziffern in beide Richtungen vor.

Bei der Addition von $n^2 + m^2$ für $m = n + 1$ kommen – in der schematischen Darstellung – folgende Endziffer vor:

$$0 + 1 = \mathbf{1}$$

1 + 4 = **5**
4 + 9 = 1**3**
9 + 6 = 1**5**
6 + 5 = 1**1**
5 + 6 = 1**1**
6 + 9 = 1**5**
9 + 4 = 1**3**
4 + 1 = **5**
1 + 0 = **1**

Die Endziffern 1, 5, 3, 5, 1, 1, 5, 3, 5, 1, kommen also in dieser Reihenfolge und Dichte vor. Es sind zwar auch alle ungeraden Zahlen, allerdings nur 1, 3, 5, aber die Endziffer 7 und 9 fehlen. In der Reihe $n^2 + m^2$ haben die Endziffern den Zyklus 1, 5, 3, 5, 1 und dann wiederholt sich alles wieder, 1, 5, 3, 5, 1, und wieder

1, 5, 3, 5, 1,
1, 5, 3, 5, 1,
1, 5, 3, 5, 1,
1, 5, 3, 5, 1
….

Das bedeutet, dass nicht alle Endziffern vorkommen, und das kann als Ansatz zur Erklärung der Primzahlen gelten[389], die so keinen Teiler haben können: In einer Primzahl darf in 6n + 1 das n nicht 4 oder 9 und in 6n – 1 nicht 1 und 6 als Endziffer haben.

[389] Christof 4.

n^2	$(n + 1)^2 – n^2 = 2n + 1$	$(n + 1)^2 – n^2 = 2n + 1$	$n^2 + (n + 1)^2$	$(n + 1)^2 – n^2 = 4n$
$1^2 = 1$	$4 – 1=3$	$4 + 1=5$	$0^2 + 1^2=1$	$5 – 1=4=1·4$
$2^2 = 4$	$9 – 4=5$	$9 + 4=13$	$1^2 + 2^2=5$	$13 – 5=8=2·4$
$3^2 = 9$	$16 – 9=7$	$16 + 9=25$	$2^2 + 3^2=13$	$25 – 13=12=3·4$
$4^2 = 16$	$25 – 16=9$	$25 + 16=41$	$3^2 + 4^2=25$	$41 – 25=16=4·4$
$5^2 = 25$	$36 – 25=11$	$36 + 25=61$	$4^2 + 5^2=41$	$61 – 41=20=5·4$
$6^2 = 36$	$49 – 36=13$	$49 + 36=85$	$5^2 + 6^2=61$	$85 – 61=24=6·4$
$7^2 = 49$	$64 – 49=15$	$64 + 49=113$	$6^2 + 7^2=85$	
$8^2 = 64$	$81 – 64=17$	$81 + 64=145$	$7^2 + 8^2=113$	
$9^2 = 81$	$100 – 81=19$	$100 + 81=181$	$8^2 + 9^2=145$	
$10^2 = 100$	$121 – 100=21$		$9^2 + 10^2=181$	
$11^2 = 121$	$144 – 121=23$		$10^2 + 11^2=221$	
$12^2 = 144$	$169 – 144=25$		$11^2 + 12^2=265$	
$13^2 = 169$			$12^2 + 13^2=313$	
$14^2 = 196$			$13^2 + 14^2=365$	
$15^2 = 225$			$14^2 + 15^2=421$	
$16^2 = 256$			$15^2 + 16^2=481$	
$17^2 = 289$			$16^2 + 17^2=545$	
$18^2 = 324$			$17^2 + 18^2=613$	
$19^2 = 361$			$18^2 + 19^2=685$	
$20^2 = 400$			$19^2 + 20^2=761$	
$21^2 = 441$			$20^2 + 21^2=841$	
$22^2 = 484$			$21^2 + 22^2=925$	
$23^2 = 529$			$22^2 + 23^2=1013$	
$24^2 = 576$			$23^2 + 24^2=1105$	
$25^2 = 625$			$24^2 + 25^2=1201$	

$26^2 = 676$			$25^2 + 26^2 = 1301$	
$27^2 = 729$			$26^2 + 27^2 = 1405$	
$28^2 = 784$			$27^2 + 28^2 = 1513$	
$29^2 = 841$			$28^2 + 29^2 = 1625$	
$30^2 = 900$				
$31^2 = 961$				
$32^2 = 1024$				
$33^2 = 1089$				
$34^2 = 1156$				
$35^2 = 1225$				
$36^2 = 1296$				
$37^2 = 1369$				
$38^2 = 1444$				
$39^2 = 1521$				
$40^2 = 1600$				
$41^2 = 1681$				
$42^2 = 1764$				
$43^2 = 1849$				
$44^2 = 1936$				
$45^2 = 2025$				
$46^2 = 2116$				
$47^2 = 2209$				
$48^2 = 2304$				
$49^2 = 2401$				
$50^2 = 2500$				
$51^2 = 2601$				
$52^2 = 2704$				

$53^2 = 2809$				
$54^2 = 2916$				
$55^2 = 3025$				
$56^2 = 3136$				
$57^2 = 3249$				
$58^2 = 3364$				
$59^2 = 3481$				
$60^2 = 3600$				
$61^2 = 3721$				
$62^2 = 3844$				
$63^2 = 3969$				
$64^2 = 4096$				
$65^2 = 4225$				
$66^2 = 4356$				
$67^2 = 4489$				
$68^2 = 4624$				
$69^2 = 4761$				
$70^2 = 4900$				
$71^2 = 5041$				
$72^2 = 5184$				
$73^2 = 5329$				
$74^2 = 5476$				
$75^2 = 5625$				
$76^2 = 5776$				
$77^2 = 5929$				
$78^2 = 6048$				
$79^2 = 6241$				

$80^2 = 6400$				
$81^2 = 6561$				
$82^2 = 6724$				
$83^2 = 6889$				
$84^2 = 7056$				
$85^2 = 7225$				
$86^2 = 7396$				
$87^2 = 7569$				
$88^2 = 7744$				
$89^2 = 7921$				
$90^2 = 8100$				
$91^2 = 8281$				
$92^2 = 8464$				
$93^2 = 8649$				
$94^2 = 8836$				
$95^2 = 9025$				
$96^2 = 9216$				
$97^2 = 9409$				
$98^2 = 9604$				
$99^2 = 9801$				
$100^2 = 10.000$				
…				

So weit es einerseits feststeht, dass $p = 6n \pm 1$, und andererseits, dass in der Reihe nicht alle Glieder prim sind, aber dafür das Produkt zweier Primzahlen $P_z = p_x \cdot p_y = (6x + 1) \cdot (6y + 1)$ sein

müssen, kann die Formel für Nichtprimzahlen[390] auf eine Primzahlformel zurückgeführt werden. Zurück verfolgt wird $P_z = p_x \cdot (6y + 1) = p_x 6y + p_x$, wobei px nochmals in (6x + 1) zerlegt werden kann: $p_x 6y + (6x + 1)$.

$n = p + [(p - 1)/6]$

$p_x = 6m + 1;\ m = p_y n + [(p_y - 1)/6]$
$\Rightarrow p_x = 6\{p_y n + [(p_y - 1)/6]\} + 1 = 6p_y n + p_y - 1 + 1 = 6p_y n + p_y = p_y(6n + 1)$

$p_x = 6m - 1;\ m = p_y n - [(p_y - 1)/6]$

$\Rightarrow p_x = 6\{p_y n - [(p_y - 1)/6]\} - 1 = 6p_y n - p_y + 1 - 1 = 6p_y n - p_y = p_y(6n - 1)$
…

$$P_x = 6\left[p_y m - \frac{5p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_x = 6p_y m - 6\left[\frac{5p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_x = 6p_y m - (5p_y - 1) - 1$$

$$P_x = 6p_y m - 5p_y$$

$$P_x = p_y(6m - 5)$$

[390] Christof 4 f.

In einer anderen, gleichwertigen Version:

$$P_x = 6\left[p_y m - \frac{p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_x = 6p_y m - 6\left[\frac{p_y - 1}{6}\right] - 1$$

$$P_x = 6p_y m - \left(p_y - 1\right) - 1$$

$$P_x = 6p_y m - p_y \ + \ 1 - 1$$

$$P_x = 6p_y m - p_y$$

$$P_x = p_y(6m - 1)$$

$$P_x = p_y p_z$$

Die Folge (n² – n)/2

So wie 1·2·3·4 = 4! = 24 ist so ist analog 1 + 2+ 3 + 4 = 10. Wenn die Zahlen pyramidenförmig[391] als Dreieck angeordnet werden[392], werden die Quersummen anschaulich:

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5 6 7
…

Oder

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28

[391] Meschkowski 14 ff.
[392] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

…

Das lässt sich auch mit Gaußschen Summenformel[393] ausdrücken n(n – 1)/2. Wenn man zwei Dreiecke dieser Art zu einem Quadrat ergänzt, bekommt na die schon bekannte quadratische Formel n(n – 1).

$$\Delta_{n-1} + \Delta_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

Die Fibonacci-Zahlen lassen sich im Pascalschen Dreieck darstellen[394]

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Quadratzahlen lassen sich auch folgendermaßen darstellen: 1+3+5+7+9+11+13… Die Kette beginnt also immer bei 1 und wird um +2 erhöht. So ist z. B.: 16 = 1+3+5+7 und 36 = 1 + 3 + 5 + 7

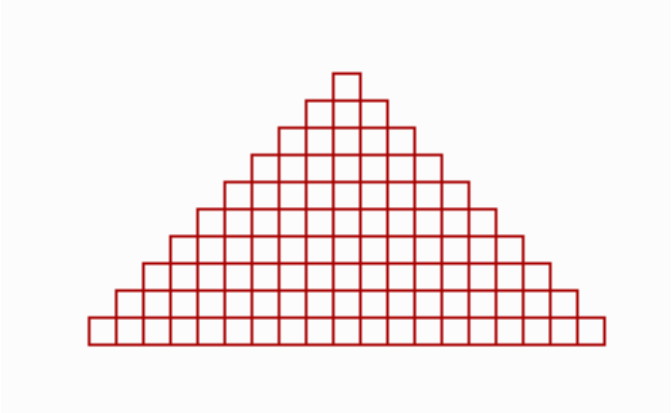
[393] Wikipedia, Dreieckszahl, in: < URL >.
[394] Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 7.

+ 9 + 11. Die letzte (= größte) Zahl in der Kette lässt sich berechnen[395]. Bei x = 36 ist der letzte Wert 11 gewesen. Es gilt "letzter Wert" $= 2\sqrt{x} - 1$.

Bei der Primfaktordarstellung werden 2 Primzahlen multipliziert wie: 3·13 = 39. Gegeben sei also die Zahl 39. Nun gilt aber außer 3·13 = 39, auch (8² - 5²) = 39. Sei der größere Teiler (13) = T_groß. Der kleinere Teiler (3) = T_klein. Die größere (8) Quadratzahl = Q_groß. Und die kleinere (5) Quadratzahl = Q_klein. Dann gilt:

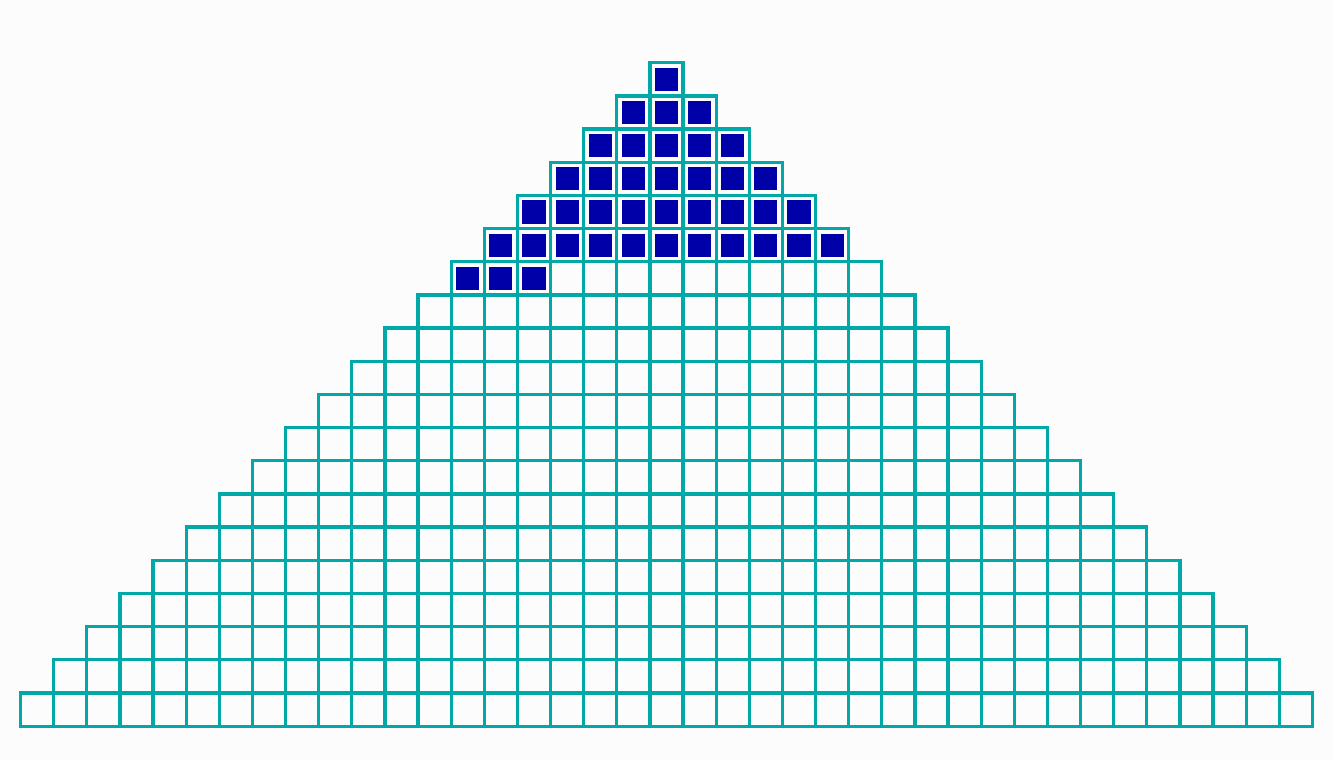
Q_klein = (T_groß - T_klein)/2
T_groß = Q_groß + Q_klein
T_klein = Q_groß - Q_klein,
usw…

Die Funktionsweise wird anhand eines Dreiecks verständlich[396].



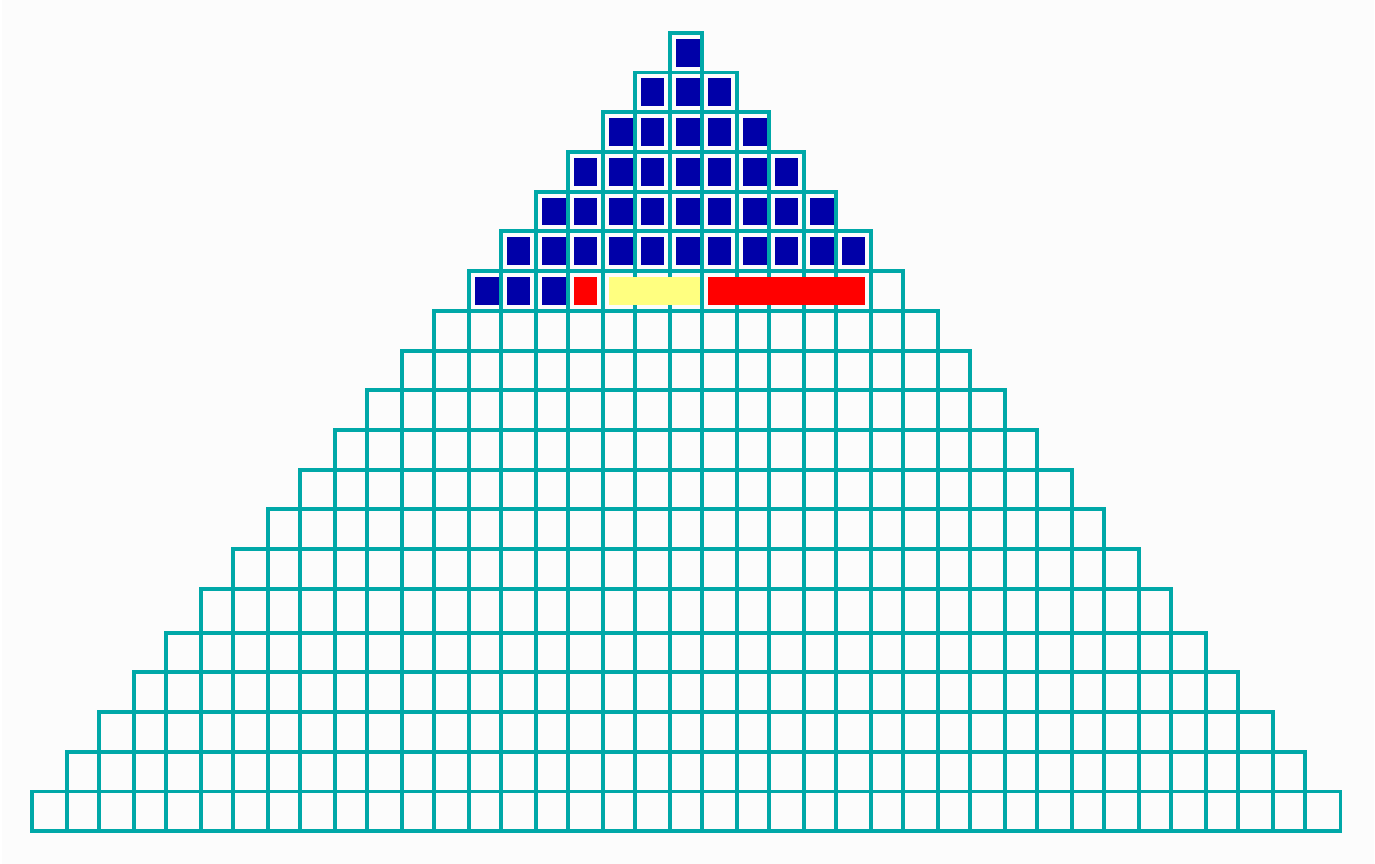
[395] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.
[396] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

Man sieht dieses Dreieck erfüllt die Quadratzahlenform 1+3+5+7+9+11+… Da jede Horizontale um +2 erhöht wird. Hier sieht man auch sehr deutlich, dass eine Quadratzahl, genau die Höhe (von oben nach unten) zum Quadrat beträgt. Die Anzahl der Kästchen pro Horizontalen beträgt (2*Höhe) – 1. Wobei auch hier wieder die Höhe von oben nach unten gilt. Der Primfaktor 39 wird in dieses Dreieck "gefüllt":



Dies bedeutet demnach $39 = 6^2 + 3$.

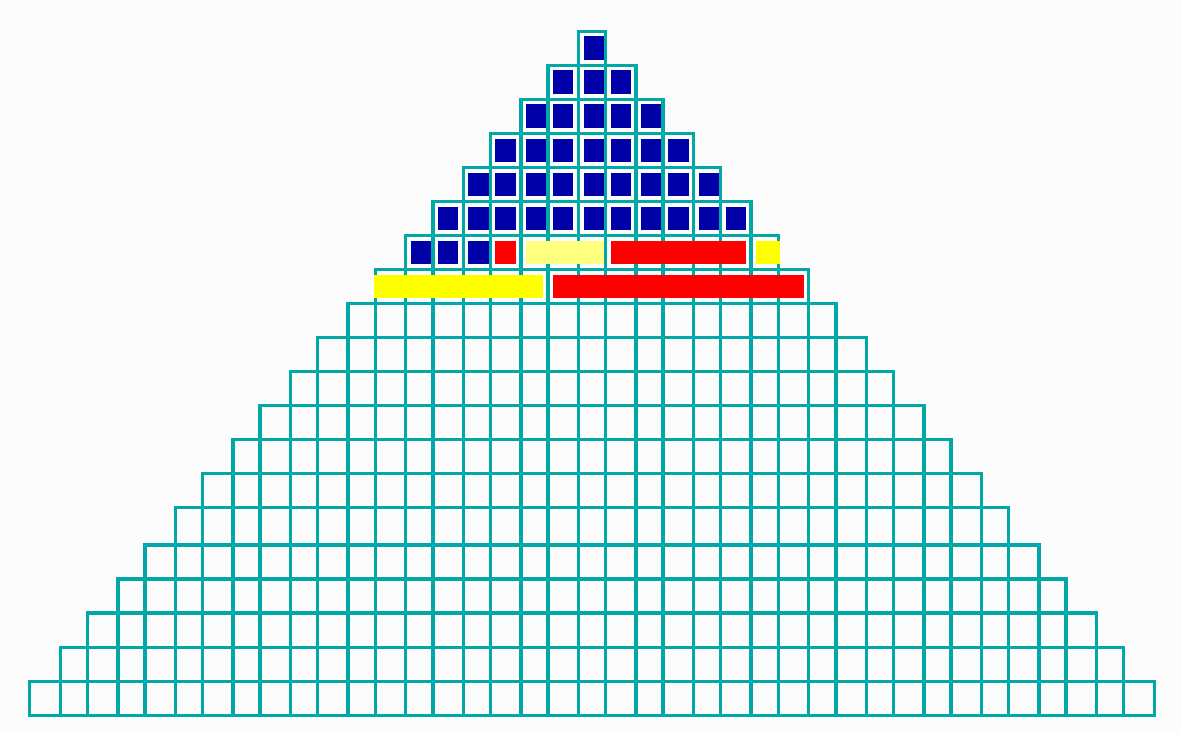
Die 6 steht für die Höhe der Horizontalen von oben nach unten. + 3 ist der Rest, welcher übrig geblieben ist. (Von der größtmöglichen Quadratzahl zur 39). Da ja allgemein gilt: Primfaktor = $x^2 - y^2$, so gilt es nun mit der Auffüllung fortzufahren, und zwar solange bis die letzte Reihe ganz aufgefüllt ist[397] (kein Rest übrig bleibt). Und da die Auffüllung eine Quadratzahl sein muss, beträgt die Auffüllung folgende Form: +1+3+5+7+9+…



[397] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

Zur besseren Darstellung sind zur Auffüllung abwechselnd die Farben rot und gelb verwendet. 1 + 3 + 5 wurde also vorgenommen, man sieht aber, dass die letzte Horizontale den Rest 1 aufweist.

Also, muss man mit der Auffüllung fortfahren:



Jetzt ist die Auffüllung beendet, denn die letzte Horizontale ist ganz besetzt[398]. Zur Auffüllung wurde verwendet: +1 +3 +5 +7 +9. Aus diesen Informationen kann man die Teiler berechnen. Also 1+3+5+7+9 = 25 = 5². Die Höhe des ganzen Dreieckes beträgt h = 8. Also gilt h² – 5² = 39. Und

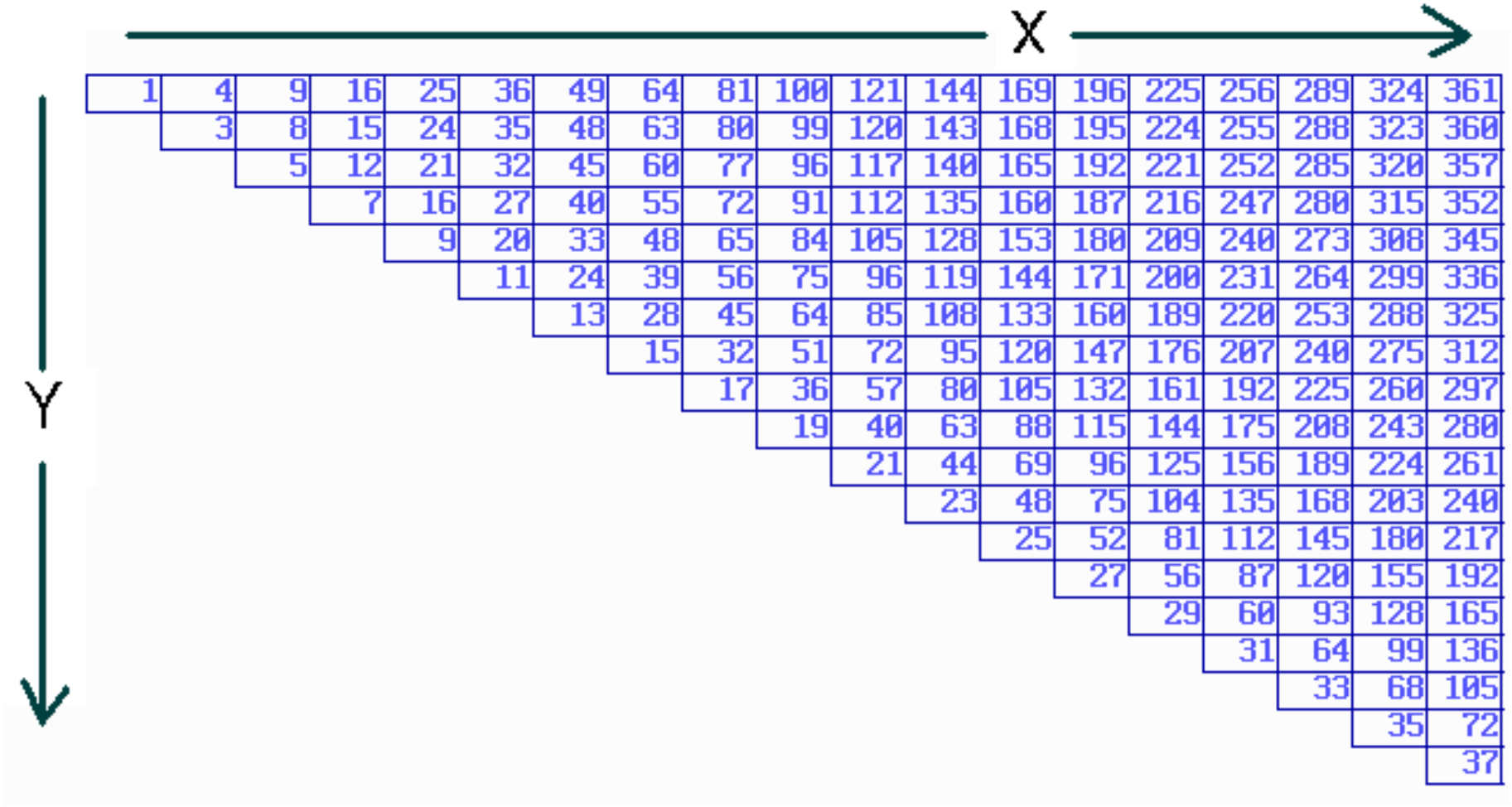
[398] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

die Teiler demnach: Teiler1 = h + 5 = 13, Teiler2 = h – 5 =3. Würde man berechnen können, wie-viel man zum auffüllen braucht, dann wäre man auch in der Lage, jeden beliebigen Primfaktor zu zerlegen.

TABELLENDARSTELLUNG:

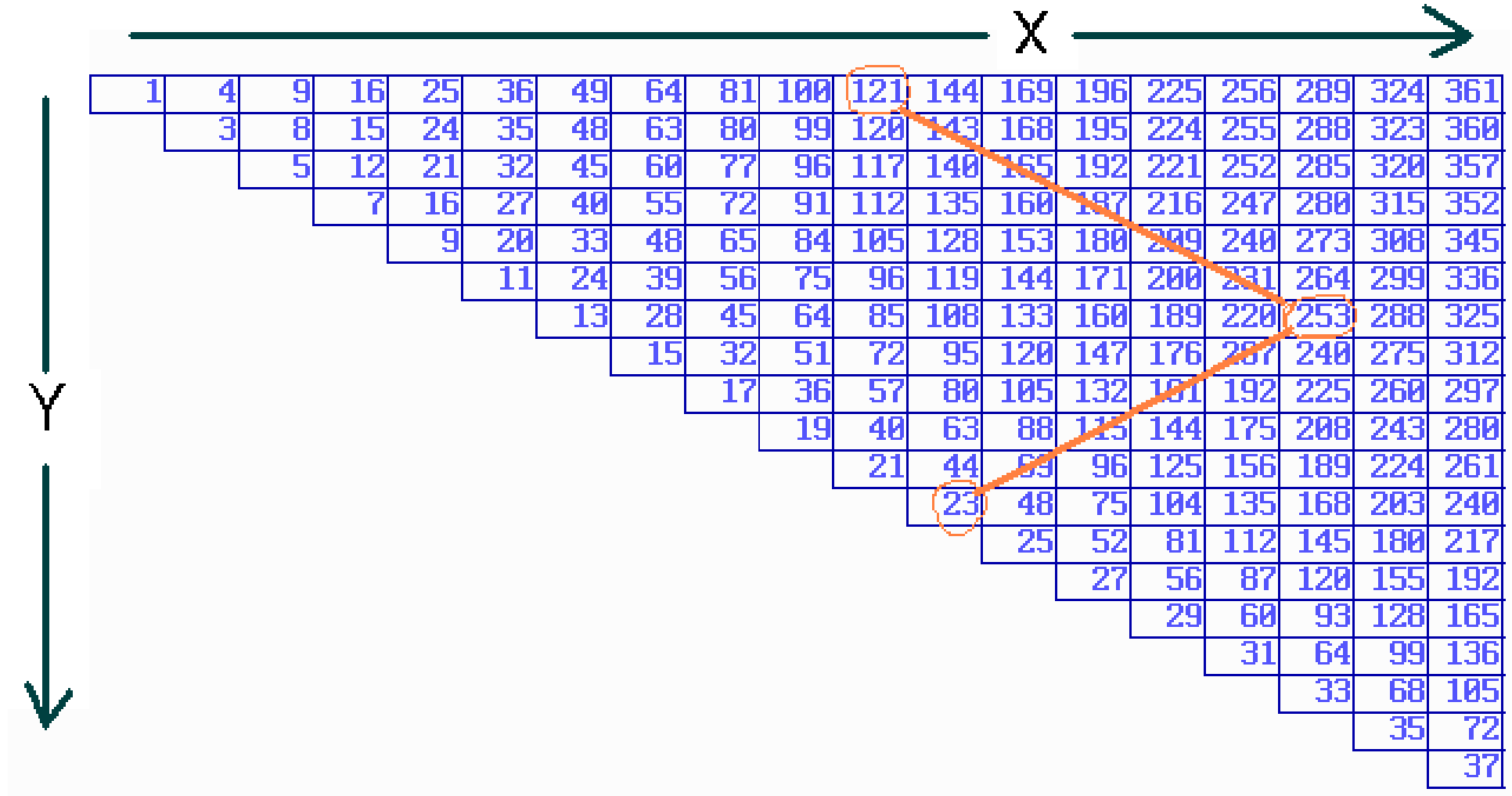
Wie die einzelnen Zahlen miteinander verflochten sind, zeigt die unten aufgeführte Tabelle[399].

[399] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.



<u>Als erstes die exakte Berechnung einer Zelle:</u> Die nachfolgenden Gesetze gelten immer[400].

[400] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.



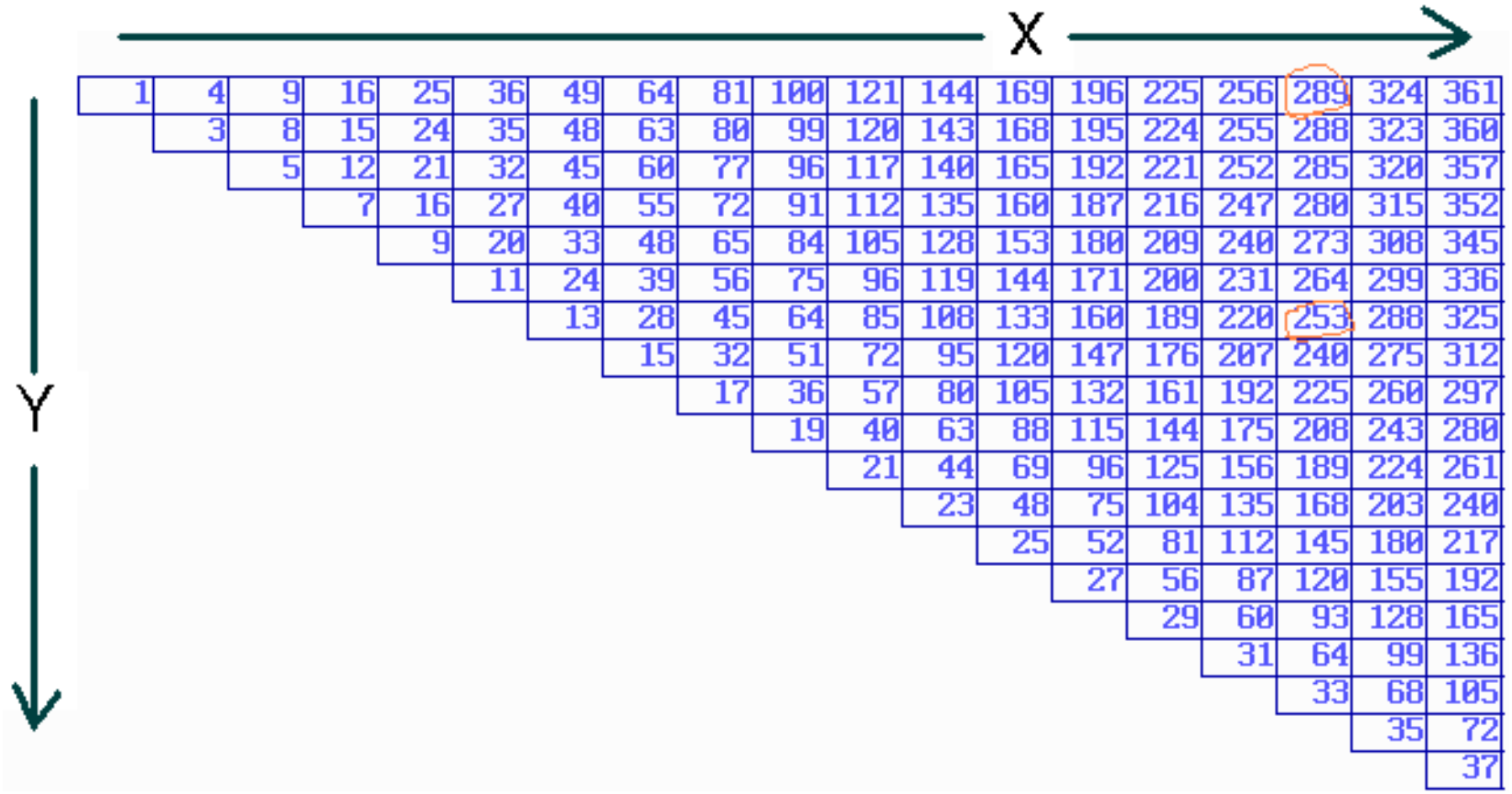
Die Besonderheiten der Tabelle:

ZellenWert = $x^2 - y^2$, wobei x bei 1 anfängt, aber y bei Null. Zellenwerte ≤ 0 werden nicht eingetragen. Bsp.: Die Zelle mit dem Wert 35 liegt also auf der Pos. X = 6 und Y = 1 (Pos (6/1)). Berechnet: $6^2 - 1^2 = 35$.

Die Teiler einer Zahl befinden sich in der letzten Zelle diagonal nach links-unten und diagonal nach links oben, wobei man bei der letzten Zelle diagonal links oben noch die Wurzel ziehen muss. Als Beispiel wurde oben der Primfaktor 253 gewählt. Seine Teiler lauten demnach 23 und 121^2: $23 \cdot 11 = 253$. Dieses System gilt für ALLE Primfaktoren. Nun gilt aber auch, wie bereits vorher gezeigt, dass 253 nicht nur $23 \cdot 11$ sondern auch $17^2 - 6^2$ ist. Und diese beiden Quadratzahlen sind auch in der Tabelle enthalten (Siehe nächstes Bild). Der Primfaktor 253 steht auf der X-Koordinate 17. Der Zahlenwert ganz oben in der Spalte beträgt also $17^2 = 289$. Also berechnet man bloß die Differenz: $289 - 253 = 36 = 6^2$. Damit ist gezeigt, dass $289 = 17^2 - 6^2$ gilt. Auch dies gilt in der Tabelle für ALLE Primfaktoren.

Noch eine kleine Besonderheit zu den Primfaktoren: Wie bereits vorher erklärt, lassen sich Quadratzahlen in der Form 1+3+5+7+9+… angeben. Bei den Primfaktoren ist dies auch der Fall, bloß dass die Kette NICHT bei 1, sondern bei einem anderen Wert anfängt. Der Anfangswert ist von Primfaktor zu Primfaktor unterschiedlich. Wenn man aber eine solche Darstellung für einen Primfaktor gefunden hat, so kann man auch schnell die Teiler bestimmen. So lautet die Darstellung für die Zahl 253 folgendermaßen: 13 + 15 + 17 +19 + 21 + 23 + 25 + 27 +29 + 31 + 33 = 253 (Die Kettenlänge bei einem Primfaktor ist immer UNGERADE). Der *kleinere Teiler* **ist die** *Kettenlänge* **selber (Hier 11).** Der *größere Teiler* **ist die Zahl genau in der** *Mitte* **der Kette (Hier 23).** $11 \cdot 23 = 253$: Auch dies gilt für ALLE Primfaktoren[401].

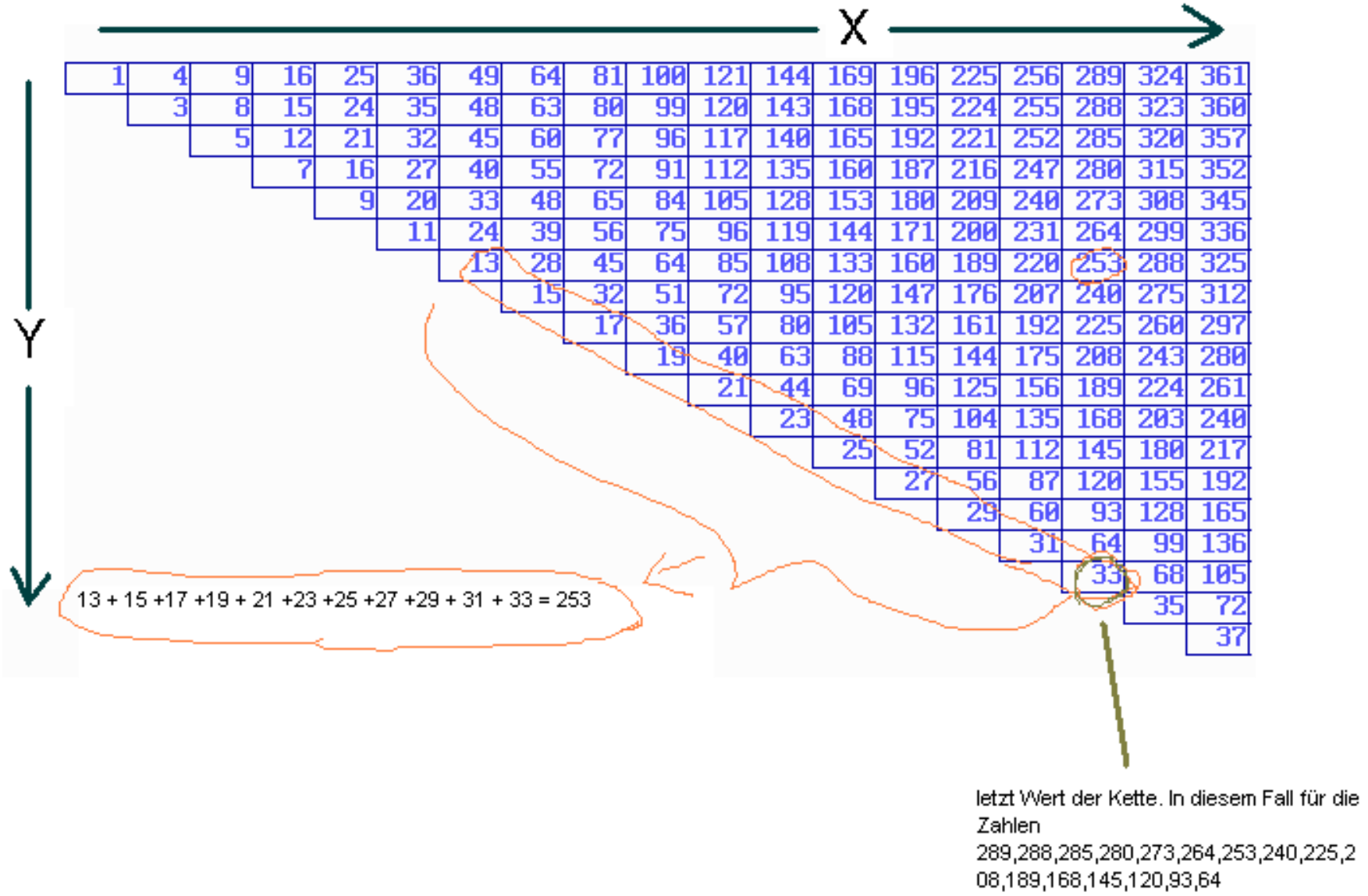
[401] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.



Nun ist es aber schwer herauszufinden an welcher Stelle die Kette anfängt, bzw. an welcher Stelle die Kette aufhört, oder wie lang die Kette sein wird (Natürlich vorausgesetzt die Teiler bzw. Quadratzahlen sind noch unbekannt). Aber auch dies kann man in der Tabelle entnehmen[402]. Denn der letzte Wert einer solchen Kette, steht immer ganz unten in der selben Spalte, in der sich der Primfaktor

[402] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

befindet. (siehe Bild unten).



ZUSAMMENFASSUNG:

Obwohl die Tabelle den Anschein macht, dass es nun sehr einfach wäre jeden Primfaktor zu zerlegen, so muss ich sagen dem ist nicht so. Denn den Standort einer Zelle kann man nicht so ohne weiteres herausfinden. Natürlich gibt es etliche "Optimierungen", die hier aber zu weit führen würden, (Bsp.: Statistische Analyse der Höhenunterschiede bis zur durchschn. Differenz von 2) und ich deswegen außer Betracht ziehe, da sie sehr kompliziert zu erklären sind[403]. Eine einfache Gleichung werde ich aber dennoch kurz aufzeigen: Primfaktor = $x^2 + 2xk$. Zur Berechnung des X muss man bloß die Mitternachtsformel verwenden, wobei vor der Wurzel dann nicht plusminus, sondern bloß addiert wird. Und das k wird dabei schrittweise um 1 erhöht. Bekommt man für x ein natürliches Ergebnis , dann ist man fertig. Und wie man sieht, steht das ***x*** dann für den ***kleineren Teiler***, und das ***k*** für die ***kleinere Quadratzahl***

Bsp.: $253 = x^2 + 2xk$
$253 = 11^2 + 2 \cdot 11 \cdot 6$
$253 = 253$

Für diese Primfaktorzerlegung hätte man also ohne Optimierung 6 Schritte benötigt. Was genau die Wurzel aus der kleineren Quadratzahl entspricht.

Wenn man die obige Methode ein bisschen abwandelt, dann ist auch Folgendes möglich: Geg. Primfaktor=253. Nun stellt man den Primfaktor durch Addition von 2 Zahlen dar, welche die Differenz untereinander 1 aufweisen.

[403] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

zahl_1 = (Primfaktor + 1)/2
zahl_2 = zahl1_1 – 1.

Dies ergibt: 127 und 126 (Die Differenz beträgt 1 => 127 + 126 = 253). Nun erhöht man die linke Zahl jeweils um 1 und gleichzeitig wird die rechte Zahl um 1 erniedrigt. Wenn eine der Zahlen dividiert durch die Differenz untereinander eine natürliche Zahl ergeben, dann ist man fertig (wobei man bei der Differenz 1 natürlich die Division auslässt, also erst beim 2. Schritt anfängt). – Weiter unten ausführlich gezeigt:

1.) 127 und 126 (Die Differenz beträgt 1 – es wird NICHT gerechnet).
2.) 128 und 125 (Die Differenz beträgt 3). 128/3) = 42.66 – Keine natürliche Zahl.
3.) 129 und 124 (Die Differenz beträgt 5). 129/5 = 25.8 – Keine Natürliche Zahl.
4.) 130 und 123 (Die Differenz beträgt 7). 130/7 = 18.57 – Keine Natürliche Zahl.
5.) 131 und 122 (Die Differenz beträgt 9). 131/9 = 14.55 -Keine Natürliche Zahl.
6.) 132 und 121 (Die Differenz beträgt 11). 132/11 = 12 **– Dies IST eine Natürliche Zahl.**

Also, ist man hier fertig[404]. Der erste Teiler ist dann entsprechend die Differenz (Hier 11). Den zweiten Teiler bekommt man dann folgendermaßen:

132/11 = 12
121/11 = 11

Addition der beiden Ergebnisse: 12 + 11 = 23. Also lauten die Teiler der Zahl 253 = 11·23.

[404] Pfaller, Primzahlen – Primfaktorzerlegung, in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

Die benachbarten Glieder der Folge $2n - 1$ stehen in Beziehung: Die Formel $n(n - 1)$ ist ein Spezialfall von $nm/(n - m)$ bei $m = 1$. In die Formel $x^2 - y^2$ eingesetzt bei $x = n$ und $y = n - 1$, nimmt Rekurs auf die Formel $2n - 1$.

$$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1.$$
$$n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n + 1) + 1$$

Das lässt sich analog mit $4n + 1$ zeigen: $4n^2 + (4n + 1)^2 = 20n^2 + 8n + 1$. Oder einfach mit den bei $n = 1$ mit den Zahlen 4 und 6 für $6n - 1$.

$4 \cdot 6/(6 - 4) = 24/2 = 12$
$4 \cdot 6/(6 + 4) = 24/10 = 12/5$

$2 \cdot 6/(6 - 2) = 12/4 = 3$
$2 \cdot 6/(6 + 2) = 12/8 = 3/2$

$2 \cdot 4/(4 - 2) = 4$
$2 \cdot 4/(4 + 2) = 8/6 = 4/3$

$30 \cdot 15/(30 - 15) = 30$
$30 \cdot 15/(30 + 15) = 10$

$30 \cdot 6/(30 + 6) = 5$
$30 \cdot 5/(30 + 5) = 4{,}285714286$
$30 \cdot 4{,}285714286/(30 + 4{,}285714286) = 3{,}75$
$30 \cdot 3{,}75/(30 + 3{,}75) = 3{,}33333333$
$3{,}33333333 \cdot 30 = 100$

$30 \cdot 6/(30 - 6) = 7{,}5$

30·7,5/(30 – 7,5) = 10
30·10/(30 – 10) = 15
30·15/(30 – 15) = 30
…

36·6/(36 + 6) = 5
36·5/(36 + 5) = 4,390243902
= 3,913043478
…

36·6/(36 – 6) = 7,2
36·7,2/(36 – 7,2) = 9
36·9/(36 – 9) = 12
36·12/(36 – 12) = 18
36·18/(36 – 18) = 36
36·36/(36 – 36) = 0

36·4/(36 – 4) = 4,5
36·4,5/(36 – 4,5) = 5,142857143
36·5,142857143/(36 – 5,142857143) = 6
36·6/(36 – 6) = 7,2
36·7,2/(36 – 7,2) = 9
36·9/(36 – 9) = 12
36·12/(36 – 12) = 18
36·18/(36 – 18) = 36
36·36/(36 – 36) = 0

36·2/(36 – 2) = 2,117647059

36·2,117647059/(36 – 2,117647059) = 2,25
36,25·2/(36 – 2,25) = 2,4
36·2,4/(36 – 2,4) = 2,571428571
36·2,571428571/(36 – 2,571428571) = 2,769230765
36·2,769230765/(36 – 2,769230765) = 3
36·3/(36 – 3) = 3,272727273
36·3,272727273/(36 – 3,272727273) = 3,6
36·3,6/(36 – 3,6) = 4
36·4/(36 – 4) = 4,5
36·4,5/(36 – 4,5) = 5,142857143
36·5,142857143/(36 – 5,142857143) = 6
36·6/(36 – 6) = 7,2
36·7,2/(36 – 7,2) = 9
36·9/(36 – 9) = 12
36·12/(36 – 12) = 18
36·18/(36 – 18) = 36
36·36/(36 – 36) = 0
…

15·6/(15 – 6) = 10
15·10/(15 – 10) = 30
15·30/(15 – 30) = – 10
15·(– 10)/(15 – (– 10)) = – 6
15·(– 6)/(15 – (– 6)) = – 4,285714286
15·(– 6)/(15 – (– 6)) = – 3,3333333333
15·(– 3,33333333333)/(15 – (– 3,3333333333)) = – 2,727272727
15·(– 2,727272727)/(15 – (– 2,727272727)) = – 2,307692309
15·(– 2,307692309)/(15 – (–2,307692309)) = – 2

15·(– 2)/(15 – (– 2)) = – 1,764705883
…

36·30/(36 – 30) = 180
36·180/(36 – 180) = – 45
36·(-45)/(36 – (-45)) = 20
36·20/(36 – 20) = 45
36·45/(36 – 45) = – 20

36·30/(36 + 30) = 16,3636…
36·16,3636…/(36 + 16,3636…) = 11.25
36·11.25/(36 + 11.25) = 8,571428572
= 6,923076923
= 5,806451613
= 5
= 4,390243903
= 3,913043478
= 3,529411765
= 3,214285714
= 2,950819672
= 2,727272727
= 2,535211268
…
= 1,153833621
= 1,118000656
= 1,084326281
= …

36·15/(36 – 15) = 25,71428571
36·25,71428571/(36 – 25,71428571) = 90
36·90/(36 – 90) = – 60
36·(– 60)/(36 – (– 60)) = – 22,5
36·(– 22,5)/(36 – (–22,5)) = – 60
36·(– 60)/(36 – (– 60)) = – 22,5

Die Formel 6n ± 1 lässt sich also in 4n + 1 ind dann in 2n – 1 überleiten, bzw. von dort ableiten. Analog lässt sich die gleiche Formel weiter in 15n, 30n und $36n^2 = (6n)^2$ überführen.

„Eine **Dreieckszahl**[405] ist eine Zahl, die der Summe aller Zahlen zwischen 1 und einer Obergrenze *n* entspricht. Beispielsweise ist die 10 eine Dreieckszahl, da 1 + 2 + 3 + 4 = 10 ist. Die ersten Dreieckszahlen sind

Ein Dreieck aus zehn Steinen

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, …

Die Bezeichnung Dreieckszahl leitet sich von der geometrischen Figur des Dreiecks her[406]. Die Anzahl der Steine, die man zum Legen eines gleichseitigen Dreiecks benötigt, entspricht immer einer

[405] Wikipedia, Gaußsche Summenformel, In: Wikipedia, Versions-ID: 58464439 / 29. März 2009, < URL >.
[406] Vgl Meschkowski 14 ff.

Dreieckszahl. Aus zehn Steinen lässt sich beispielsweise ein Dreieck legen, bei dem jede Seite von vier Steinen gebildet wird.

[…]

Die *n*-te Dreieckszahl ist die Summe der Zahlen von 1 bis *n*.

$\Delta_1 = 1 = 1$
$\Delta_2 = 1 + 2 = 3$
$\Delta_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$\Delta_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
...

Gelegentlich wird per Definition auch die 0 als nullte Dreieckszahl eingeführt. Nach dieser Konvention lautet die Folge der Dreieckszahlen 0, 1, 3, 6, 10, …

Anstatt die einzelnen Zahlen zu addieren, können Dreieckszahlen auch durch die gaußsche Summenformel[407] berechnet werden.

$$\Delta_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Diese Formel ist identisch mit dem Binomialkoeffizienten *n* + 1 über 2.

$$\Delta_n = \binom{n + 1}{2}$$

[407] Wikipedia, Gaußsche Summenformel, In: Wikipedia, Versions-ID: 58464439 / 29. März 2009, < URL >: „Die **gaußsche Summenformel**, auch **kleiner Gauß** genannt, ist die Formel für die Summe der ersten *n* aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, also 1 + 2 + 3 + 4 + … + n.“

Diese Formel lässt sich durch Auslegen der Dreieckszahl veranschaulichen. Die Dreieckzahl lässt sich als Dreieck oder Treppe auslegen. Das Doppelte einer Dreieckszahl entspricht zwei gleichen Treppen, die sich zu einem Rechteck zusammenfügen lassen.

Dieses Rechteck ist *n* Kugeln hoch und *n* + 1 Kugeln breit und enthält somit n·(n + 1) Kugeln. Eine Dreieckszahl entspricht der Hälfte der Kugeln, woraus sich die oben genannte Formel für Dreiecks-zahlen ergibt.

Eigenschaften

- Die Summe der Kehrwerte aller Dreieckszahlen ist 2:

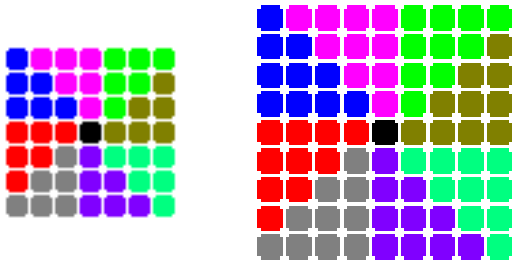
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i \cdot (i\ +\ 1)} = 2$$

- Bei allen Dreieckszahlen > 3 handelt es sich um zusammengesetzte Zahlen.
- Die Summe der ersten *n* Kubikzahlen ist gleich dem Quadrat der *n*-ten Dreieckszahl [Bsp.: 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2]
- Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen ergibt eine Kubikzahl.

  Dies lässt sich aus der darüber gehenden Eigenschaft ableiten. Wenn das Quadrat der n-ten Dreieckszahl aus der Summe der ersten n Kubikzahlen gebildet wird, und das Quadrat der (n +

1)-ten Dreieckszahl aus der Summe der ersten n + 1 Kubikzahlen gebildet wird, muss als Differenz die (n + 1)-te Kubikzahl herauskommen.

- Das Achtfache einer Dreieckszahl addiert mit 1 ergibt immer eine ungerade Quadratzahl:



6 10

- Jede gerade vollkommene Zahl ist auch eine Dreieckszahl:

Nach Leonhard Euler lässt sich eine gerade vollkommene Zahl durch die Formel $(2^n - 1)\cdot(2^{n-1})$ darstellen, wobei $2^n - 1$ eine Primzahl (Mersenne-Primzahl) sein muss. Wenn man die Formel $(2^n - 1)\cdot 2^{n-1}$ mit 2 multiplikativ erweitert, und 2^n durch *m* substituiert, kommt man auf die Formel, die Dreieckszahlen repräsentiert:

$$(2^n - 1)\cdot 2^{n-1} = \frac{(2^n - 1)\cdot 2^{n-1}\cdot 2}{2} = \frac{(2^n - 1)\cdot 2^n}{2} = \frac{(m-1)\cdot m}{2}$$

Summe dreier Dreieckszahlen

Pierre de Fermat stellte die Vermutung auf, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen darstellen lässt. Diese Vermutung wurde von Carl Friedrich Gauß bewiesen, der am 10. Juli 1796 in sein Tagebuch schrieb:

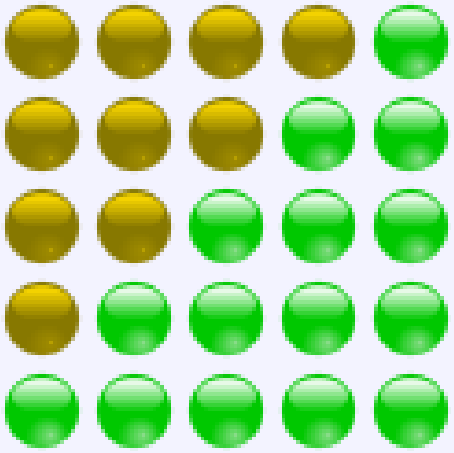
EYPHKA num = Δ + Δ + Δ.

Die allgemeinere Aussage ist als fermatscher Polygonalzahlensatz bekannt.

Beziehungen zu Quadratzahlen

Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen

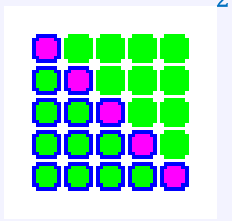
Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ergibt eine Quadratzahl. Das nebenstehende Bild zeigt beispielhaft, wie sich die Dreieckszahlen $\Delta_4 = 10$ und $\Delta_5 = 15$ zur Quadratzahl 25 addieren.



$10 + 15 = 25$

Dieses Phänomen lässt sich auch durch eine Formel beschreiben.

$$\Delta_{n-1} + \Delta_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

Für eine andere Erklärung dieses Phänomens zerlegt man die Dreieckszahl $\frac{n(n+1)}{2}$ in die Summe von n und der vorhergehenden Dreieckszahl $\frac{n(n-1)}{2}$: . Dementsprechend gilt $2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = (n-1) \cdot n + n = n^2 - n + n = n^2$ 

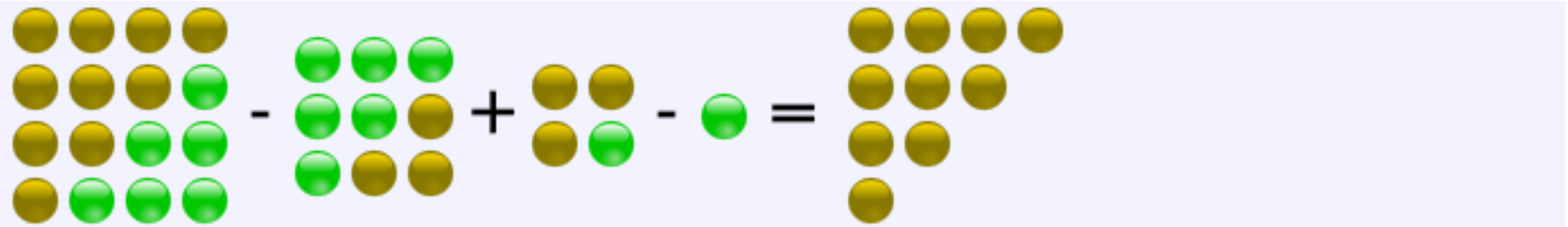
Dass sich zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen zu einer Quadratzahl addieren, wurde schon im 2. Jahrhundert vom griechischen Mathematiker Theon von Smyrna in seinem Werk ‚Das an mathematischem Wissen für die Lektüre Platons Nützliche' niedergeschrieben.

Alternierende Summe von Quadratzahlen

Nimmt man die Quadratzahl n^2 und subtrahiert und addiert abwechselnd die kleineren Quadratzahlen, dann erhält man als Ergebnis die n-te Dreieckszahl. Beispielsweise berechnen sich die vierte und fünfte Dreieckszahl wie folgt:

$$16 - 9 + 4 - 1 = 10 = \Delta_4$$
$$25 - 16 + 9 - 4 + 1 = 15 = \Delta_5$$

Indem man sich zunutze macht, dass jede Quadratzahl die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist, kann man diesen Zusammenhang anhand seiner geometrischen Veranschaulichung erklären.



Man sieht, dass mit Ausnahme des größten jedes Dreieck in der Summe genau zweimal vorkommt: je einmal mit Plus und Minus. Dadurch kürzen sich die kleinen Dreiecke in der Summe und übrig bleibt allein das große Dreieck.

Mit Hilfe des mathematischen Wortschatzes lässt sich obiger Sachverhalt sehr kurz wiedergeben: die *n*-te Dreieckszahl ist die alternierende Summe der Quadratzahlen von n^2 bis 1. Die entsprechende mathematische Formel ist

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \cdot i^2$$

Quadratzahlen unter den Dreieckszahlen

Damit eine Dreieckszahl eine Quadratzahl sein kann, muss für diese Zahl $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ Folgendes gelten: n + 1 muss eine ungerade Quadratzahl sein und muss das Doppelte einer geraden Quadratzahl sein.

Überlegung

Angenommen, *n* sei das Doppelte einer ungeraden Quadratzahl, und *n* + 1 sei eine gerade Quadratzahl. Das führt zu einem Widerspruch, da das Doppelte irgendeiner Quadratzahl eine gerade

Zahl ergibt. Eine gerade Zahl plus eins aber muss eine ungerade Zahl ergeben, was sie nach unserer Überlegung aber nicht tut.

Also muss $n + 1$ eine ungerade Quadratzahl sein.

Beispiele

N	$n = 2 \cdot a^2$	$n + 1 = b^2$	$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = a^2 \cdot b^2$	$a \cdot b$
8	$2 \cdot 2^2$	3^2	$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$6 = 2 \cdot 3$
288	$2 \cdot 12^2$	17^2	$41616 = 12^2 \cdot 17^2$	$204 = 12 \cdot 17$
9800	$2 \cdot 70^2$	99^2	$48024900 = 70^2 \cdot 99^2$	$6930 = 70 \cdot 99$
332928	$2 \cdot 408^2$	577^2	$55420693056 = 408^2 \cdot 577^2$	$235416 = 408 \cdot 577$

Dreieckszahlen und zentrierte Polygonalzahlen

Zentrierte Polygonalzahlen stehen im Zusammenhang mit regelmäßigen Polygonen, die nach folgendem Muster gelegt werden: ein einzelner Stein liegt im Mittelpunkt des Polygons. Um diesen

Stein werden weitere Polygone gelegt, wobei sich deren Seitenlängen von innen nach außen jeweils um eins erhöhen.

Diese Muster können auch nach einer anderen Regel gelegt werden. Wieder wird mit dem einzelnen Stein in der Mitte begonnen. Doch im zweiten Schritt werden für die *n*-te zentrierte *k*-Eckszahl *k* Dreiecke nach dem Muster der (*n* − 1)-ten Dreieckszahl um das Zentrum herumgelegt. Das folgende Bild zeigt dies für die erste bis vierte zentrierte Quadratzahl.

Daraus folgt für die *n*-te zentrierte *k*-Eckszahl folgende Formel:

$$1 + k \cdot \Delta_{n-1} = 1 + \frac{kn(n-1)}{2}$$

Zahlenpalindrome unter den Dreieckszahlen

Folgende Dreieckszahlen sind Zahlenpalindrome:

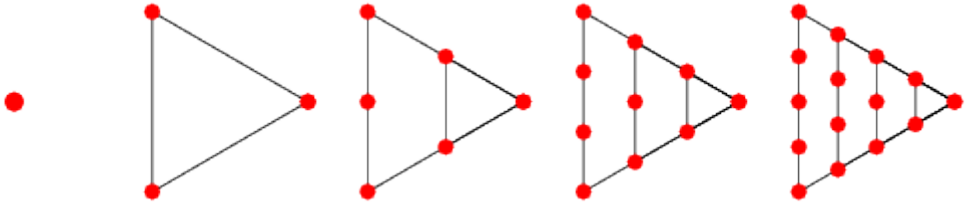
n	(n·(n + 1))/2
11	66
1.111	617.716
111.111	6.172.882.716
1.1111.111	61.728.399.382.716

Von der 1.111. und der 111.111. Dreieckszahl hat Charles Trigg herausgefunden, dass es sich um Zahlenpalindrome handelt.

Diverses

- 55, 5.050, 500.500, 50.005.000, etc. sind Dreieckszahlen
- Die Glieder der Folge 3, 10, 21, 36, 55, 78, ... (eine Teilmenge der Dreieckzahlen) lassen sich über die Formel $n \cdot (2n + 1)$ bilden. (siehe auch Sophie-Germain-Primzahl).
- Für die andere Hälfte: 1, 6, 15, 28, 45, 66, ... gilt die Bildungsregel $n \cdot (2n - 1)$.“[408]

„Triangular Number



The triangular number T_n is a figurate number that can be represented in the form of a triangular grid of points where the first row contains a single element and each subsequent row contains one more element than the previous one. This is illustrated above for $T_1 = 1$, $T_2 = 3$,… The triangular numbers are therefore 1, 1 +2, 1 +2 + 3, 1 +2 + 3 + 4, …, so the first few triangle numbers are 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... (Sloane's A000217).“[409]

[408] Wikipedia, Dreieckszahl, in: < URL >.
[409] Weisstein, Triangular Number, in: < URL >.

Die Folge $n = a^2 - b^2$

Jede ungerade Zahl lässt sich (wegen $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$) als Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen *n* und *m* mit $m = n - 1$ darstellen[410]: $n^2 - m^2 = n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1$.

2·1 – 1 = 1		2·2 – 1 = 3		2·3 – 1 = 5		2·4 – 1 = 7		2·5 – 1 = 9
2·6 – 1 = 11		2·7 – 1 = 13		2·8 – 1 = 15		2·9 – 1 = 17		2·10 – 1 = 19
2·11 – 1 = 21		2·12 – 1 = 23		2·13 – 1 = 25		2·14 – 1 = 27		2·15 – 1 = 29
2·16 – 1 = 31		2·17 – 1 = 33		2·18 – 1 = 35		2·19 – 1 = 37		2·20 – 1 = 39
2·21 – 1 = 41		2·22 – 1 = 43		2·23 – 1 = 45		2·24 – 1 = 47		2·25 – 1 = 49
…								

„Für eine ungerade Primzahl ist diese Darstellung offenbar die einzig mögliche, denn aus

$$p = 2n + 1 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

folgt

$$x - y = 1,\ x + y = 2n + 1,$$

also

$$x = n + 1,\ y = n.$$

[410] Trost 28; vgl Schott 3 ff; Zagier, Primzahlen: Theorie und Anwendung, in: Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften: Vorträge N 370, S. 45 ff; Pittner 21.

Wir zeigen jetzt, dass auch die allgemeine Form $ax^2 + by^2$, wo a, b natürliche Zahlen sind, die Primzahl p höchstens auf eine Weise darstellt. Aus $p = ax^2 + by^2 = au^2 + bv^2$, wo x, y, u, v natürliche Zahlen mit $(x, y) = (u, v) = 1$ sind, folgt durch Elimination von b

$$p(v^2 - y^2) = a(x^2v^2 - y^2u^2)$$

und weil $a < p$, gilt

$$yu \equiv \pm xv \pmod{p}. \tag{30}$$

Durch Multiplikation der beiden Darstellungen ergibt sich,

$$p^2 = (axu \pm byv)^2 + ab(uy \mp vx)^2, \tag{31}$$

wo entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen genommen werden können. Ist uy = vx, so folgt wegen (u, v) = (x, y) = 1 u|x und x|u, das heißt u = x und v = y. Ist uy ≠ vx, so schließt man aus (30) und (31)

$$|uy \mp vx| = \mathrm{p},\ \mathrm{a} = \mathrm{b} = 1,\ axu \pm byv = 0,$$

denn anders lässt sich (31) nicht erfüllen. Somit ist $xu = \pm yv$, also $x = \pm v$, $y = \pm u$, und die Darstellung $p = x^2 - y^2$ $(a = b = 1)$ ist eindeutig, da die Reihenfolge der Summanden nicht berücksichtigt wird.

Wir nennen die Darstellung $N = ax^2 + by^2$ «eigentlich» wenn (ax, by) = 1. Primzahlen haben also höchstens eine Darstellung mit nichtnegativen x, y, und diese ist eigentlich. EULER hat bemerkt,

dass man diese Aussage für gewisse Formen $x^2 + dy^2$ mit $d \geq 1$ umkehren kann: besitzt ein *ungerades N* > 1 genau eine Darstellung $N = x^2 + dy^2$ mit $x \geq 0$, $y \geq 0$ und gilt außerdem $(x, dy) = 1$, so ist N Primzahl. Die Koeffizienten *d* mit dieser Eigenschaft nannte EULER «taugliche» Zahlen (numeri idonei) und gab folgende 65 Werte an: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848. Die Ableitung des Kriteriums, mit dem EULER die Numeri idonei gewonnen hat, ist nicht ganz stichhaltig, doch hat GAUSS mit seiner verfeinerten Theorie der quadratischen Formen dieselben 65 Zahlen gefunden, die damit gesichert sind."[411]

$P_{\{1\}}$	$P_{\{3\}}$	$P_{\{5\}}$	$P_{\{7\}}$	$P_{\{9\}}$
$1^2 + 3\cdot0^2 = 1 = 1^2 - 0^2$	$3 (= 2^2 - 1^2)$	$5 (= 3^2 - 2^2)$	$7 (= 4^2 - 3^2)$	$9 (= 5^2 - 4^2)$
$3^2 + 2\cdot1^2 = 11 = 6^2 - 5^2$	$13 (= 7^2 - 6^2)$	$15 (= 8^2 - 7^2)$	$17 (= 9^2 - 8^2)$	$19 (= 10^2 - 9^2)$
$21 (= 11^2 - 10^2)$	$23 (= 12^2 - 11^2)$	$25 (= 13^2 - 12^2)$	$27 (= 14^2 - 13^2)$	$29 (= 15^2 - 14^2)$
$31 (= 16^2 - 15^2)$	$33 (= 17^2 - 16^2)$	$35 (= 18^2 - 17^2)$	$37 (= 19^2 - 18^2)$	$39 (= 20^2 - 19^2)$
$41 (= 21^2 - 20^2)$	$43 (= 22^2 - 21^2)$	$45 (= 23^2 - 22^2)$	$47 (= 24^2 - 23^2)$	$49 (= 25^2 - 24^2)$
$51 (= 26^2 - 25^2)$	$53 (= 27^2 - 26^2)$	$55 (= 28^2 - 27^2)$	$57 (= 29^2 - 28^2)$	$59 (= 30^2 - 29^2)$
$61 (= 31^2 - 30^2)$	$63 (= 32^2 - 31^2)$	$65 (= 33^2 - 32^2)$	$67 (= 34^2 - 33^2)$	$69 (= 35^2 - 24^2)$
$71 (= 36^2 - 35^2)$	$73 (= 37^2 - 36^2)$	75	77	79
81 $(= 41^2 - 40^2)$	83	85	87	89
91 $(= 46^2 - 45^2)$	93	95	97	99

101 $(= 51^2 - 50^2)$	103	105	107	109
111	113	115	117	119
121	123	125	127	129
131	133	135	137	139

[411] Trost 28 f.

141	143	145	147	149
151	153	155	157	159
161	163	165	167	169
171	173	175	177	179
181	183	185	187	189
191	193	195	197	199(= $100^2 - 99^2$)

201	203	205	207	209
211	213	215	217	219
221	223	225	227	229
231	233	235	237	239
241	243	245	247	249
251	253	255	257	259
261	263	265	267	269
271	273	275	277	279
281	283	285	287	289
291	293	295	297	299

301	303	305	307	309
311	313	315	317	319
321	323	325	327	329
331	333	335	337	339
341	343	345	347	349
351	353	355	357	359
361	363	365	367	369
371	373	375	377	379
381	383	385	387	389
391	393	395	397	399

401	403	405	407	409
411	413	415	417	419

421	423	425	427	429
431	433	435	437	439
441	443	445	447	449
451	453	455	457	459
461	463	465	467	469
471	473	475	477	479
481	483	485	487	489
491	493	495	497	499

501	503	505	507	509
511	513	515	517	519
521	523	525	527	529
531	533	535	537	539
541	543	545	547	549
551	553	555	557	559
561	563	565	567	569
571	573	575	577	579
581	583	585	587	589
591	593	595	597	599

601	603	605	607	609
611	613	615	617	619
621	623	625	627	629
631	633	635	637	639
641	643	645	647	649
651	653	655	657	659
661	663	665	667	669
671	673	675	677	679
681	683	685	687	689
691	693	695	697	699

701	703	705	707	709
711	713	715	717	719
721	723	725	727	729
731	733	735	737	739
741	743	745	747	749
751	753	755	757	759
761	763	765	767	769
771	773	775	777	779
781	783	785	787	789
791	793	795	797	799

801	803	805	807	809
811	813	815	817	819
821	823	825	827	829
831	833	835	837	839
841	843	845	847	849
851	853	855	857	859
861	863	865	867	869
871	873	875	877	879
881	883	885	887	889
891	893	895	897	899

901	903	905	907	909
911	913	915	917	919
921	923	925	927	929
931	933	935	937	939
941	943	945	947	949
951	953	955	957	959
961	963	965	967	969
971	973	975	977	979
981	983	985	987	989

991	993	995	997	999

1001(= $501^2 - 500^2$)	1003	1005	1007	1009
1011	1013	1015	1017	1019
1021	1023	1025	1027	1029
1031	1033	1035	1037	1039
1041	1043	1045	1047	1049
1051	1053	1055	1057	1059
1061	1063	1065	1067	1069
1071	1073	1075	1077	1079
1081	1083	1085	1087	1089
1091	1093	1095	1097	1099

1101	1103	1105	1107	1109
1111	1113	1115	1117	1119
1121	1123	1125	1127	1129
1131	1133	1135	1137	1139
1141	1143	1145	1147	1149
1151	1153	1155	1157	1159
1161	1163	1165	1167	1169
1171	1173	1175	1177	1179
1181	1183	1185	1187	1189
1191	1193	1195	1197	1199

1201(= $601^2 - 600^2$)	1203	1205	1207	1209
1211	1213	1215	1217	1219
1221	1223	1225	1227	1229
1231	1233	1235	1237	1239
1241	1243	1245	1247	1249
1251	1253	1255	1257	1259
1261	1263	1265	1267	1269

1271	1273	1275	1277	1279
1281	1283	1285	1287	1289
1291	1293	1295	1297	1299

1301	1303	1305	1307	1309
1311	1313	1315	1317	1319
1321	1323	1325	1327	1329
1331	1333	1335	1337	1339
1341	1343	1345	1347	1349
1351	1353	1355	1357	1359
1361	1363	1365	1367	1369
1371	1373	1375	1377	1379
1381	1383	1385	1387	1389
1391	1393	1395	1397	1399

1401	1403	1405	1407	1409
1411	1413	1415	1417	1419
1421	1423	1425	1427	1429
1431	1433	1435	1437	1439
1441	1443	1445	1447	1449
1451	1453	1455	1457	1459
1461	1463	1465	1467	1469
1471	1473	1475	1477	1479
1481	1483	1485	1487	1489
1491	1493	1495	1497	1499

1501	1503	1505	1507	1509
1511	1513	1515	1517	1519
1521	1523	1525	1527	1529
1531	1533	1535	1537	1539
1541	1543	1545	1547	1549

1551	1553	1555	1557	1559
1561	1563	1565	1567	1569
1571	1573	1575	1577	1579
1581	1583	1585	1587	1589
1591	1593	1595	1597	1599

1601	1603	1605	1607	1609
1611	1613	1615	1617	1619
1621	1623	1625	1627	1629
1631	1633	1635	1637	1639
1641	1643	1645	1647	1649
1651	1653	1655	1657	1659
1661	1663	1665	1667	1669
1671	1673	1675	1677	1679
1681	1683	1685	1687	1689
1691	1693	1695	1697	1699

1701	1703	1705	1707	1709
1711	1713	1715	1717	1719
1721	1723	1725	1727	1729
1731	1733	1735	1737	1739
1741	1743	1745	1747	1749
1751	1753	1755	1757	1759
1761	1763	1765	1767	1769
1771	1773	1775	1777	1779
1781	1783	1785	1787	1789
1791	1793	1795	1797	1799

1801(= $901^2 - 900^2$)	1803	1805	1807	1809
1811	1813	1815	1817	1819
1821	1823	1825	1827	1829

1831	1833	1835	1837	1839
1841	1843	1845	1847	1849
1851	1853	1855	1857	1859
1861	1863	1865	1867	1869
1871	1873	1875	1877	1879
1881	1883	1885	1887	1889
1891	1893	1895	1897	1899

1901	1903	1905	1907	1909
1911	1913	1915	1917	1919
1921	1923	1925	1927	1929
1931	1933	1935	1937	1939
1941	1943	1945	1947	1949
1951	1953	1955	1957	1959
1961	1963	1965	1967	1969
1971	1973	1975	1977	1979
1981(= $991^2 - 990^2$)	1983	1985	1987	1989
1991	1993	1995	1997	1999

2001	2003	2005	2007	2009
2011	2013	2015	2017	2019
2021	2023	2025	2027	2029
2031	2033	2035	2037	2039
2041	2043	2045	2047	2049
2051	2053	2055	2057	2059
2061	2063	2065	2067	2069
2071	2073	2075	2077	2079
2081	2083	2085	2087	2089
2091	2093	2095	2097	2099

2101	2103	2105	2107	2109

2111	2113	2115	2117	2119
2121	2123	2125	2127	2129
2131	2133	2135	2137	2139
2141	2143	2145	2147	2149
2151	2153	2155	2157	2159
2161	2163	2165	2167	2169
2171	2173	2175	2177	2179
2181	2183	2185	2187	2189
2191	2193	2195	2197	2199

2201	2203	2205	2207	2209
2211	2213	2215	2217	2219
2221	2223	2225	2227	2229
2231	2233	2235	2237	2239
2241	2243	2245	2247	2249
2251	2253	2255	2257	2259
2261	2263	2265	2267	2269
2271	2273	2275	2277	2279
2281	2283	2285	2287	2289
2291	2293	2295	2297	2299

2301	2303	2305	2307	2309
2311	2313	2315	2317	2319
2321	2323	2325	2327	2329
2331	2333	2335	2337	2339
2341	2343	2345	2347	2349
2351	2353	2355	2357	2359
2361	2363	2365	2367	2369
2371	2373	2375	2377	2379
2381	2383	2385	2387	2389
2391	2393	2395	2397	2399

2401(= 1201²–1200²)	2403	2405	2407	2409
2411	2413	2415	2417	2419
2421	2423	2425	2427	2429
2431	2433	2435	2437	2439
2441	2443	2445	2447	2449
2451	2453	2455	2457	2459
2461	2463	2465	2467	2469
2471	2473	2475	2477	2479
2481	2483	2485	2487	2489
2491	2493	2495	2497	2499

2501	2503	2505	2507	2509
2511	2513	2515	2517	2519
2521	2523	2525	2527	2529
2531	2533	2535	2537	2539
2541	2543	2545	2547	2549
2551	2553	2555	2557	2559
2561	2563	2565	2567	2569
2571	2573	2575	2577	2579
2581	2583	2585	2587	2589
2591	2593	2595	2597	2599

2601	2603	2605	2607	2609
2611	2613	2615	2617	2619
2621	2623	2625	2627	2629
2631	2633	2635	2637	2639
2641	2643	2645	2647	2649
2651	2653	2655	2657	2659
2661	2663	2665	2667	2669
2671	2673	2675	2677	2679

2681	2683	2685	2687	2689
2691	2693	2695	2697	2699

2701	2703	2705	2707	2709
2711	2713	2715	2717	2719
2721	2723	2725	2727	2729
2731	2733	2735	2737	2739
2741	2743	2745	2747	2749
2751	2753	2755	2757	2759
2761	2763	2765	2767	2769
2771	2773	2775	2777	2779
2781	2783	2785	2787	2789
2791	2793	2795	2797	2799

2801(= $1401^2 - 1400^2$)	2803	2805	2807	2809
2811	2813	2815	2817	2819
2821	2823	2825	2827	2829
2831	2833	2835	2837	2839
2841	2843	2845	2847	2849
2851	2853	2855	2857	2859
2861	2863	2865	2867	2869
2871	2873	2875	2877	2879
2881	2883	2885	2887	2889
2891	2893	2895	2897	2899

2901	2903	2905	2907	2909
2911	2913(= $1457^2 - 1456^2$)	2915	2917	2919
2921	2923	2925	2927	2929
2931	2933	2935	2937	2939
2941	2943	2945	2947	2949
2951	2953	2955	2957	2959

2961	2963	2965	2967	2969
2971	2973	2975	2977	2979
2981	2983	2985	2987	2989
2991	2993	2995	2997	2999(= 1500² – 1499²)
…	…	…	…	…

Das Verfahren von Fermat dient der Primfaktorzerlegung[412]. Dabei wir eine natürliche Zahl in die Differenz zweier Quadratzahlen zerlegt. Das Interessante an dieser Zerlegung ist, dass sie ohne Division auskommt.

$$n = a^2 – b^2 = (a – b)(a + b) = n_1n_2$$

wobei a, b und n natürliche Zahlen sind. Fermat sagt, das bei $n \equiv 1 \pmod 2$ ist genau dann p eine Primzahl, wenn es exakt eine Darstellung der Form $p = a^2 – b^2$ gibt[413]. Da p Primzahl ist, muss $a + b = p$, $a – b = 1$, gelten, also $a = (p + 1)/2$, $b = (p – 1)/2$ und $p = [(p + 1)/2]^2$, $b = [(p – 1)/2]^2$ ist die einzige mögliche Darstellung von p als Differenz zweier Quadrate. Das Verfahren von Fermat ist für große Zahlen ineffizient. Die Verfahren zum Testen von potenziellen Primzahlen sind jedoch in der Entwicklung der Mathematik sehr wichtig gewesen[414]. Auch bei $24n + 1 = p^2$ kann $24n = p^2 – 1 = p^2 – 1^2 = (p + 1)(p – 1)$ geschrieben werden[415].

Die Differenz von benachbarten Quadraten ist bei $b = a - 1$ stets wie $a^2 - b^2 = a + b$. Aus den vorher Gesagten, wonach $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$ sei, folgt, dass in diesem Fall $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b) = a + b$ und bede Seiten durch $a + b$ geteitl im Ergebnis $a – b = 1$ ergebe[416].

[412] Rettenbacher 3 ff, 83 ff.
[413] Schott 3 f.
[414] Schott 4, 6.
[415] Waldal 61 f.
[416] Vgl Trost 28 f.

Die Folge $1/n^s$

Weil alle ungeraden Zahlen als Differenz zweier benachbarten Quadrate darstellbar ist[417], während bei der analogen Summe der Quadrate nur ganz bestimmte, und man meinte die Primzahlen in der Menge der ungeraden Zahlen mit der Summe der Quadrate eingrenzen zu können[418], ist die allgemeine Bestimmbarkeit der Primzahlen der negativen Quadrate aus dem Blickfeld geraten[419]. Es zeigt sich aber auch bei den positiven Quadraten, dass dort das Kriterium der Primzahl ist, dass die Darstellung mit Quadraten die Einzige bzw. Ausschließliche sein muss[420]. Das verweist auf die benachbarten negativen Quadrate, die eine ausschließliche Kombination ist, die immer gilt.

Die beiden Eulerschen FormelN für die Berechnung der Primzahlen, $4n + 1 = p_m^2 + np_n^2 = p_x^2$ über die Summe der Quadrate[421] und $n(n + 1) + p_n = n^2 + n + p_n = p_x$ über die Dreiecksformel[422]

$$\Delta_{n-1} + \Delta_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

wonach die Summe zweier benachbarten Glieder als Quadrat auszudrücken ist, korrespondiert mit dem Ausdruck, wonach jede ungerade Zahl als negative Summe (Differenz) zweier benachbarten

[417] Trost 28.
[418] Trost 29 ff.
[419] Schott 6.
[420] Trost 30 f.
[421] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f.
[422] Wikipedia, Dreieckszahl, in: < URL >.

Quadrate sei: $Q_n^2 - Q_{n-1}^2 = P_m = 2n - 1$. Insofern dabei eine Überleitung von 2n – 1 zu 4n + 1 ersichtlich[423] ist oder abgeleitet werden kann[424], so zeigen die Nullstellen der Riemannsche Zetafunktion[425] –6, –4, –2, die Überleitung von 2n – 1 zu 4n + 1 und zu 6n – 1 bzw. 6n + 1.

„Das Gebiet des Quantenchaos weist der Zahlentheorie einen vielversprechenden Weg, um die vor nahezu 150 Jahren aufgestellte Riemann'sche Vermutung zu beweisen. Wäre der Beweis erbracht, ließe sich auf die Anzahl der Primzahlen schließen, die sich in einem bestimmten Intervall befinden. […] In den letzten Jahren hat sich gezeigt, dass die Zahlentheorie bemerkenswerte Analogien zu dem sogenannten Quantenchaos aufweist.
[…] Im 18. Jahrhundert gab erstmals Leonard Euler eine Abschätzung über die Anzahl der Primzahlen, die sich in einem gegebenen Zahlintervall befinden.
[…] Ein weiterer großer Beitrag Eulers zur Zahlentheorie bestand in der Einführung der sogenannten Zetafunktion: Dabei handelt es sich um ein unendliches[426] Produkt von Ausdrücken, in die nur Primzahlen eingehen. Im Jahre 1859 sah Bernhard Riemann in dieser Zetafunktion den Schlüssel, um die

---

[423] Trost 28 f: „Primzahldarstellung durch quadratische formen (Numeri idonei). Jede ungerade Zahl lässt sich wegen $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$ als Differenz von zwei Quadraten schreiben. Für eine ungerade Primzahl ist diese Darstellung offenbar die einzig mögliche […] Wir nennen die Darstellung $N = ax^2 + by^2$ «eigentlich», wenn $(ax, by) = 1$. Primzahlen haben also höchstens eine Darstellung mit nichtnegativen x, y, und diese ist eigentlich. Euler hat gemerkt, dass man diese Aussage für gewisse Formen $x^2 + dy^2$ mit $d \geq 1$ umkehren kann: Besitzt ein ungerades $N > 1$ genau eine Darstellung $N = x^2 + dy^2$ mit $x \geq 0$, $y \geq 0$ und gilt außerdem $(x, dy) = 1$, so ist N Primzahl."
[424] Trost 30 f: „Satz 11. Eine ungerade Zahl von der Form $4m + 1$ ($m > 0$) ist dann und nur dann Primzahl, wenn sie nur auf eine Weise als Summe von zwei Qadraten darstellbar ist und diese Quadrate teilerfremd sind. […] Satz 13. Eine ungerade Zahl von der Form $6m + 1$ ($m > 0$) ist dann und nur dann Primzahl, wenn sie nur eine einzige Darstellung durch die Form $x^2 + 3y^2$ besitzt und diese eigentlich ist."
[425] Prachar 3 f, 55 f; Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: Wikipedia URL < URL >; Landau I 29 ff; Gekeler, Ernst-Ulrich: Primzahlen von Euklied bis heute, in: < URL >; Trost 62 ff; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[426] Meschkowski 11 ff.

Anzahl der Primzahlen in einem bestimmten Intervall vorauszusagen. In seiner Arbeit 'Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe' weitete er die Euler'sche Zetafunktion auf die komplexen Zahlen[427] aus.
[…] Während die Euler'sche Zetafunktion eine Funktion einer (reellen) Variablen ist, hängt die Riemann'sche Zetafunktion von zwei Variablen ab, nämlich dem Real- und dem Imaginärteil der komplexen Zahlen.
[…] Die Anzahl der Nullstellen auf der vertikalen Linie ließe einen direkten Schluss auf die Anzahl der Primzahlen zu.
[…] Unterdessen wiesen einige Methoden aus dem Quantenchaos den Weg, wie man die Riemann'sche Vermutung prinzipiell beweisen könnte. Eine wichtige Beschreibung für das Quantenchaos liefert eine Formel des Physikers Martin Gutzwilller, die er bereits in den sechziger Jahren entwickelt hatte. Sie stellt eine Verbindung zwischen einem klassischen sich chaotisch verhaltenden System und seinem quantenmechanischem Gegenstück dar.
[…] Vergleicht man nun Gutzwilers Formel zur Anzahl der Energieniveaus mit der Verteilung der Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion, kommen erstaunliche Parallelen zum Vorschein: Die Energieniveaus eines quantenmechanischen Systems scheinen sich nämlich den Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion zuordnen zu lassen."[428]

Auch neuere Primzahltests wie APR[429] (Abkürzung der Namen Adleman, Pomerance und Rumely) weisen in die Richtung:

[427] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.
[428] Gaubitzer 74 f.
[429] Pittner 101 ff; Wolke 2; Ribenboim/Richstein/Keller 115 f; Kowol 70.

„Dieser APR-Algorithmus – der Name ist aus den Anfangsbuchstaben der Autoren gebildet – verwendet Pseudoprimzahl-Tests, die Potenzrestsymbole in $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ für eine spezielle Menge P von Primzahlen p involvieren.
[…] Bereits 1984 modifizierten Cohen und Lenstra (siehe [8]) diesen Test, indem sie die Pseudoprimzahltests durch Gauß- und Jacobi-Summen ersetzten.
[…] Der große Durchbruch des APR-Tests besteht nach der Meinung Riesels darin, dass erstmals die Existenz eines schnellen Primzahltests bewiesen wurde, der total unabhängig von jeglischer Faktorisierung ist ([35], S. 131).“[430]

Die Formel $e^{2\pi i/p}$ zeigt, dass e mit π periodisch ist[431], weil nach der Eulerschen Identität $e^{i\pi} = -1$ bzw. $e^{i\pi} + 1 = 0$ die i Mal pi-te Potenz von e plus 1 eine Nullstelle ist[432]:

„2.6.4 Die Euler-Gleichung

Hier erfolgt der Brückenschlag zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen. Besonders schöne Spezialfälle ergeben sich, wenn wir $z = 2\pi i, \pi i, \frac{\pi}{2} i$ setzen (diese lassen sich bereits aus der Formel e^{iy} ableiten):

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

[430] Simmel 69.
[431] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >.
[432] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Arndt/Haenel 13; Prachar 61 ff.

Die zweite Beziehung liefert eine Formel, die die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander verbindet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Hier sind Arithmetik durch 0 und 1 repräsentiert, Algebra durch i, Geometrie durch π und schließlich die Analysis durch e. Außerdem enthält diese Formel die drei bedeutendsten mathematischen Operationen: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren."[433]

Mit $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ zeigt die Euler-Gleichung die Periodizität[434].

„Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen[435] Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion'[436], welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

---

[433] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >.
[434] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >

[435] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >:
„Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und φ, so kann die komplexe Zahl $z = a + bi$ auch in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

dargestellt werden, da $a = r \cdot \cos\varphi$ und $b = r \cdot \sin\varphi$ ist. Diese Darstellung einer komplexen Zahl heißt Polarform.

Die Darstellung $r \cdot e^{i\varphi}$ mit Hilfe der komplexen e-Funktion heißt Exponentialform, die Darstellung $r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ heißt trigonometrische Form.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s \log n}$ bei reellem log *n* hat.

Riemann bewies:

1. Die Funktion $\zeta(s)$ ist in der ganzen Ebene regulär bis auf den Punkt s = 1, der ein Pol erster Ordnung mit dem Reduum 1 ist; mit anderen Worten:

$$(s-1)\zeta(s)$$

und

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

sind ganze transzendente Funktionen.

2. Die Funktion

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

(welche übrigens in s = 0 und s = 1 Pole erster Ordnung hat, sonst regulär ist) bleibt unverändert, wenn s durch 1 – s ersetzt wird.

Dies ließ sich durch Benutzung der bekannten Funktionsgleichungen der Gammafunktion[437] in die Gestalt zu bringen:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{8\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

und besagt in dieser oder der ursprünglichen Gestalt, dass der Quotient

---

Wegen der eulerschen Identität sind Exponentialform und trigonometrische Form bedeutungsgleich und stellen alternative Schreibweisen für die Polarform dar."

[436] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[437] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Havil 65 ff.

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}$$

sich durch bekannte Funktionen darstellen lässt, d. h. dass man den Verlauf der Funktion $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene beherrscht, falls man ihn in der Halbebene

$$\sigma \geqq \frac{1}{2}$$

verfolgen kann.

Aus diesen Ergebnissen konnte Riemann leicht schließen, dass $\zeta(s)$ für s = –2, s = –4, s = –6, …, allgemein s = –2q (wo q eine positive Zahl ist) von der ersten Ordnung verschwindet, sonst aber für alle reellen s, sowie für $\sigma < 0$ und $\sigma > 0$ von Null verschieden ist, so dass alle von –2q verschiedenen etwa vorhandenen Nullstellen dem Streiben $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehören und nicht reell sind.“[438]

Hieran[439] schließen, wenn auch nicht immer direkt, neuere Ansätze an:

„Satz 3.3. Der Primzahlsatz ist bewiesen, und es gilt sogar genauer

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-e\sqrt{\log x}}\right) \qquad (x \to \infty) \qquad (3.8)$$

(*c – passende positive Konstante*), wenn folgendes gezeigt ist: Für genügend großes T, etwa $T > T_0 > 2$ kann in Satz 3.2a $= 1 - c_1/\log T > ½$ genommen werden; es liegen bei dieser Wahl von a innerhalb und auf Γ keine Nullstellen von ζ(s), und es gilt

[438] Landau I 30 f.
[439] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.

$$\min_{s \subset \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right| < c_2 \log T \qquad (3.9)$$

(c_1, c_2 – passende positive Konstanten).“[440]

Und man geht weiter:

„Alle diese Phänomene, bei denen die Menge eng an ihre Veränderung geknüpft ist, werden durch Exponentialgleichungen beschrieben, und die Mutter aller Exponentialgleichungen ist die e-Funktion e hoch x. Die e-Funktion ist die einzige Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Und das ist der Grund, weshalb einem das e bei fast jedem physikalischen Problem entgegenspringt: e-Funktionen bilden Grundlösungen für die mathematische Beschreibung aller möglichen natürlichen Vorgänge. […] e ist gewissermassen das Neutrum der Differentialwelt; eine ähnliche Rolle spielen die 0 für die Addition und die 1 für die Multiplikation. Aber offenbar steckt in e noch viel mehr als bloss die natürlichste, reine Basis einer Exponentialfunktion. Entsprechend hat auch Pi vielerlei andere Bedeutungen[441] als allein die ursprüngliche geometrische (nämlich das Verhältnis von Kreisumfang und Durchmesser). e tanzt auf allen möglichen Hochzeiten. Ein schönes Beispiel ist das Auftauchen von e in einem Ausdruck, der die sogenannte Primzahldichte beschreibt (die Anzahl Primzahlen in einem bestimmten Intervall). Je mehr Zahlen man betrachtet, desto seltener tauchen Primzahlen auf. Doch setzt man die Primzahlendichte bis zur Zahl N mit dem natürlichen Logarithmus (mit der Basis e) in Verhältnis, so strebt dieser Wert bei steigendem N dem Grenzwert 1 zu. Das jedenfalls hat geduldiges Auszählen ergeben, exakt hergeleitet hat diesen Grenzwert bis jetzt noch niemand. Dass in diesem Wert auch die Zahl e steckt, erstaunt die Mathematiker, denn Primzahlen gehören ja eigentlich dem ganzzahligen Reich an, und e zählt zu den halbsten Zahlen, die es überhaupt gibt: Mathematiker nennen Zahlen dieser Gattung ihrer mit klassischen Mitteln schwer zu fassenden Eigenschaften wegen «transzendent». […] Und noch auf eine andere Art hat Euler e geadelt: Er hat mit

[440] Prachar 61.
[441] Arndt/Haenel 13.

der Zahl nämlich die wohl schönste mathematische Gleichung aufgestellt: e hoch iPi + 1 = 0. Man braucht gar nicht ausführlich auf die praktische Bedeutung der Gleichung einzugehen (die tatsächlich der Differentialrechnung den komplexen Raum[442] und damit eine Unmenge neuer Anwendungen eröffnet hat), um eine Ahnung zu bekommen von der Begeisterung der MathematikerInnen für diese Formel. Sie verbindet auf einfachste Art die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik (die drei Einheiten 0, 1 und i [die Wurzel aus –1], dazu Pi und e), ebenso wie die drei wichtigsten mathematischen Operationen: die Addition, die Multiplikation und die Potenz. Und alles das fügt sie mit einem einfachen Gleichheitszeichen zusammen."[443]

Für komplexe Zahlen[444], deren Realteil größer als 1 ist, ist die Zetafunktion[445] definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots.$$

als Summe der reziproken Potenzen. Diese Summe lässt sich als Potenzreihe der Primzahlen $1/p^s$, d. h. als Euler-Produkt schreiben:

$$\zeta(s) = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\ldots}.$$

Auf ganz $\mathbb{C}$ gilt als Identität zwischen meromorphen[446] Funktionen

[442] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.
[443] Fischer, Roland: Die Eulersche Zahl, in: WOZ, Die Wochenzeitung, vom 12. April 2007 < URL >: mit „e hoch iPi + 1 = 0" und „die drei Einheiten 0, 1 und i [die Wurzel aus -1], dazu Pi und e" ist offenbar die periodische Formel $e^{i\pi} = -1$ bzw. $e^{i\pi} + 1 = 0$ gemeint (vgl Arndt/Haenel 13; Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >).
[444] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.
[445] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >.

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cdot\cos\frac{2\pi}{2}\cdot\zeta(s).$$

Eine andere Darstellung ist

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(1-s)\cdot\zeta(1-s)$$

für alle *s* in $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

„Für eine positive ganze Zahl *n* ist

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}.$$

Beispielsweise ist

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Diese Formeln wurden von Euler entdeckt und 1735 in seiner Arbeit *De Summis Serierum Reciprocarum* erstmals veröffentlicht[447]. Das Auffinden des Werts von $\zeta(2)$ ist auch als das *Basler Problem* bekannt.

Daneben gibt es auch eine höchst bemerkenswerte Rekursionsformel

---

[446] Bundschuh 38 f, 305 f.

[447] Hainzl 142 ff: $x\coth x = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \frac{2}{945}x^6 \ldots$ hat numerisch analoge Teiler, die mit $x\coth x = 1 + \frac{2}{6}x^2 - \frac{2}{90}x^4 + \frac{2}{945}x^6 \ldots = 2\left(1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{90}x^4 + \frac{1}{945}x^6 \ldots\right)$ noch näher zu $\zeta(s)$ wäre (zumal wenn man weiß, dass Tangens und Kotangens mit π periodisch ist), weil bei $x = \pi$ die Lösungen von $\zeta(s)$ exakt $x\coth x$ entsprechen, bis auf die Multiplikation mit 2.

$$\zeta(2n) = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k) \cdot \zeta\big(2(n-k)\big),$$

für natürliche Zahlen n ≥ 2, die allerdings Euler noch nicht bekannt war.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl quadratfrei ist, ist gleich $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$, genauer: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte Zahlen kleiner als *N* teilerfremd sind, konvergiert für N → ∞ gegen diesen Wert […]

Für eine ganze Zahl *k* > 0 gilt

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}.$$

Über die Funktionalgleichung ist diese Formel äquivalent zur oben angegebenen Formel für die Werte auf den geraden natürlichen Zahlen. Da $B_k = 0$ für ungerade k, gilt insbesondere

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0;$$

weitere Werte sind

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \qquad \zeta(-3) = -\frac{1}{120},$$

Nullstellen der Zetafunktion

Aus der Produktdarstellung kann man leicht folgern, dass ζ(s) ≠ 0 für Re s > 1gilt. Zusammen mit der Funktionalgleichung ergibt sich, dass die einzigen Nullstellen außerhalb des *kritischen Streifens*

$$\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re\ s\ \leq 1\}$$

die ‚trivialen' Nullstellen $-2,\ -4,\ -6,\ldots$ sind.

Die Lage der Nullstellen im kritischen Streifen hängt eng mit Aussagen über die Verteilung der Primzahlen zusammen. Beispielsweise ist die Aussage, dass auf dem Rand des kritischen Streifens keine Nullstellen liegen, ein möglicher Zwischenschritt beim Beweis des Primzahlsatzes. Weitere Vergrößerungen des ‚nullstellenfreien Bereiches' implizieren Restgliedabschätzungen im Primzahlsatz. Riemann vermutete im Jahr 1859, dass alle Nullstellen auf der Geraden $\{s \mid Re\ s = 1/2\}$ liegen. Diese so genannte riemannsche Vermutung[448] konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden."[449]

Von dem allgemeinen Fall[450] hebt das sog. Basler Problem[451] den speziellen Fall der reziproken Quadrate ab.

„Beim Basler Problem handelt es sich um die Frage nach der Summe der reziproken Quadratzahlen, also dem Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

[…] Euler untersuchte in seiner Arbeit die riemannsche ζ-Funktion

[448] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.
[449] Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >.
[450] Sautoy 109 ff.
[451] Wikipedia, Basler Problem, In: <URL>.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und fand eine allgemeine Summenformel für alle geradzahligen natürlichen Argumente *s*. Aus dieser Formel ergibt sich die Lösung des Basler Problems für *s* = 2 zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Eine allgemeine Formel für ungeradzahlige natürliche Argumente *s* ist bisher unbekannt.“[452]

Es gibt zahlreiche grafische Darstellungen der Zetafunktion[453], doch sind anschauliche Darstellungen selten. In diesen Wenigen stellt sich das Problem weniger kompliziert, bzw. anschaulicher, dar[454].

„Irgendwo, weit hinter einer der unendlich[455] vielen Dimensionen des Hilbert-Raums, befindet sich das Land Riemannien. Es wurde erst 1859 von Bernhard Riemann (1826-1866) entdeckt, daher trägt es seinen Namen. Riemann war Mathematiker, und auch die wenigen Pioniere, die bislang in dieses Land vorgedrungen sind, waren Mathematiker. Das wird wohl einige unter Ihnen abschrecken, lassen Sie mich dennoch einiges Wissenswerte über dieses Land erzählen.

Das wohl Erstaunlichste an diesem Land ist, dass man von einer gleichen Landschaft zwei verschiedene Fotos schießen kann: Die Landschaft ist vierdimensional!

---

[452] Wikipedia, Basler Problem, In: <URL>.
[453] Trost 62 ff.
[454] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.
[455] Meschkowski 11 ff.

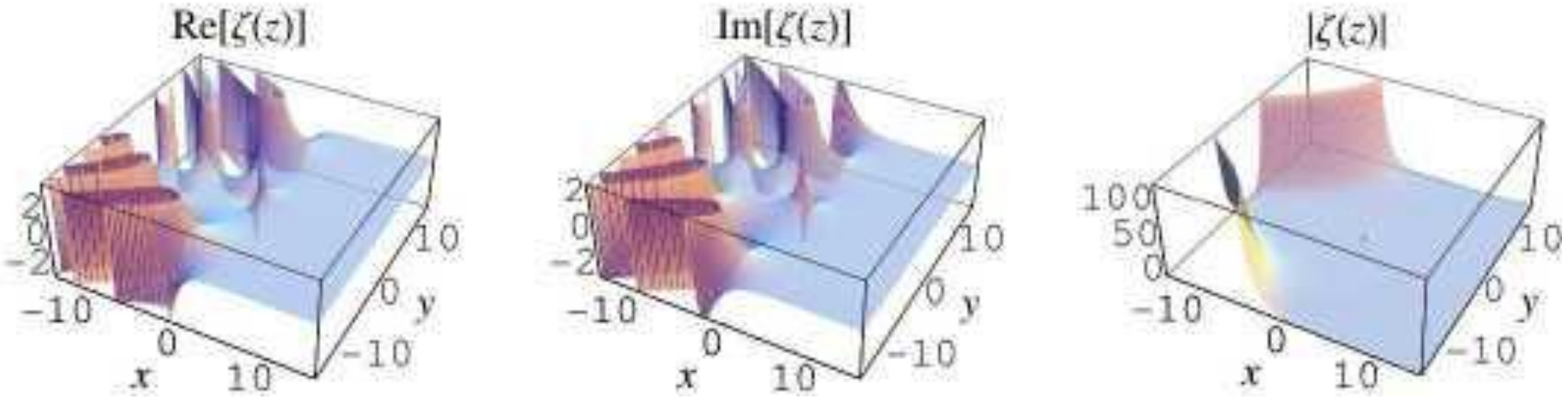


Abbildung 1: Drei Ansichten von Riemannien. Es sind die Graphen des Realteils Re ζ(z), des Imaginärteils Im ζ(z) und des Absolutbetrags |ζ(z)| der Riemannschen Zeta-Funktion. (z = x + iy ∈ ℂ.) Man erkennt die flache weite Ebene im Osten ($x > 0$), die Singularität bei $s = 1$, also $x = 1$ und $y = 0$, und die wilden Gebirge im Westen. Abb. von: http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

Die Mathematiker nennen die ‚Landschaft' den *Graphen der Riemannschen Zeta-Funktion*, in Symbolen ζ(s), wobei *s* eine so genannte komplexe Zahl[456] ist. Komplexe Zahlen umfassen neben den reellen Zahlen die Quadratwurzeln negativer Zahlen, insbesondere die Zahl $i = \sqrt{-1}$. Sie lassen sich als Punkte der Ebene darstellen, wobei eine der zwei die Ebene aufspannenden Achsen die reellen Zahlen sind. Diese ‚reelle Achse' ist die ‚Ost-West-Richtung' unserer Landschaft, die Nord-Süd-Richtung wird aufgespannt von der ‚imaginären Achse'. Die Zeta-Funktion selber nimmt selber auch komplexe Werte an, und damit ist ihr Graph vierdimensional.

[456] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.

Da man auf einem Foto leider nur drei Dimensionen darstellen kann, greifen Mathematiker zu einem Trick und stellen den Graphen (wir erinnern uns: die ‚Landschaft') in zwei Teilen dar, dem ‚Realteil' und dem ‚Imaginärteil'. Um diese beiden Ansichten auf dieselbe Landschaft zu verbinden, betrachten manche Mathematiker den 'Absolutbetrag', das ist die Entfernung eines Landschaftspunkts vom Nullpunkt, dem 'Ursprung' der komplexen Ebene. Viele werden das als Länge des entsprechenden Vektors erkennen, und deren Quadrat ist nach dem Satz des Pythagoras gegeben als die Summe der Quadrate von Real- und Imaginärteil. Insgesamt ergibt damit das Foto des Absolutbetrags einen zwar etwas verzerrten, aber dennoch wichtigen Blick auf die Landschaft von Riemannien.

Setzt man die 'Realbrille' auf, so sieht man den Teil 'Real-Riemannien'. Das ist eine eigenartige Landschaft. Im Osten erstreckt sich eine weite, ganz leicht abfallende Ebene (Abb. 2).

Re $\zeta(s)$ Im $\zeta(s)$ $|\zeta(s)|$

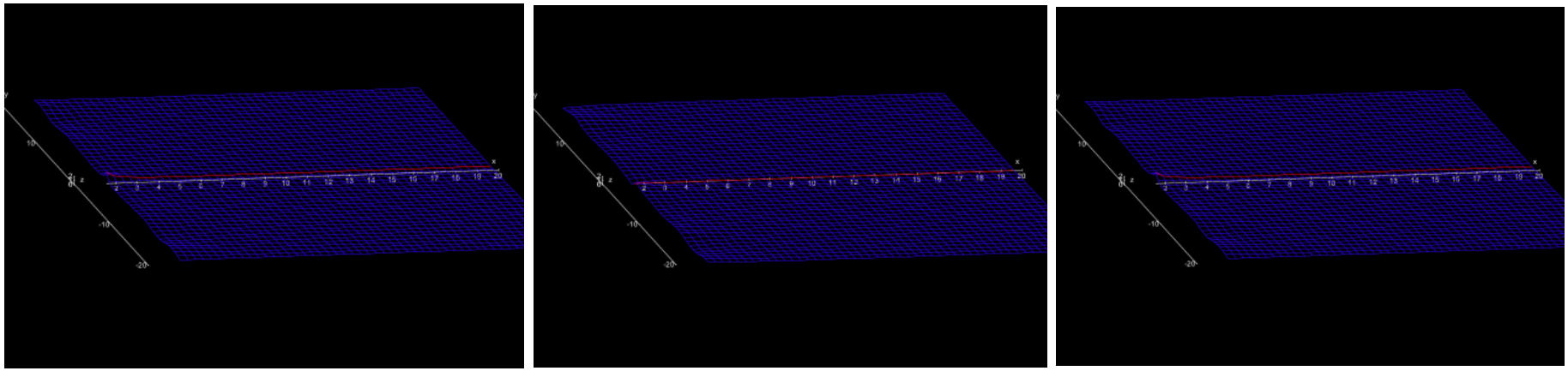


Abbildung 2: Die östliche Ebene $1 < \mathrm{Re}\, s$.

Nach Westen hin sieht man langsam ansteigende Hügelketten, die exakt in Ost-West-Richtung ausgerichtet sind.

An einer speziellen Stelle (an der Koordinate $s = 1$) befindet sich ein unendlich hoher, steil aufschießender Berg, an den sich direkt ein unendlich tiefer Abgrund anschließt. Diese Stelle sollte man tunlichst vermeiden. Aber Riemann hatte bereits herausgefunden, dass dies die einzige gefährliche (‘singuläre’) Stelle des Landes war (Abb. 3).

Re ζ(s) Im ζ(s) |ζ(s)|

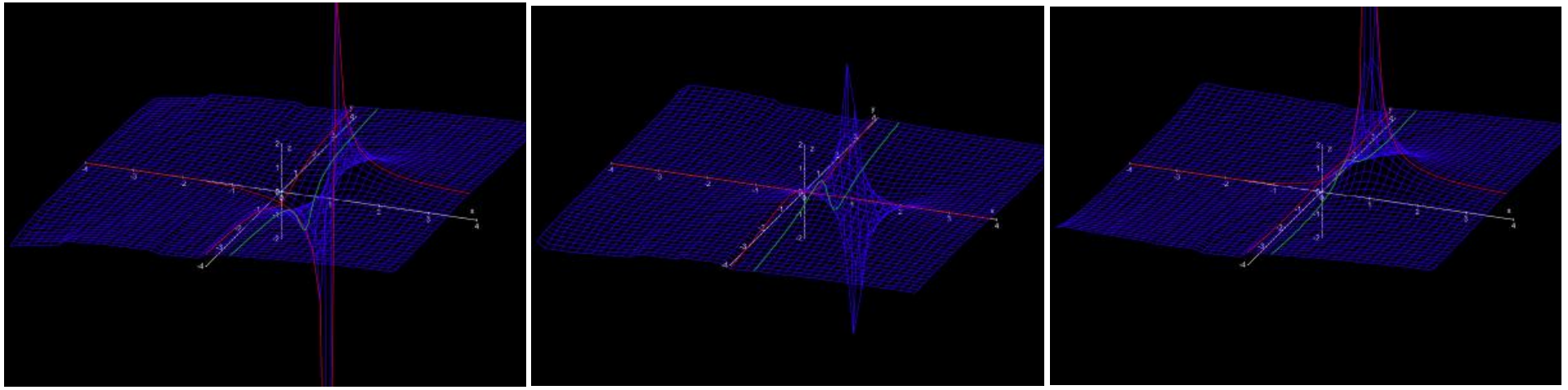


Abbildung 3: Die Umgebung der Singularität $s = 1$. Wie üblich sind die Graphen des Realteils Re ζ(z), des Imaginärteils Im ζ(z), und des Absolutbetrags |ζ(z)| der Riemannschen Zeta-Funktion dargestellt.

In der ‘Realansicht’ ist der Abgrund westlich des Berges, in der ‘Imaginäransicht’ ist er nördlich des Berges.

Ab dem nullten Längengrad in Süd-Nord-Richtung (der imaginären Achse $s = iy$) ändert sich der Charakter der Landschaft plötzlich. Die sanften Hügelketten brechen abrupt ab und münden in eine zunächst sehr ruhige, sanft gewellte Ebene (Abb. 4).0/

Re ζ(s) Im ζ(s) |ζ(s)|

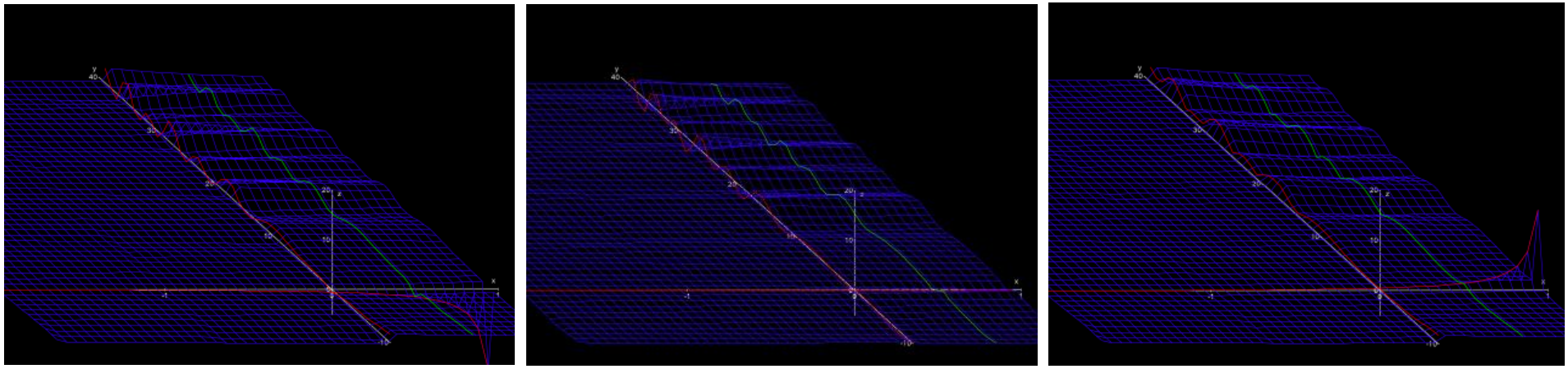


Abbildung 4: Der abrupte Landschaftswechsel an der imaginären Achse Re *s* = 0 (dem ‘nullten Längengrad’). Die rote Linie in Nord-Süd-Richtung ist die Projektion der Imaginärachse *y* auf den Graphen der Zeta-Funktion, die rote Linie in West-Ost-Richtung ist die Projektion der reellen Achse *x*.

Der friedliche Eindruck dieser neuen Landschaftsform trügt allerdings, im Nordwesten und Südwesten türmen sich gewaltige Gebirge mit steilen Gipfeln und zerklüfteten Abgründen (Abb. 5). Im Gegensatz zu der Singularität *s* = 1 jedoch sind die Berge und Abgründe nicht unendlich hoch bzw. tief, es sind keine Singularitäten. Sie umschließen ein nach Westen schnell enger werdendes Tal um den nullten Breitengrad (die ‚reelle Achse‘ Im *s* = 0).

Re ζ(s) Im ζ(s) |ζ(s)|

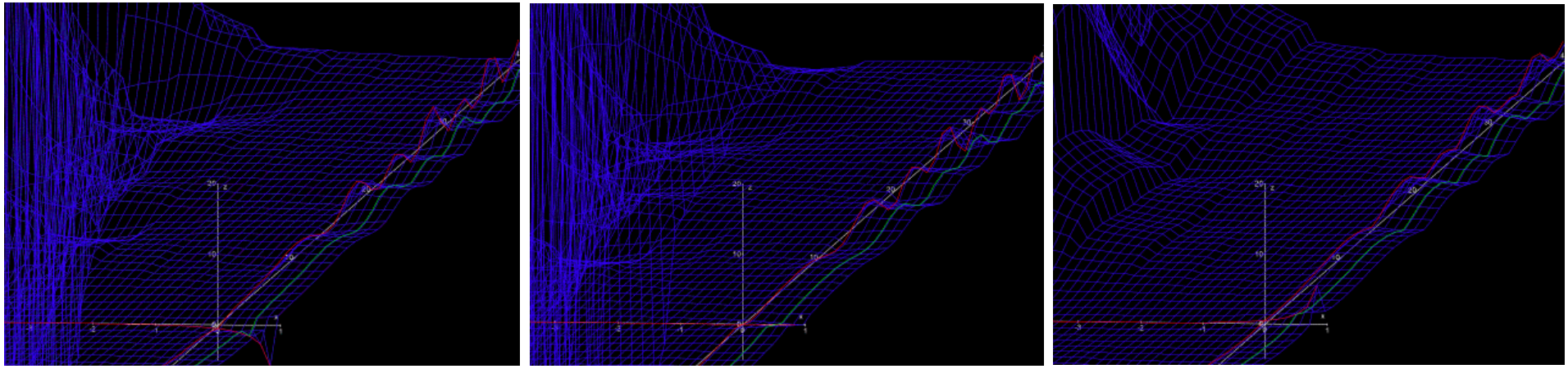


Abbildung 5: Der Beginn der gewaltigen Gebirgszüge im Nordwesten. Südlich des nullten Breitengrades erstreckt sich ein fast identisch ausdehnendes zerklüftetes Gebirge.

Das große Rätsel des Landes Riemannien

Das größte Rätsel der Landschaft von Riemannien ist die Verteilung der der ‘Nullstellen’. Damit meinen die Mathematiker diejenigen Orte, die sich gleichzeitig im Real- als auch im Imaginärteil genau auf Höhe Normalnull (NN) befinden. Bei weitem die meisten Stellen Riemanniens sind nicht NN. So ist die gesamte Ebene östlich der Singularität $s = 1$ über NN, und auch die zerklüfteten Gebirge im Westen sind nie gleichzeitig im Real- und Imaginärteil NN. Allein auf zwei Geraden kennt man solche Nullstellen, der reellen Achse und der ‘kritischen Geraden’. Auf der reellen Achse Im $s = 0$, also dem nullten Breitengrad, sind genau alle negativen geraden Werte von s Nullstellen,

$$s = -2, -4, -6, \ldots$$

Das sind die so genannten ‚trivialen Nullstellen‘. Die kritische Gerade dagegen ist eine Parallele der imaginären Achse (ein ‚Längengrad‘ in Süd-Nord-Richtung), nämlich alle Zahlen mit Realteil 1/2, d. h. Re s = 1/2. In den Abbildungen ist die kritische Linie grün eingezeichnet.

Man weiß heute nur, dass alle nichttrivialen Nullstellen auf dem ‚kritischen Streifen' zwischen den Längengraden 0 und 1 (also $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$), dass es auf der kritischen Geraden unendlich viele Nullstellen gibt, und dass mindestens 40% aller Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen.

Re ζ(s) Im ζ(s) |ζ(s)|

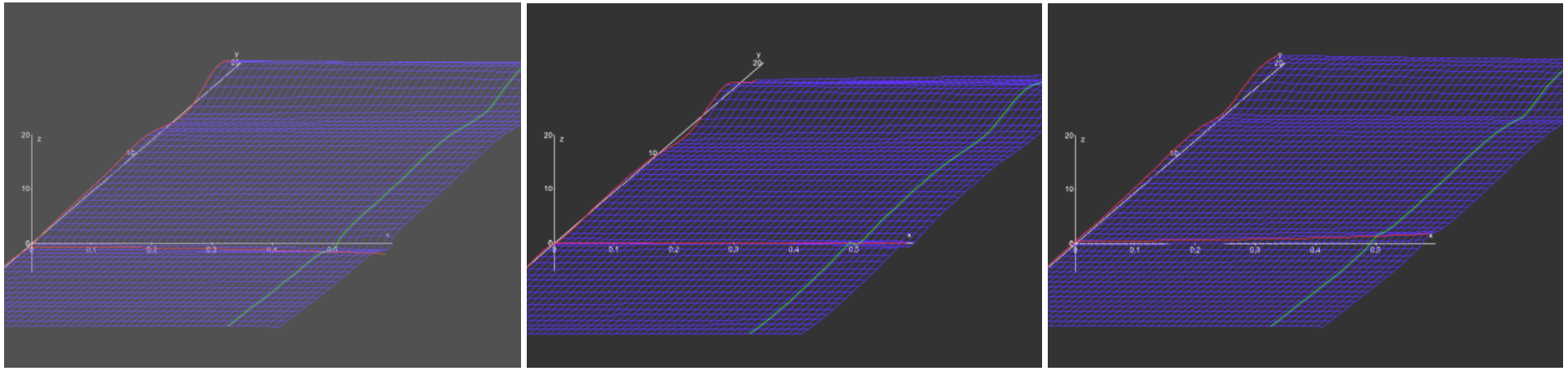


Abbildung 6: Der kritische Streifen $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$. Die rote Linie in Nord-Süd-Richtung ist die Projektion der Imaginärachse *y* auf den Graphen der Zeta-Funktion, die rote Linie in West-Ost-Richtung ist die Projektion der reellen Achse *x*. Die kritische Linie Re s = 1/2 ist grün.

Doch niemand weiß bis heute, ob wirklich *alle* nichttrivialen Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen. Das ist die *Riemann'sche Vermutung*[457]. Dieses Rätsel ist den Mathematikern so wichtig, dass es für denjenigen, der streng beweisen kann, *dass alle nichttrivialen Nullstellen der Zeta-Funktion auf der kritischen Geraden liegen*, eine Belohnung von 1 Million $ gibt!

[457] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.

Eigenartigerweise gibt es wohl keine Belohnung, wenn die Vermutung falsch ist und jemand mindestens ein Gegenbeispiel findet: Sollte also jemand eine nichttriviale Nullstelle finden, die *nicht* auf der kritischen Geraden liegt, so ist das Rätsel zwar gelöst, aber es gibt *keine* Belohnung ...

Wenn Sie das Land Riemannien auf eigene Faust erkunden wollen, so können Sie eine Animation starten, die die Landschaft (zumindest für relativ kleine Werte von *s*) zeigt. Sie brauchen dazu nur die Starttaste zu drücken:

Literatur

-
- Marcus du Sautoy: *Die Musik der Primzahlen. Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik.* Verlag C. H. Beck, München 2004

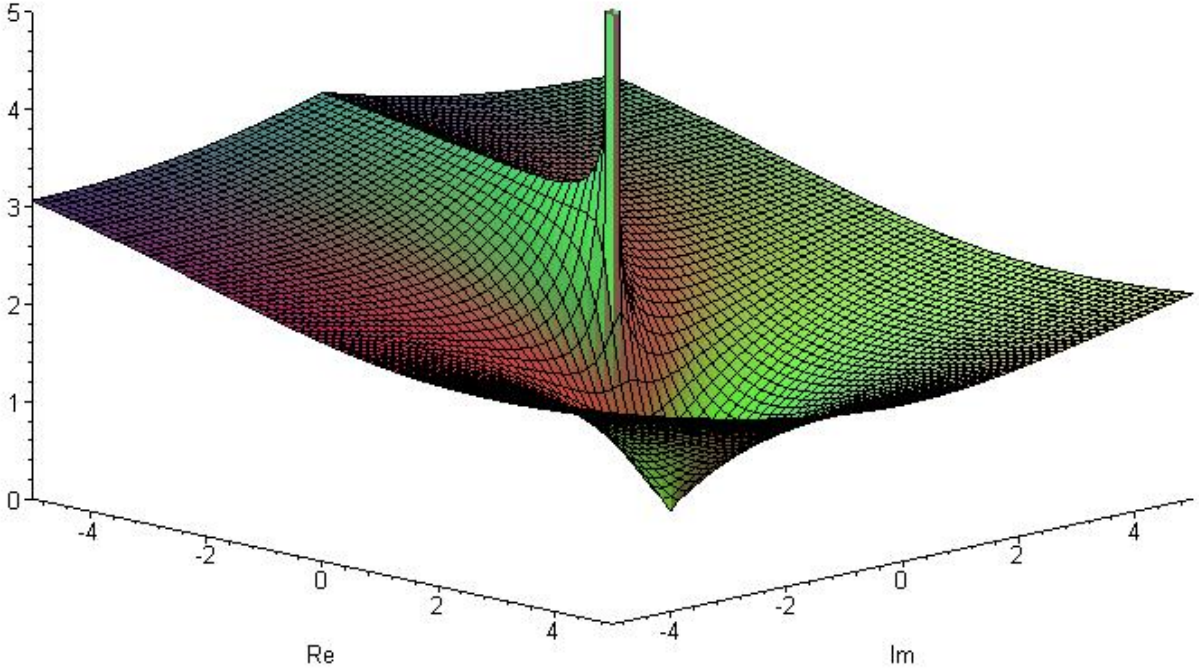
Web-Links

-
- http://www.fh-lueneburg.de/u1/gym03/homepage/chronik/riemann/riemann.htm - Leben und Werk von Bernhard Riemann
- http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/ - Biographie und Originalarbeiten von Bernhard Riemann
- http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/ - Die Riemannsche Vermutung als eines der Milleniumsprobleme des *Clay Mathematics Institute*, für deren Lösung es jeweils 1 Million $ Belohnung gibt.

© de Vries 2004“[458]

Im [ζ(z)]: Dem „trivialen“ Teil (rot) der Singularität bei Vries entspricht die analoge Singularität des kompexen Logarithmus[459].

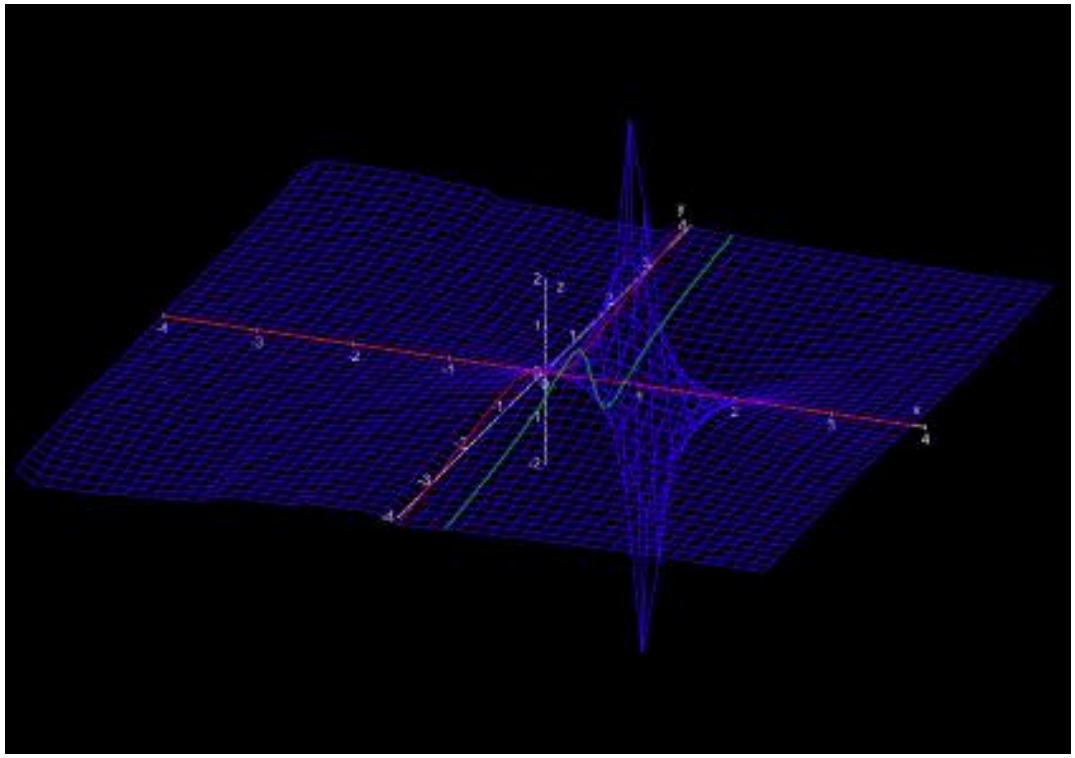
[458] Vries, Das Rätsel desl Landes Riemannien, in: < URL >.
[459] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.



Betrag von *lnz*[460]

Allerdings ist bei Vries der „Realteil"[461] Re [ζ(z)] der Zetafunktion im Vergleich mit dem „Betrag" des kompexen Logarithmus[462] Lnz um 180° gedreht, also gespiegelt[463].

[460] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.
[461] Vries, Das Rätsel desl Landes Riemannien, in: < URL >.
[462] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.

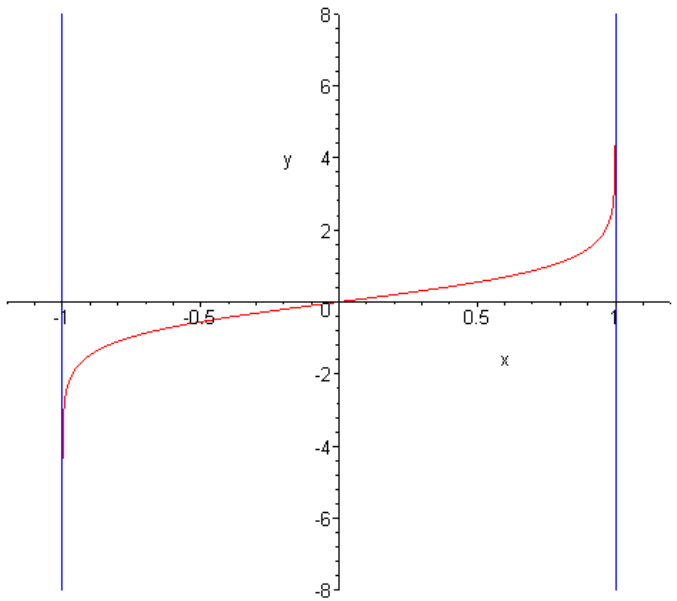


Der kritische Teil von Im [ζ(z)] entspricht Areatangens Hyperbolicus[464] (Umkehrfunktion von Tangens Hyperbolicus).

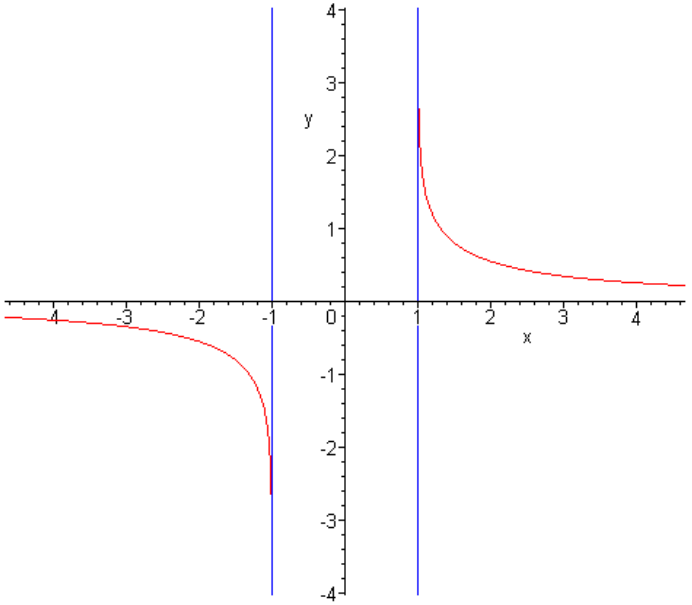
---

[463] Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht."

[464] Luderer/Nollau/Vetters 47; Nollau, Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler, in: < URL > 1; Wikipedia, Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus, In: < URL > Versions-ID der Seite: 53519345: „$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ und $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$".



Graph der Funktion artanh(x)[465]



Graph der Funktion arcoth(x)

„**Areatangens Hyperbolicus** und **Areakotangens Hyperbolicus** sind die Umkehrfunktionen von Tangens Hyperbolicus und Kotangens Hyperbolicus und damit Area-Funktionen.

Schreibweisen:

$y = \operatorname{artanh}(x) = \tanh^{-1}(x)$
$y = \operatorname{arcot}(x) = \coth^{-1}(x)$

[465] Luderer/Nollau/Vetters 47; Nollau, Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler, in: < URL > 1; Wikipedia, Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus, In: < URL > Versions-ID der Seite: 53519345.

Letztere wird seltener benutzt, um die Verwechselung mit dem Kehrwert des hyperbolischen (Ko)Tangens zu vermeiden. […]

Spezielle Werte

$$\operatorname{artanh}(0) = 0 \quad \operatorname{artanh}(0) = -\frac{1}{2}\pi i$$
$$\operatorname{artanh}(i) = \frac{1}{4}\pi i \quad \operatorname{arcoth}(i) = -\frac{1}{4}\pi i$$

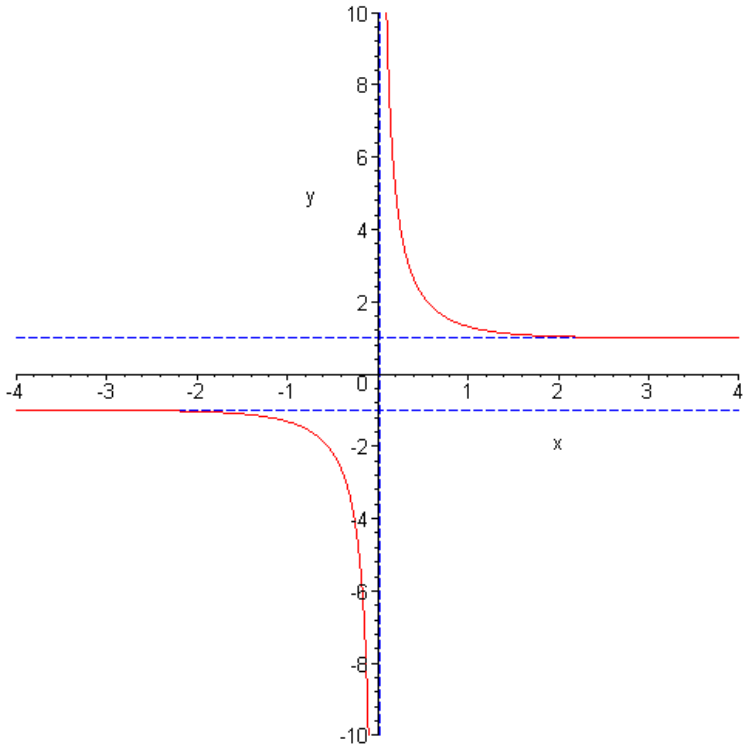
[...] Taylor- und Laurent-Reihen der beiden Funktionen sind

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

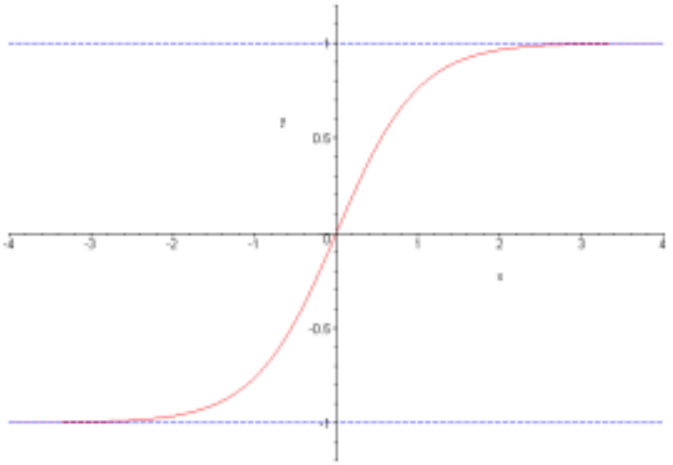
$$\operatorname{arcoth}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-2k+1}}{2k-1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-2k+1}}{2k-1 \cdot x^{2k+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots$$ "[466]

Die Funktion Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus[467] sind die Umkehrfunktionen von Kotangens Hyperbolicus[468], und dem „kritischen" Teil die Funktion Tangens Hyperbolicus[469].

[466] Wikipedia, Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus, In: < URL > Versions-ID der Seite: 53519345.
[467] Wikipedia, Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus, In: < URL > Versions-ID: 53519345; vgl Wikipedia, Areasinus Hyperbolicus und Areakosinus Hyperbolicus, In: < URL >, Versions-ID: 56948581.
[468] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >.
[469] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.



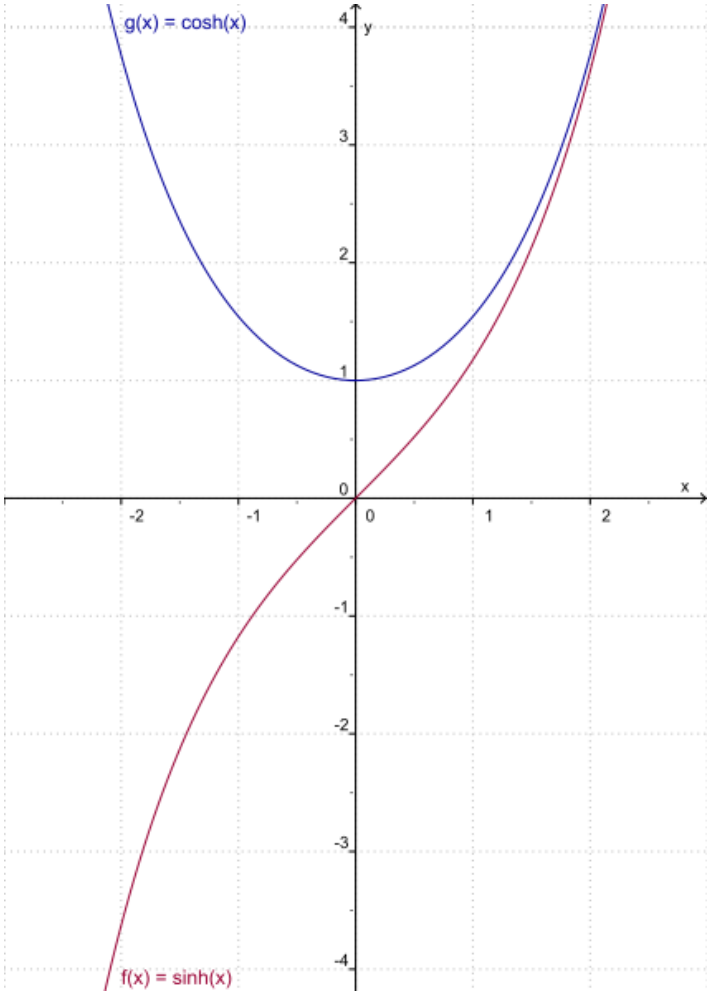
coth(x)



tanh(x)

Der (grüne) Aerotangens Hyperbolicus (und (rote) Areokotangens Hyperbolicus)[470] (Im [ζ(z)] bei Vries) lässt sich (sihe nächste Grafik) in Sinus Hyperbolicus (rot) und Cosinus Hyperbulikus (blau) umrechnen[471] bzw. dort als Überlagerung darstellen.

[470] Nollau, Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler, in: < URL > 1; Wikipedia, Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus, In: < URL > Versions-ID der Seite: 53519345.
[471] Luderer/Nollau/Vetters 47; Wikipedia, Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus, In: < URL >; Lang/Pucker 600 Abb. B.7.



$$\operatorname{artanh}\left(\frac{e^4-1}{e^4+1}\right)=2$$

$$\operatorname{artanh}\left(\frac{e^2-1}{e^2+1}\right)=1$$

Die Kurve wird hier mit den Potenzen von e gebildet[472], die in der Eulerschen Identität[473] in die trigonometrischen Funktionen der Hyperbel übergeht[474]: $\tanh x = \sinh(x)/\cosh(x)$.

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-i\sin(ix)$$

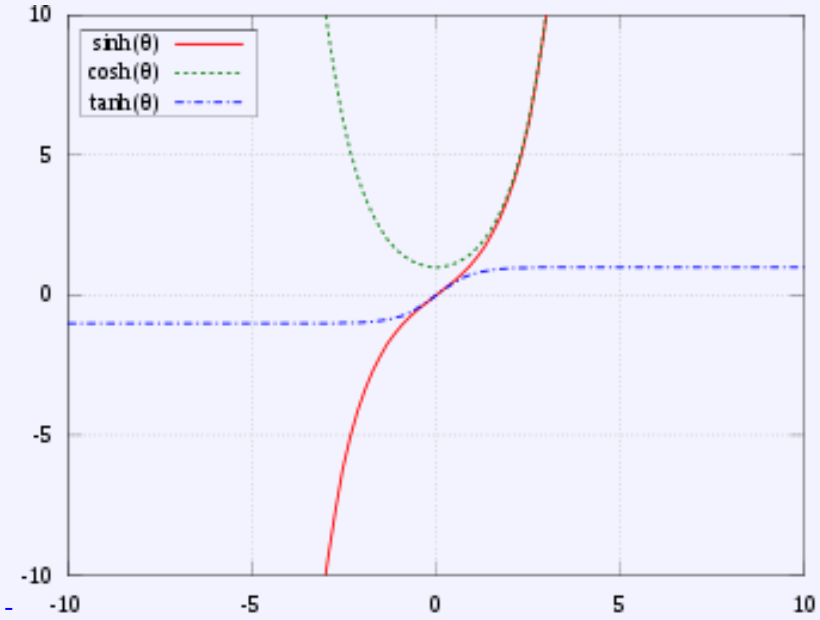
$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cos(ix)$$

Die grafische Beschreibung des „kritischen" Imaginärteils Im [ζ(z)] der Singularität von Riemanns Zetafunktion (grün) bei

[472] Lang/Pucker 599; Nollau, Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler, in: < URL > 1; Wikipedia, Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus, In: < URL > Versions-ID der Seite: 53519345.
[473] Lang/Pucker 595; Wikipedia, Eulersche Identität. In: URL < URL >.
[474] Lang/Pucker 599; Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >; Meschkowski 122 ff; Westermann 407 f; Hainzl 142 ff; Knopp 431 ff.

Vries entspricht in der nachstehenden Grafik tanh(θ), während das „triviale" (rote) Umfeld sinh(θ) entspricht[475].

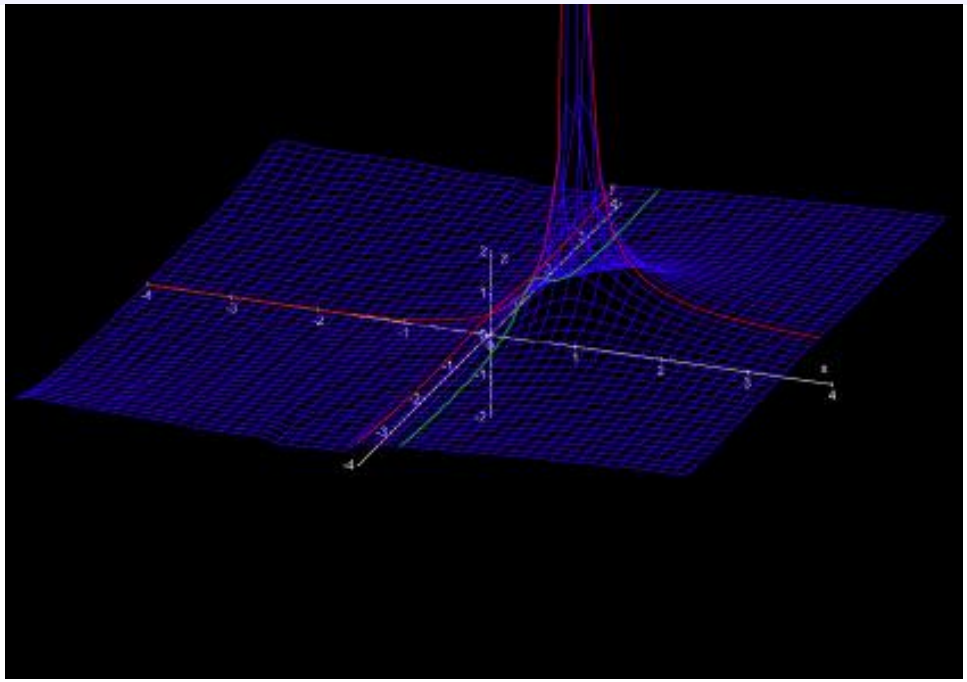
„sinh und cosh sind für alle komplexen Zahlen definiert[476] und auf dem gesamten Gebiet der komplexen Zahlen holomorph. Die übrigen Hyperbelfunktionen haben Pole auf der imaginären Achse."[477]



Sinus Hyperbolicus[478] sinh(θ) (grün) und Kosinus Hyperbolicus cosh(θ) (rot) haben keine Pole auf der imaginären Achse, wohl aber Tangens Hyperbolicus tanh(θ)[479] (siehe auch artanh). Naturgemäß

[475] Lang/Pucker 599 f; Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >; Gnörich, Höhere Mathematik, Formelsammlung, in: < URL > 41 Abbildung 5.
[476] Westermann 407 f; Knopp 431 ff; Hainzl 142 ff; Meschkowski 122 ff; Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.
[477] Wikipedia, Hyperbelfunktion, In: < URL >, Luderer/Nollau/Vetters 47.
[478] Luderer/Nollau/Vetters 47; Wikipedia, Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus, In: < URL >.

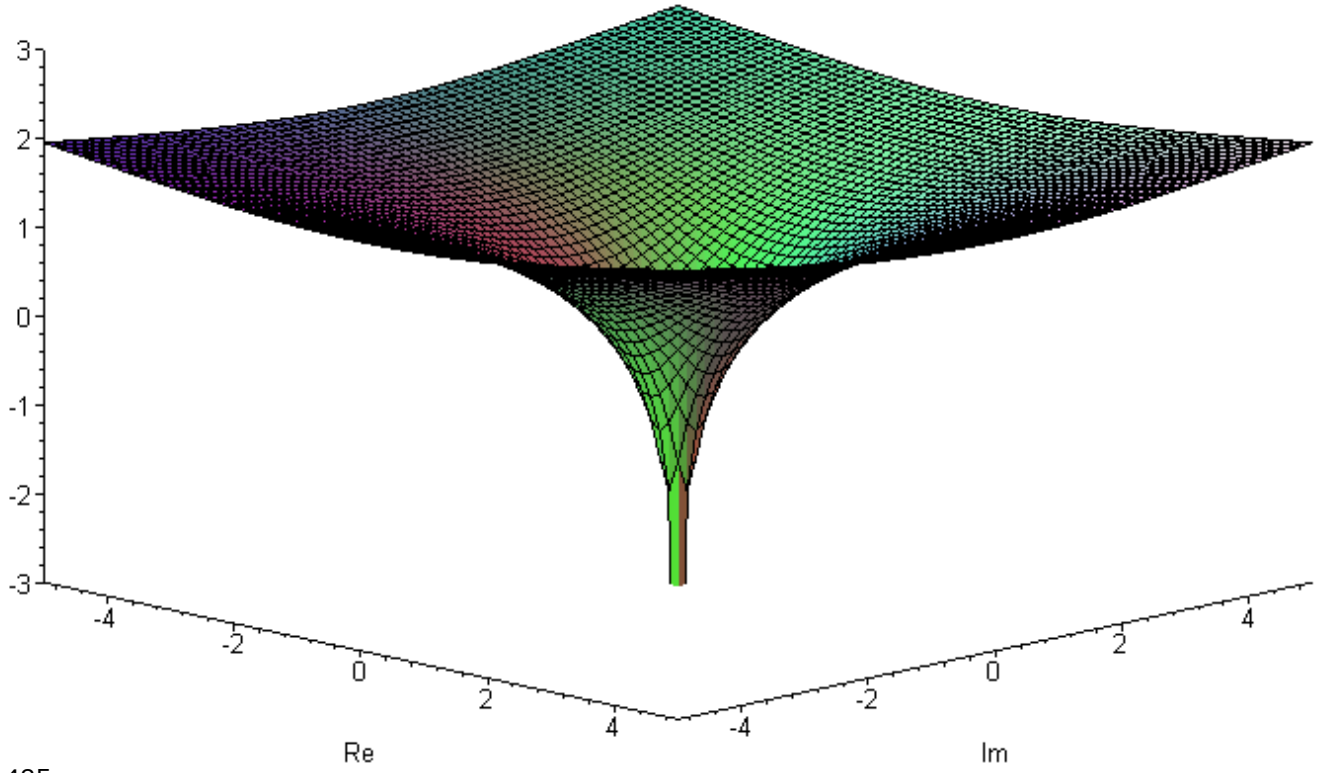
entspricht der Absolutbetrag |ζ(z)| des „kritischen" Teils (grün) der Riemannschen Zetafunktion in der Grafik von Vries[480] Sekans Hyperbolicus[481] sech(θ) und der triviale Teil der Funktion Kosekans Hyperbolikus csch(θ) und/oder Kotangens Hyperbolicus coth(θ)



Auch der Absolutbetrag |ζ(z)| des „kritischen" Teils (grün) der Riemannschen Zetafunktion in der Grafik von Vries[482], entspricht dem Realanteil lnz der Funktion des komplexen Logarithmus[483], allerdings um 180° gedreht, das heißt gespiegelt[484]:

---

[479] Luderer/Nollau/Vetters 47; Wikipedia, Hyperbelfunktion, In: < URL >.
[480] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3: „Absolutbetrag |ζ(z)|".
[481] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >

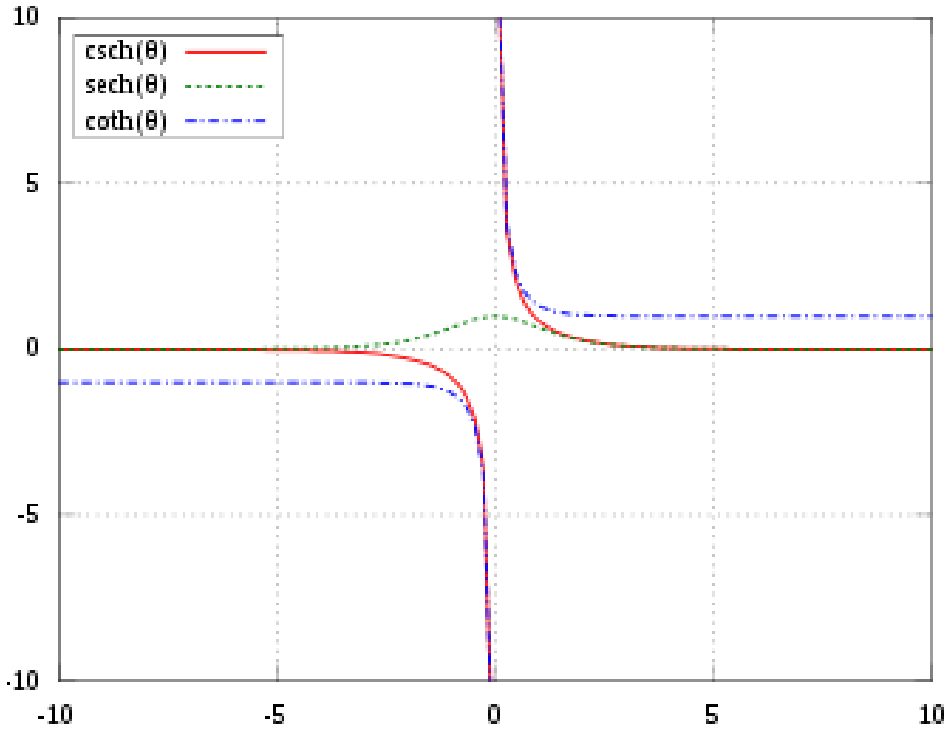


Realanteil von *lnz*[485]

Zugleich ist der der Absolutbetrag |ζ(z)| des „kritischen" Teils (grün) der Riemannschen Zetafunktion in der Grafik von Vries[486] analog (zu verglichen mit der nachstehenden Grafik[487]) der Funktion Se-

[482] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3: „Absolutbetrag |ζ(z)|".
[483] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.
[484] Westermann 196.
[485] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.
[486] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.

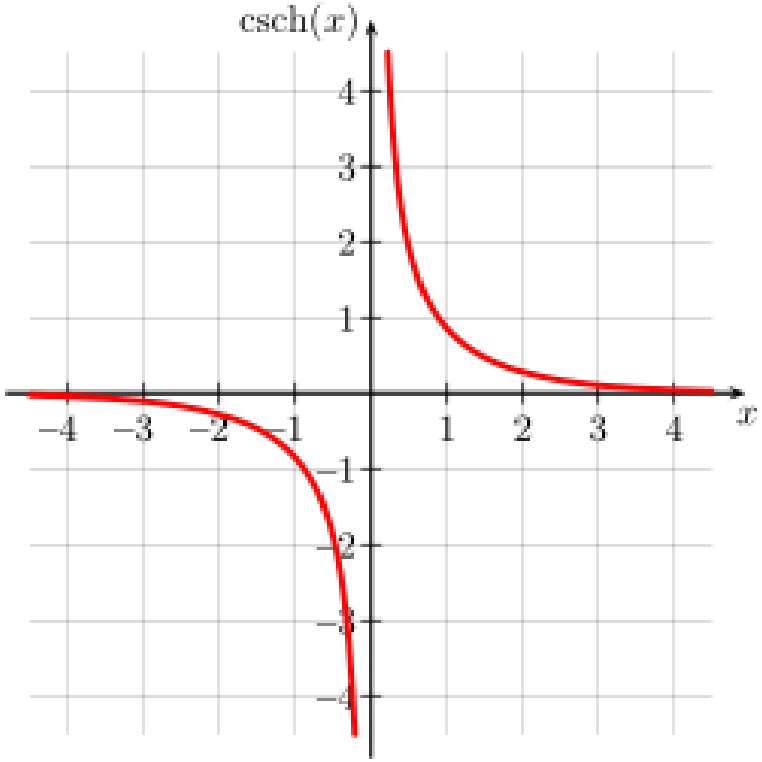
kans Hyperbolicus[488] sech(θ) und der triviale Teil der Funktion Kosekans Hyperbolikus csch(θ) und/oder Kotangens Hyperbolicus coth(θ), die sich außerhalb dem „kritischen", also im „trivialen" Bereich bei Vries, decken.



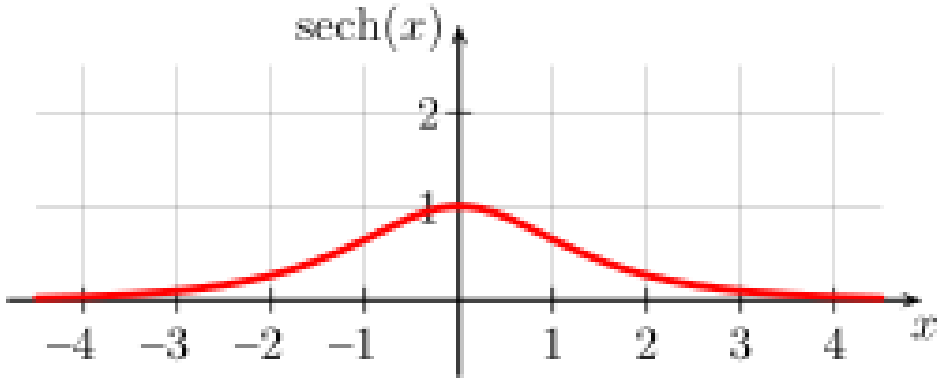
Aus der zusammengesetzten Funktion im Bild[489] lässt sich sech(θ) und csch(θ) auch gesondert darstellen[490]

---

[487] Wikipedia, Hyperbelfunktion, in: < URL >.
[488] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >
[489] Wikipedia, Hyperbelfunktion, in: < URL >.

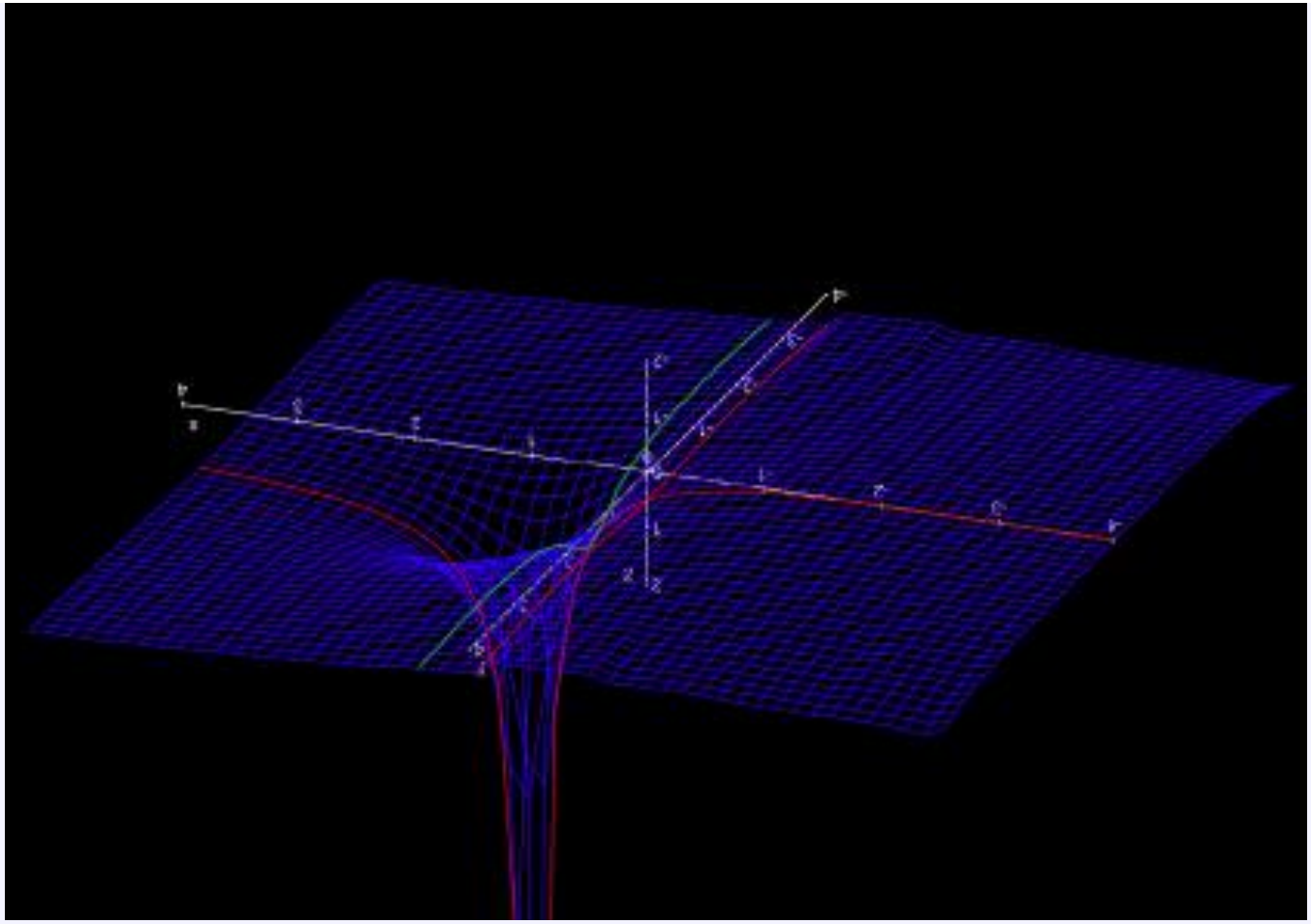


English: hyperbolic cosecant
Deutsch: Kosekans Hyperbolicus



English: hyperbolic secant
Deutsch: Sekans Hyperbolicus

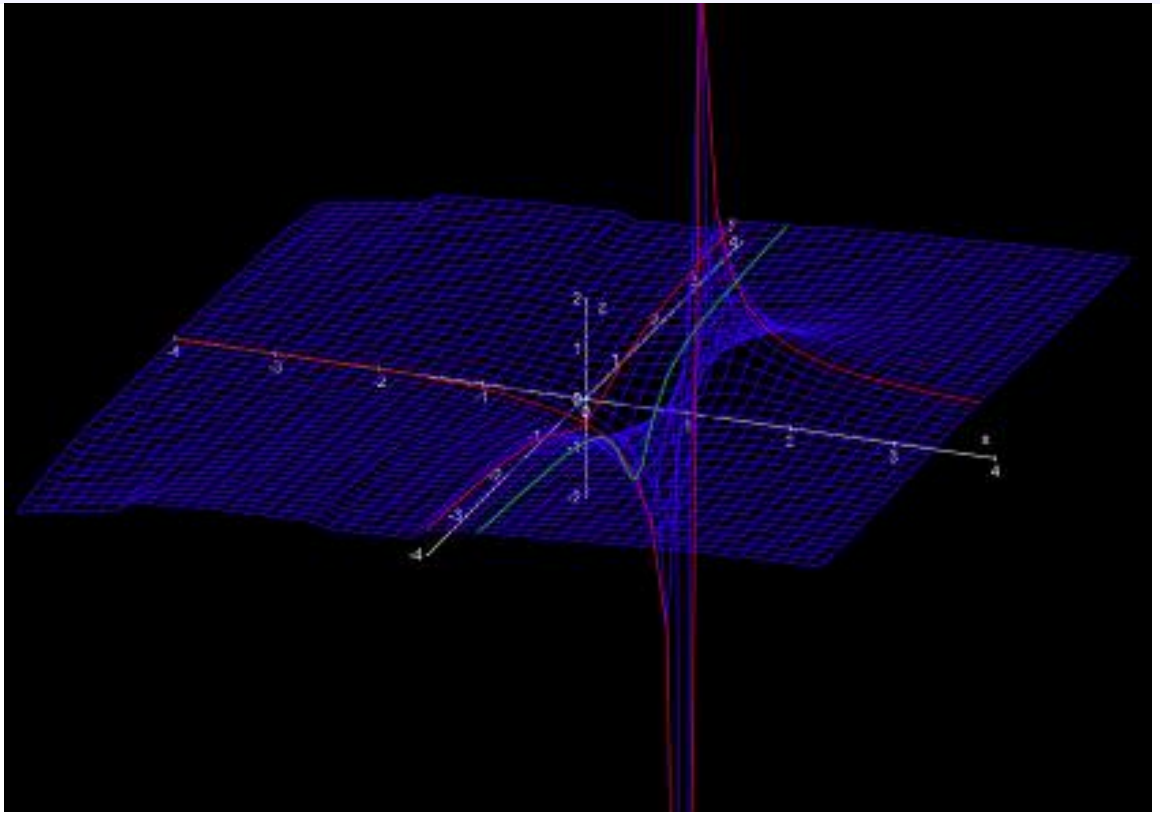
[490] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >.



Die Drehung der Grafik Absolutbetrags |ζ(z)| von Vries um 180° zeigt ein besseres Bild vom „kritischen" Teil (grün) der Riemannschen Zetafunktion[491], welche die Form eines Trichters angenommen hat, von dem noch später, am Schluss der Abhandlung, zu sprechen sein wird. In der um 180° ge-

[491] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.

drehten Grafik des Absolutbetrags |ζ(z)| zeigt sich eine Übereinstimmung der Funktion des „kritischen" Teils (grün) mit der Funktion des „kritischen" Teils des Realteils Re [ζ(s)] bei Vries.



Das bedeutet, dass zum besseren Verständnis bzw. um der Anschaulichkeit willen auch, bzw. eigentlich der Realteil Re [ζ(s)] der Funktion um 180° gedreht werden muss, um – nach der „Spiegelung"[492] – die Übereinstimmung im „kriktischen" Teil mit dem Absolutbetrag |ζ(z)| zu zeigen[493],

[492] Westermann 196.

das heißt, dass der „kritische" Realteil Re [ζ(s)] der Riemannschen Zetafunktion in der Grafik von Vries[494] ist eine Spiegelung[495] (Drehung um 180°) des Absolutbetrags[496] |ζ(z)| aus der Ebene der Natürlichen Zahlen, die nur positive Werte annehmen, in die Ebene der Reellen Zahlen, die, wie auch hier, negative Werte annehmen können. Demnach erweist sich für die Primzahlen, deren Beziehung zur Riemanschen Zetafunktion vorausgesetzt wird[497], die Ebene des Absolutsbetrags, also die der Natürlichen Zahlen, als das Original, und der Realteil Re [ζ(s)] ist lediglich eine Spiegelung[498]. Der Absolutbetrag |ζ(z)| ist die Bezugsebene, wo die Natürlichen Zahlen zu finden sind, und sämtliche Primzahlen. Die können bei Riemann gleichsam im Spiegel betrachtet werden[499]. Der „kritische" Teil im Absolutbetrag |ζ(z)| ist identifziert als die Funktion sech(θ) (Sekans hyperbolikus[500]), die also sonach im Realteil Re [ζ(s)] der gleichen Funktion um 180° gedreht (gespiegelt) wurde[501].

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$$

---

[493] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Riemann kam auf seine Vermutung bei der Untersuchung des Produkts der Zetafunktion mit der Gammafunktion

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

die bei der Vertauschung von s mit $(1-s)$ invariant ist, das heißt, sie erfüllt die Funktionalgleichung:

$$\xi(s) = \zeta(1-s)$$

Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung ebenfalls invariant."

[494] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3: „Re ζ(s)".

[495] Westermann 196.

[496] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.

[497] Trost 62 ff; Vgl Landau I 234 ff.

[498] Westermann 196; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.

[499] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.

[500] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >; Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.

[501] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.

$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$$

Auch der numerische Teil der Funktion zeigt die nämliche Spiegelung[502] von Sinus Hyperbolicus[503] um 180° in der reziproken Form[504].

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \sin(ix)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$$

Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbulikus lassen sich in Tangens Hyperbolicus Kotangens Hyperbolicus[505] (Im [ζ(z)] bei Vries) umrechnen umrechnen[506] bzw. dort als Überlagerung darstellen.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

[502] Westermann 196; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Gnörich, Höhere Mathematik, Formelsammlung, in: < URL > 41 Abbildung 5.
[503] Wikipedia, Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus, In: < URL >.
[504] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung ebenfalls invariant.“
[505] Wikipedia, Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus, In: < URL >; Gnörich, Höhere Mathematik, Formelsammlung, in: < URL > 41.
[506] Wikipedia, Tangens Hyperbolicus und Kotangens Hyperbolicus, In: Wikipedia, < URL >.

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Die Schreibweise

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

erlaubt für $e^x - e^{-x} = e^{2x} - 1 = \sinh(x)$ zu schreiben[507], sodass

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i\sin(ix) = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$$

also grob angenähert $\sinh x = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$ als Lösungsansatz der Riemannschen Hypothese[508] gelten kann, oder analog

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$$

Aus[509]

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$$

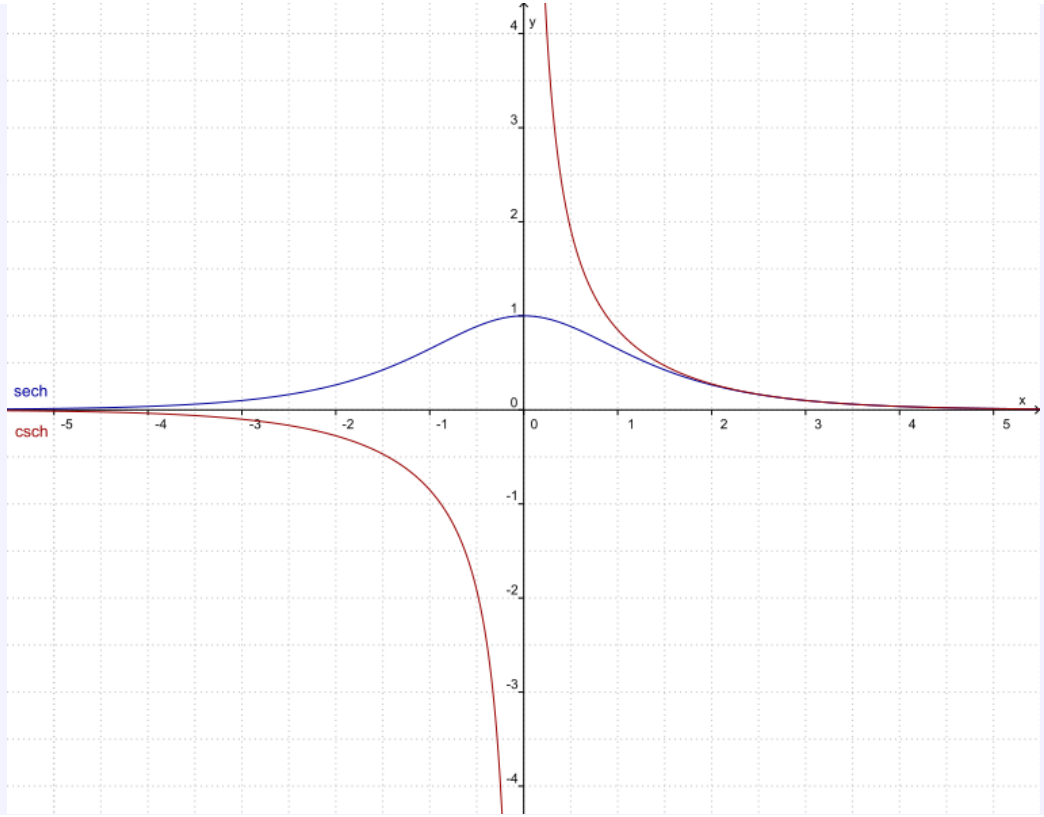
wird

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)}$$

[507] Westermann 407 f; Hainzl 142 ff; Knopp 431 ff; Meschkowski 122 ff.
[508] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[509] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.

„Sekans Hyperbolicus (blau) und Kosekans Hyperbolicus (rot)

Die Funktionen **Sekans Hyperbolicus** (sech) und **Kosekans Hyperbolicus** (csch) sind Hyperbelfunktionen.



Definitionen

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$$

Eigenschaften

	Sekans Hyperbolicus	Kosekans Hyperbolicus
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty;\ x \neq 0$
Wertebereich	$-\infty < f(x) \leq +\infty$	$-\infty < f(x) < +\infty;\ f(x) \neq 0$
Periodizität	Keine	Keine
Monotonie	$x < 0$ streng monoton steigend $x > 0$ streng monoton fallend	$x > 0$ streng monoton fallend $x < 0$ streng monoton fallend
Symmetrien	Spiegelsymmetrie zur y-Achse	Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
Asymptote	$F(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$	$F(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$
Nullstellen	Keine	Keine
Sprungstellen	Keine	Keine
Polstellen	keine	$x = 0$
Extrema	Maximum bei $x = 0$	Keine
Wendepunkte	$r = \pm\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\right)$	Keine

Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktion sind die entsprechende Areafunktionen:

x = arsech y
x = arcsch y

Ableitungen

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x = -\operatorname{csch} x \cdot \sqrt{1+\operatorname{csch}^2 x}$$

Integrale

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \arctan(\sinh x)$$

$$\int \operatorname{csch} x \, dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|$$

Reihenentwicklungen

$$\operatorname{sech} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(8k+4)\pi}{(2k+1)^2\pi^2 + x^2}$$

$$\operatorname{csch} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{k^2\pi^2 + x^2}$$

Komplexes[510] Argument

[510] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.

$$\operatorname{sech}(x+iy) = \frac{2\cosh(x)\cos(y)}{\cosh(2x)+\cos(2y)} + i\frac{-2\sinh(x)\sin(y)}{\cosh(2x)+\cos(2y)}$$

$$\operatorname{sech}(iy) = \sec(y)$$

$$\operatorname{csch}(x+iy) = \frac{2\sinh(x)\cos(y)}{\cosh(2x)-\cos(2y)} + i\frac{-2\cosh(x)\sin(y)}{\cosh(2x)-\cos(2y)}$$

$$\operatorname{csch}(iy) = -i\csc(y)$$

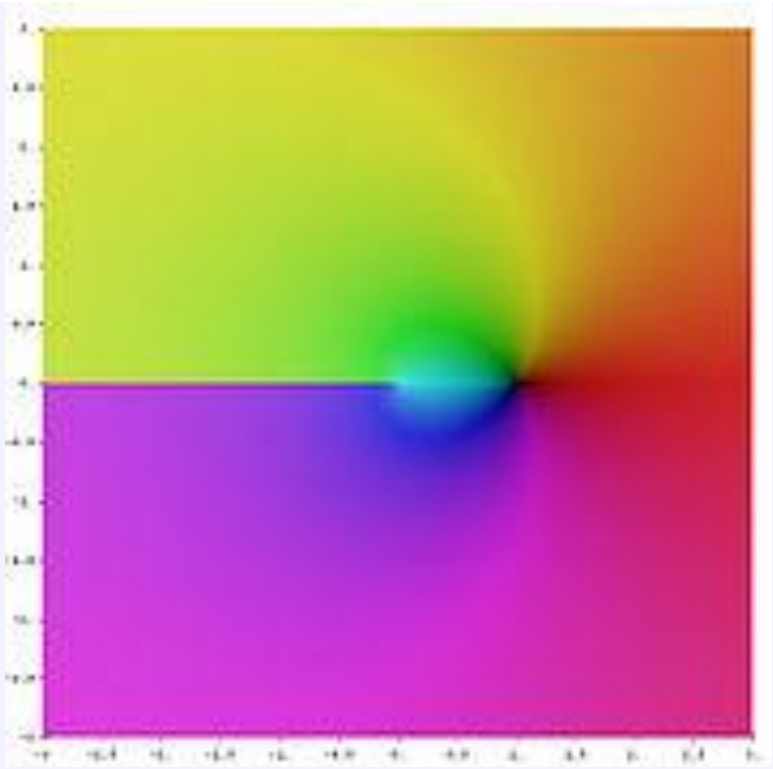
Siehe auch
Trigonometrische Funktionen
Kreis- und Hyperbelfunktionen.
Weblinks
Eric W. Weisstein: Hyperbolic Secant und Hyperbolic Cosecant auf MathWorld"[511]

Der gezeigte Lösungsansatz ist zumindest die Lösung der Grafik von Vries[512] zum Rimannschen Formel, womit dieser Teil der Richtigkeit so weit gezeigt wäre. Es gibt noch andere Lösungsansätze[513].

[511] Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >; Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[512] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.
[513] Wikipedia, Primorial, In: Wikipedia, Versions-ID: 54990259, Bearbeitungsstand: 6. Januar 2009, < URL >: Etwas näher kommt dem Lösungsansatz das mit n# bezeichnete Primorial (Produkt aller Primzahlen bis n) gilt die Abschätzung $n\# \leq 4^n$. Ferner gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\#} = e$. Für Werte $n < 10^{11}$ sind die Werte kleiner als e, aber mit größerem Wert büerschreiten sie den Wert e und oszillieren unendlich oft darum.

Die Analogie zur Grafik des Logarithmus Zeigt die Überlagerung bzw. den Logarithmus als Grundlage der Zetafunktion[514].

„Riemannsche Fläche der komplexen Logarithmus-Funktion, die Blätter entstehen aufgrund der Mehrdeutigkeit



Hauptwert des Logarithmus = *lnz*

[514] Trost 62 ff.

Analog zur reellen Definition heißt jede komplexe[515] Zahl *w*, welche die Gleichung

$$e^w = z$$

erfüllt, ein *natürlicher Logarithmus* von *z*. Dies ist im Unterschied zum reellen Logarithmus jedoch nicht eindeutig, da

$$e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$$

gilt, siehe dazu auch Eulersche Identität. Hat man also einen Logarithmus *w* von *z* gefunden, so ist damit auch

$$w' = w + 2k\pi i$$

ein Logarithmus von z, da gilt:

$$e^{w\prime} = e^{w+2k\pi i} = e^w \cdot e^{2k\pi i} = e^w \cdot 1 = z$$

Um Eindeutigkeit zu erreichen, schränkt man *w* auf einen Streifen in der komplexen Zahlenebene ein. Man kann z. B. den Streifen

$$\{w \in \mathbb{C}: -\pi < Im\, w \leq \pi\}$$

verwenden. Eine komplexe Zahl aus diesem Streifen heißt *Hauptwert* des Logarithmus und man schreibt $w = \ln z$. Stellt man *z* in Polarkoordinaten dar, so erhält man eine einfache Darstellung des *k-ten Zweigs* der Logarithmusfunktion:

$$w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Für $k = 0$ hat man dann den *Hauptzweig* des Logarithmus:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

---

[515] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.

ln ist nicht stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Entfernt man jedoch die negative reelle Achse, so ist ln auf dem Gebiet

$$\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$$

stetig und sogar holomorph. Allgemeiner gilt dies für alle einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Mit dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus kann man den Logarithmus von negativen, reellen Zahlen bestimmen:

$$\ln(-x) = \ln|-x| + i\arg(-x) = \ln x + i\pi, x \in \mathbb{R}^+.$$

Man muss jedoch beachten, dass im Komplexen die Rechenregeln für Logarithmen nicht immer gelten, sondern nur noch modulo $2\pi i$. Es gilt dann beispielsweise nicht notwendig

$$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y),$$

wegen

$$\ln(-1) + \ln(-1) = 2\pi i \neq 0 = \ln 1 = \ln\big((-1) \cdot (-1)\big)$$

Und auch die Gleichung

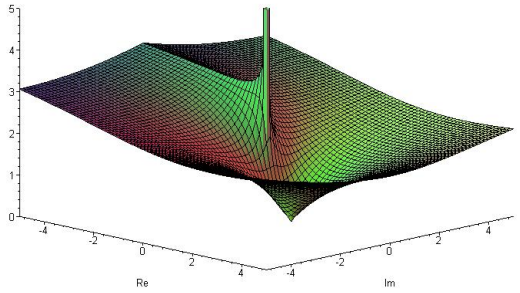
$$y \cdot \ln x = \ln x^y$$

ist nicht notwendig erfüllt, was durch das Gegenbeispiel

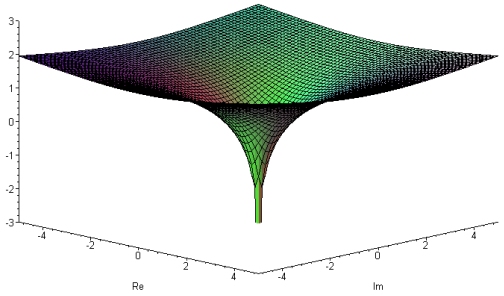
$$2\pi i \ln e = 2\pi i \neq 0 = \ln 1 = \ln\big(e^{2\pi i}\big)$$

verdeutlicht wird.

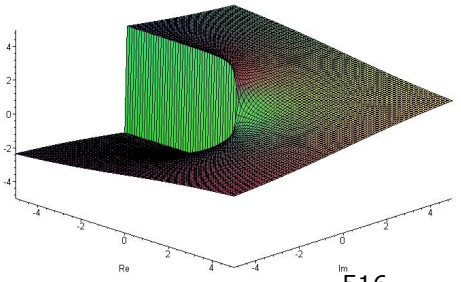
Grafische Darstellung des komplexen Logarithmus



Betrag von *lnz*



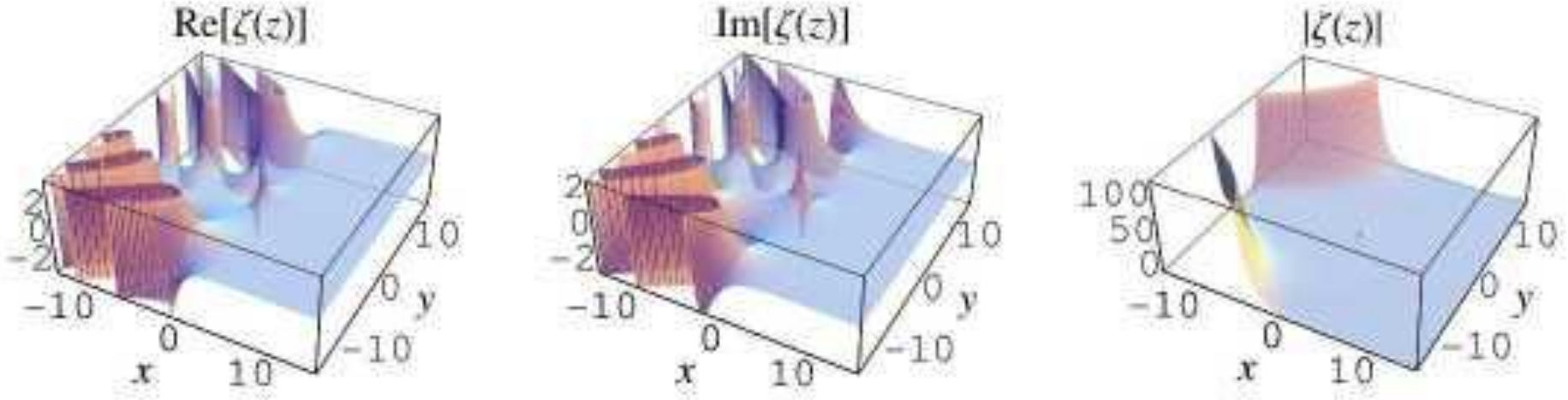
Realanteil von *lnz*



Imaginäranteil von *lnz*“[516]

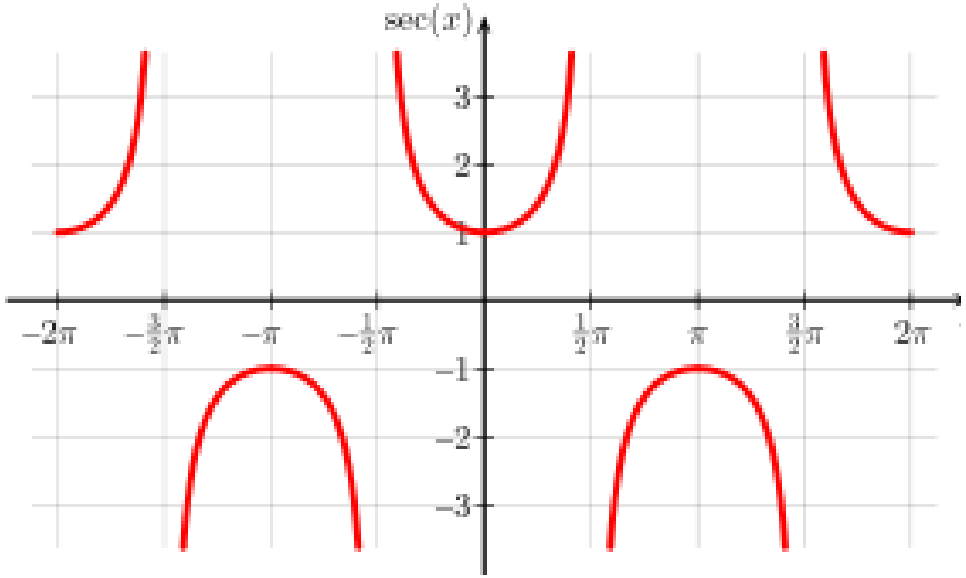
Bisher wurde die Singularität in der Mitte der Graphik von Vries herausgegriffen, weil es hieß, dass Riemann selbst diese Singularität als den Ort der sog. Riemannschen Vermutung[517] innerhalb der Riemannschen Zetafunktion[518] bestimmte, die um einiges weiter gefasst werden müsse, und ein wietes Umfeld der Singularität bilde. Damit also ist der sog. „triviale“ Teil gemeint, und wird als Hügelkette bezeichent, bzw. beschrieben, während der Trichter oder Spitze in der Mitte als Singularität einen Namen trägt. So wie die Singurlarität sich als Funktion bestimmen lässt, so lässt sich analog auch der triviale Teil als Funktion näher bestimmen.

[516] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.
[517] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >
[518] Trost 62 ff.

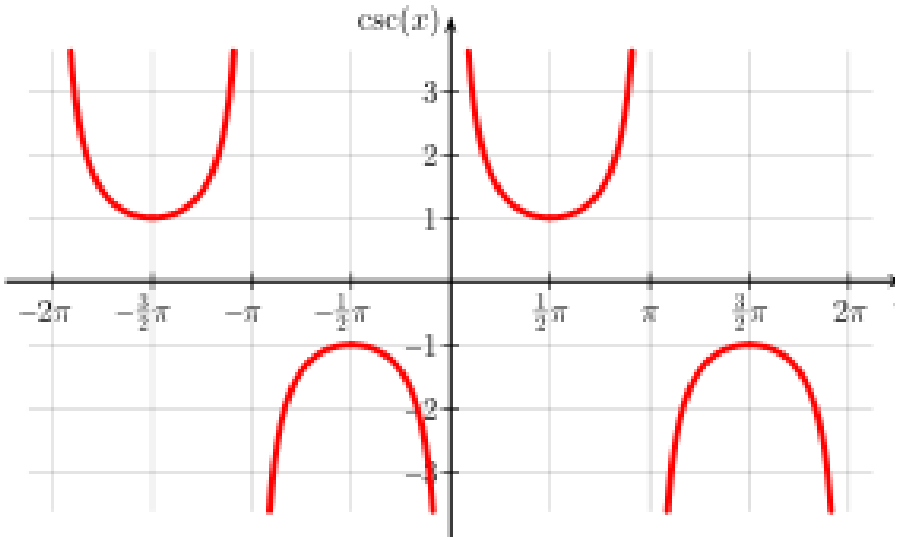


Auch die die Umrandung der Hauptfunktion, die der zitierte Autor (Vries) als „Hügelkette" und in der Mitte als Singularität bzw. „Berg" bezeichnet werden[519], sind einerseits an bekannte elementare Hyperbelfunktionen und andererseits auf die Gammafunktion zurückführbar bzw. damit identisch[520]. Allerdings sind hier jeweils je drei Funktionen in je drei Dimensionen überlagert und gekoppelt: Es gibt einen Realteil auf der reellen Achse Re[ζ(z)] dann ein Imaginärteil auf der imaginären Achse Im [ζ(z)] und einen Absolutbetrag |ζ(z)|, die für sich betrachtet zerlegt werden können, aber in dieser Kombination interferieren und das Bild verzerren[521].

[519] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.
[520] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >.
[521] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.



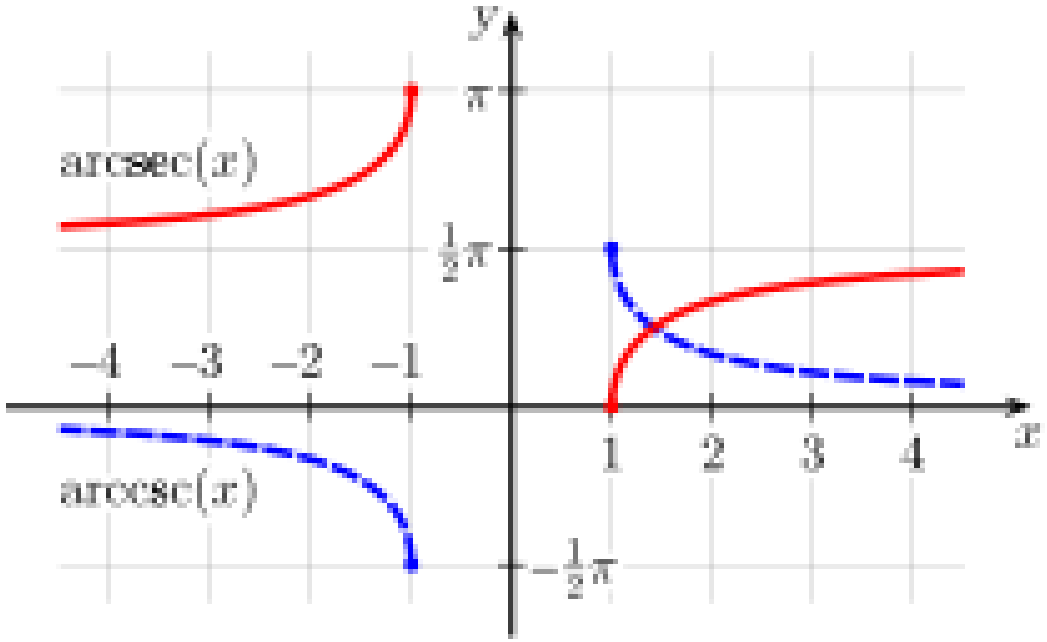
English: secant
Deutsch: Sekans

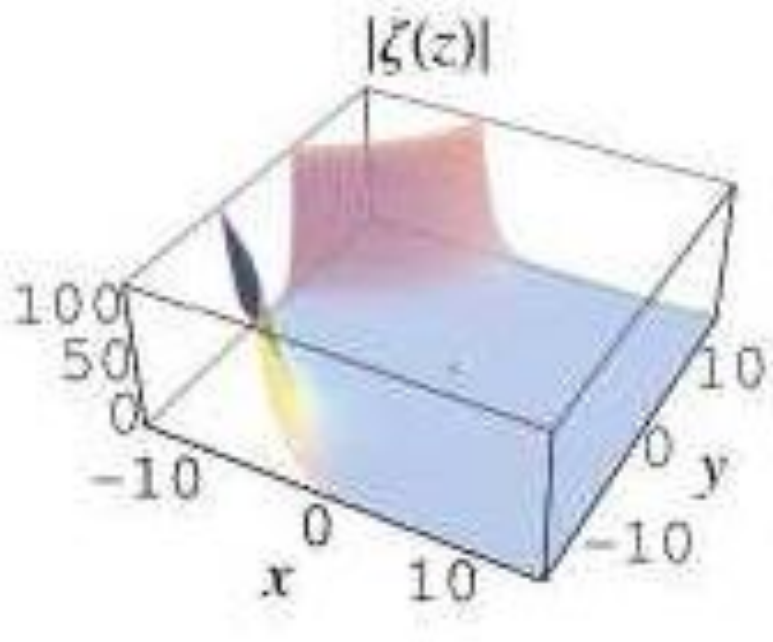


English: cosecant
Deutsch: Kosekans

Die von Vries Hügelkette genannte Funktion sind Sekans und Kosekans[522] dem schematischen Darstellung nach ähnlich. Die von Vries Berg genannte Spitze in der Mitte waren Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus[523], die bei der Koppelung bzw. Überlagerung der Funktionen mit Arkussekans und Arkuskosenkans das Bild verzerren, was auf die Gammafunktion hinweist[524], und weiter unten noch behandelt wird.

[522] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >; Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[523] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >.
[524] Havil 66 Abb. 6.1; Richter, Algorithmen, in: < URL >.

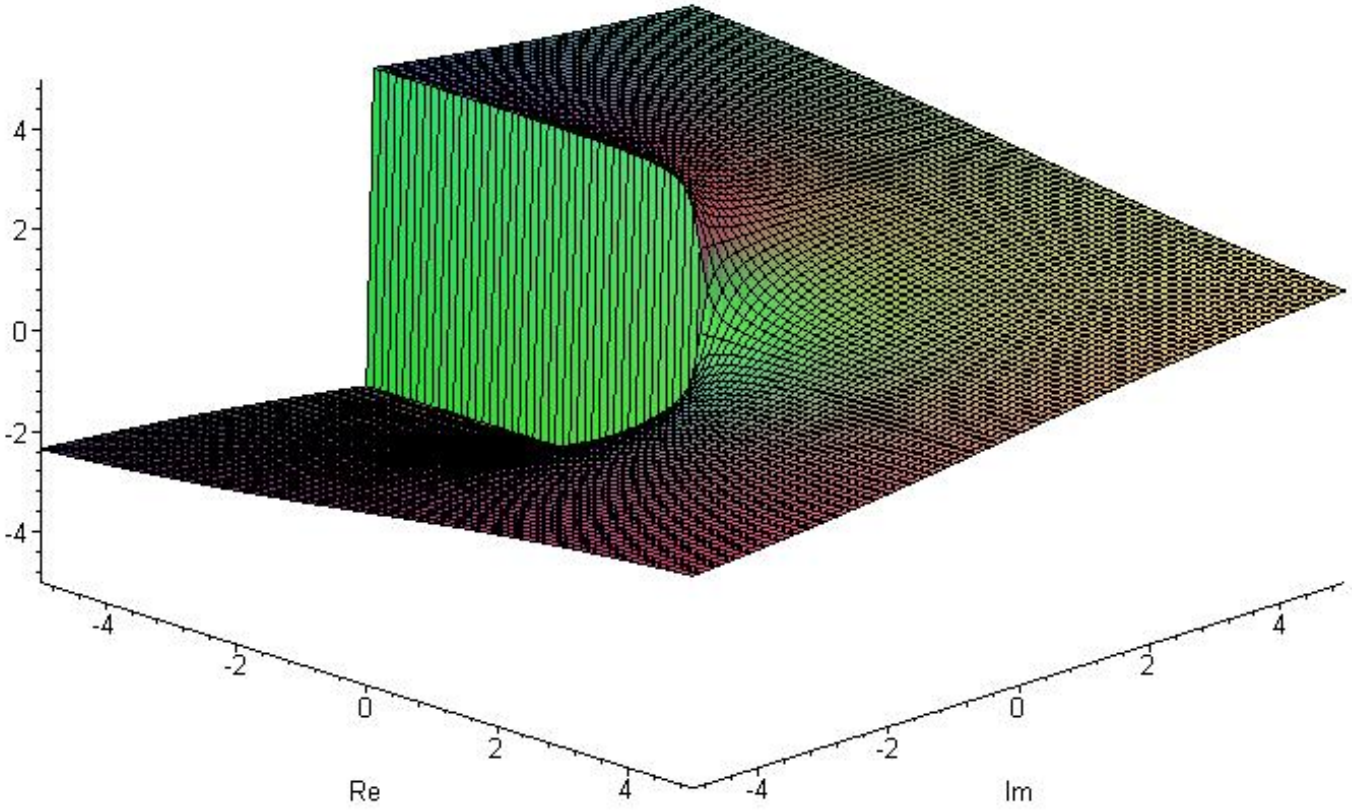




English: arcsecant and arccosecant
Deutsch: Arkussekans und Arkuskosekans

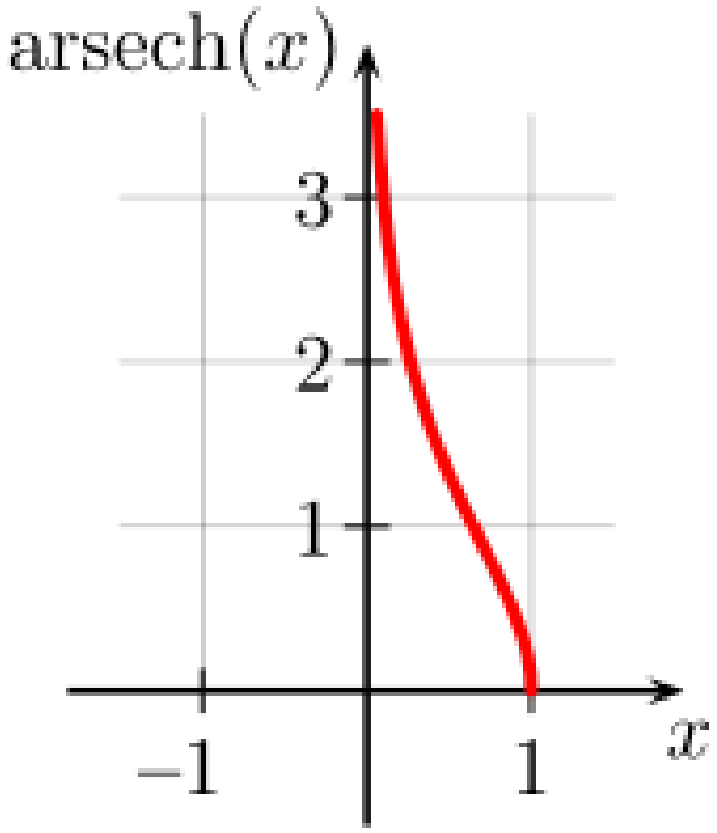
Im Bild des Absolutbetrages |ζ(z)| bei Vries ist ablesbar, dass hier eine weitgehende Übereinstimmung mit Arkussekans und Arkuskosekans bestehe[525], während der Realteil Re [ζ(z)] und imaginärer Teil[526] Im [ζ(z)] analog Sekans und Kosekans entsprechen[527]. Analog lässt sich die von Vries Singularität und Berg genannte Spitze in der Mitte als Areasekans Hyperbolicus identifizieren[528].

[525] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >.
[526] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.
[527] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.
[528] Wikimedia Commons, Trigonometric function plots, in: < URL >.



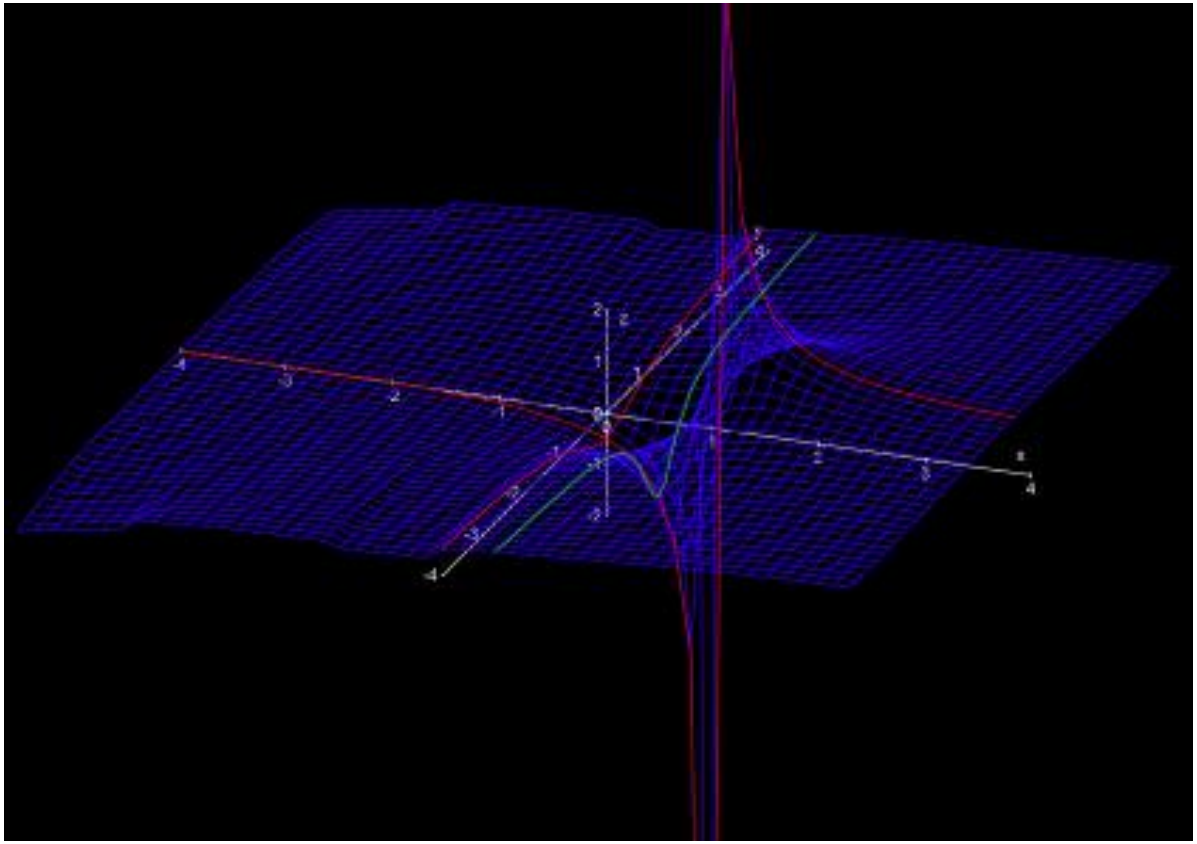
Imaginäranteil von *lnz*[529]

[529] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.



English: area hyperbolic secant
Deutsch: Areasekans Hyperbolicus

Der Absolutbetrag |ζ(z)| der Riemannschen Zetafunktion in der grafischen Darstellung von Vries hebt nicht nur in den bisher besprochenen Punkten von dem Realteil Re [ζ(z)] und Imaginärteil Im [ζ(z)] ab, sondern wegen der Trichterform.



Der Re [ζ(s)] Die Hyperbelfunktion[530] zeigt bei sech(θ) und csh(θ) den Verlauf des Realteils Re [ζ(s)] der Riemannschen Zetafunktion[531].

[530] Wikipedia, Hyperbelfunktion, in: < URL >.
[531] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.

Bei der Riemannschen Zetafunktion[532] handelt es sich bei der Hyperbel um die Funktionen des Sekans Hyperbolicus[533] (sech) und Kosekans Hyperbolikus (csch) in der Form:

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$$

Die Umrechnung[534] von *sech x* in *cosh x* und *csch x* in *sinh x* mit $e^{\pm x}$ zeigt den gesuchten Zusammenhang[535]. Grob angenähert lautet der Lösungsansatz[536] der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

aufgrund der Primzahlformel[537]

$$e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$$

---

[532] Trost 62 ff.
[533] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[534] Vgl Westermann 407 f; Meschkowski 122 ff; Hainzl 142 ff; Knopp 431 ff.
[535] Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >; Wikipedia, Exponentialfunktion, In: < URL >.
[536] Wikipedia, Primorial, In: Wikipedia, Versions-ID: 54990259, Bearbeitungsstand: 6. Januar 2009, < URL >: Für das Primorial gilt $n\# \leq 4^n$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\#} = e$.
[537] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.

nunmehr die Eulersche Zahl *e* statt *n* gesetzt[538], für die trigonometische Umrechnung:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{s \ln n}}$$

denn n^s hat bereits so die Bedeutung $e^{s \ln n}$ bei reellem ln *n*, sodass n für e steht[539], und mit der Umrechnung der Eulerschen Zahl in der sogenannten Eulerschen Identität[540] in die trigonometrische Funktion kommt die Hyperbel zum Vorschein[541]. Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist eine Spezialform $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-s \ln n}$ der Dirichletschen Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

und kann allgemein als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s}$$

geschrieben werden[542]. Ein anderer Lösungsansatz ist das Primorial[543], wo statt $e = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\#}$ Primorial[544] n# ≤ 4^n gesetzt werde,

---

[538] Wikipedia, Exponentialfunktion, In: < URL >: „Als *die Exponentialfunktion* im engeren Sinne wird die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ mit der eulerschen Zahl e ≈ 2,718281828459 als Basis bezeichnet; hierfür ist auch die Notation $x \mapsto \exp(x)$ gebräuchlich. Unter Verwendung des Logarithmus lässt sich wegen der Identität $a^x = e^{x \ln a}$ jede Exponentialfunktion auf eine solche zur Basis *e* zurückführen, weshalb dieser Artikel im folgenden auf die Exponentialfunktion zur Basis *e* fokussiert."

[539] Landau I 30 f: Schreibt log x für ln x.

[540] Wikipedia, Eulersche Identität, In: URL < URL >.

[541] Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >.

[542] Landau II 723 ff.

$$\zeta(s) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{4^s + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2s} + 1}$$

was sich enersets von der Formel für Gamma[545]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \prod_{p\leq n, p\ prim} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{\gamma}$$

und anrerseits von der Gegeüberstellung der Zetafunktion mit Primzahformel[546] herleite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p} \left[1 : \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)\right].$$

Die linke Seite stellt die Riemannsche Zahlenfunktion ζ(k) dar und die rechte Seite de Primzahlformel. Etwas weiter zurück gegriffen zeigt die Eulersche Zahl e in der Formel für Fakultät[547]

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

oder für Subfakultät[548]

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{!n}$$

die Analogie zu $e = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\#}$ beim Primorial[549] n# ≤ 4^n ist augenscheinlich.

---

[543] Wikipedia, Primorial, In: Wikipedia, Versions-ID: 54990259, Bearbeitungsstand: 6. Januar 2009, < URL >: Für das Primorial gilt n# ≤ 4^n und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\#} = e$.

[544] Wikipedia, Primorial, In: Wikipedia, Versions-ID: 54990259, Bearbeitungsstand: 6. Januar 2009, < URL >.

[545] Wikipedia, Euler-Mascheroni-Konstante, In: < URL >.

[546] Prachar 3; Gekeler, Ernst-Ulrich: Primzahlen von Euklied bis heute, in: < URL >.

[547] Peters, Die Fakultät, in: < URL >.

[548] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

[549] Wikipedia, Primorial, In: Wikipedia, Versions-ID: 54990259, Bearbeitungsstand: 6. Januar 2009, < URL >: Für das Primorial gilt n# ≤ 4^n und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\#} = e$.

Auszugehen war von der Tatsache, dass nur Natürliche Zahlen prim sein können und daher nur der Absolutbetrag |ζ(z)| des „kritischen" Teils (grün) in der dreiteiligen Grafik Riemannschen Zetafunktion bei Vries die Lösung sein könne, während der (rote) Realteil Re[ζ(z)] und Imaginärteil Im[ζ(z)] nur projektionen oder Spiegelungen sind[550]. Der nämliche „kritische" Teil im Absolutbetrag in der von Vries grafisch dargestellten Riemannschen Zetafunktion hat die Form des Sekans Hyperbolicus[551]

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$$

und lässt sich zunächst direkt in Kosinus Hyperbolicus umrechnen[552]

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$$

worin ein Imaginärteil sichtbar wird. Das ergibt[553] durch Einsetzung in die vorige Gleichung

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

Weil sich Kosinus Hyperbolikus auch vereinfacht schreiben lässt[554]

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

kann (das) eingesetzt heißen:

---

[550] Westermann 196; Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >: „Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung ebenfalls invariant."
[551] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[552] Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >.
[553] Wikipedia, Hyperbelfunktion, In: < URL >.
[554] Wikipedia, Tangens Hyperbolicus und Kotangens Hyperbolicus, In: Wikipedia, < URL >.

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

Das sei nun die Lösung der Riemmannschen Formel[555]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

nunmehr durch Einsetzung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}.$$

Das war zu beweisen.

Die Hypothese von Riemann[556] versteht sich als eine Primzahlformel in Zusammenhang mit dem Primzahlsatz[557]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

Ihre Besonderheit sind die hochgesteckten Ansprüche, die aber ihrer Beweise harren. Allerdings hat man ausgehend von der Hypothese und mit deren Hilfe vieles andere im Umfeld beweisen können, und so hat sich der Verdacht genährt, dass die Hypothese[558] den gestellten hohen Ansprüchen dereinst gerecht werde.

---

[555] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.
[556] Landau I S. 29 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[557] Landau I S. VII, 29 f, 52; Padberg 80.
[558] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.

Die Primzahlformel[559] besteht im Kern aus einer sog. Zetafunktion ζ(s) mit dem komplexen[560] Argument s in $1/n^s$, und meint den Realateil und wird als $\Re(s)$ und ähnlichen Symbolen bezeichnet, die aber sich mit der Zeit ändern und bei Vries[561] dann Re ζ(s) oder Re[ζ(s)] wurden. In der sogenantnen Halbebene, d. h. $\Re(s) > 1$ wird sie durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert, wo n die Bedeutung $e^{s \ln n}$ bei reellem $\ln n$ hat[562]. Immerhin bewies Riemann, dass die Funktion ζ(s) in der ganzen Ebene regulär sei, bis auf den Punkt s = 1, der ein Pol erster Ordnung mit Residium 1 ist. Mit anderen Worten sind (s – 1)ζ(s) und ζ(s) – 1/(s – 1) ganze transzendente Funktionen. Die Funktion

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{\frac{s}{2}} \zeta(s)$$

welche in s = 0 und s = 1 Pole erster Ordnung hat, sonst regulär ist, bleibt unverändert, wenn s durch 1 – s ersetzt wird. Dies lässt sich durch die Gleichung der Gammafunktion[563] zeigen

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{8\pi}{2} \Gamma(s)\zeta(s)$$

und besagt, dass der Quotient

---

[559] Trost 62 ff.

[560] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.

[561] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.

[562] Landau I 30 f: Schreibt log x für ln x.

[563] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Havil 65 ff.

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}$$

sich durch bekannte Funktionen darstellen lässt und man die Funktion ζ(s) in der ganzen Ebene beherrscht, wenn man sie in der Halbebene σ ≥ ½ verfolgen kann. Aus diesen Ergebnissen konnte Riemann schließen, dass ζ(s) für s = −2, s = −4, s = −6, …, allgemein s = −2q (wo q eine positive ganze Zahl ist) von der ersten Ordnung verschwindet, sonst aber für alle reellen s, sowie für σ < 0 und σ > 1 von Null verschieden ist, so dass all von −2q verschiedenen Nullstellen dem Streifen 0 ≤ σ ≤ 1 angehören und nicht reell sind[564]. Diese Bedingungen sind nun in der Formel erfüllt

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})}.$$

Die Gammafunktion[565] $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ in der Form $\Gamma(n) = (n-1)!$ als Ausgangsgröße[566] für Riemann[567] zeigte die Verbindung zum Satz von Wilson[568] (n – 1)! + 1 ≡ 0 (mod n), zumal auch in der quadratischen Form n² ≡ 1 (mod p) die Formel (n – 1)! angewendet werde[569].

---

[564] Landau I 30 f.

[565] Richter, Algorithmen, in: < URL >.

[566] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; Wikipedia, Pochhammer-Symbol, In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 45639461, Bearbeitungsstand: 4. Mai 2008, 18:21 UTC < URL >: „Das Pochhammer-Symbol wird im Allgemeinen über die Gamma-Funktion definiert,

$$(x,n) \equiv \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

beschränkt man sich jedoch auf natürliche Zahlen, so vereinfacht sich die Definition auf

$$(m,n) \equiv m(m+1)\dots(m+n-1); (m,n \in \mathbb{N}$$".

[567] Landau I 30 ff.

[568] Pieper 52 ff.

[569] Bundschuh 102 f; vgl Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

„**Gammafunktion**

Die Funktionalgleichung

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$$

wird durch die Gammafunktion erfüllt.

Zetafunktion

Die Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1 - s)\zeta(1 - s)$$

wird durch die Riemannsche Zetafunktion erfüllt. Γ bezeichnet dabei die Gammafunktion.“[570]

Die Riemannsche Zetafunktion[571] setzt die Eulersche Gammafunktion[572] voraus und erfüllt diese: „Dies ließ sich durch Benutzung der bekannten Funktionsgleichungen der Gammafunktion[573] in die Gestalt zu bringen:

[570] Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.
[571] Trost 62 ff.

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{8\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

und sagt aus, dass in dieser oder in der ursprünglichen Gestalt

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}$$

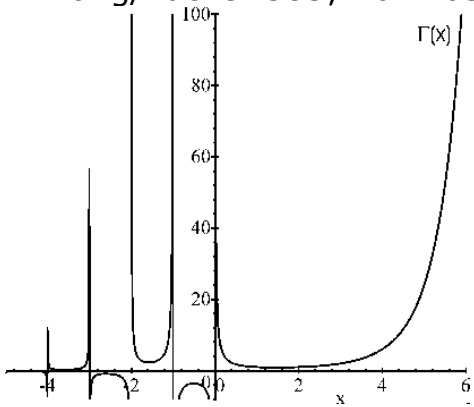
sich der Quotient durch bekannte Funktionen darstellen lässt“[574]. Und die Funktion Sekans Hyperbolicus[575] (sech x) und Kotangens Hyperbolicus (coth x) sind solche bekannte Funktionen:

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

Aber auch die voher zitierte Kombinantion der Eulerschen Gammafunktion[576] und der Riemannschen Zetafunktion[577].

---

[572] Lang/Pucker 585; Havil 65 ff; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >.



Die Gammafunktion $\Gamma(x)$.

[573] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Havil 65 ff.

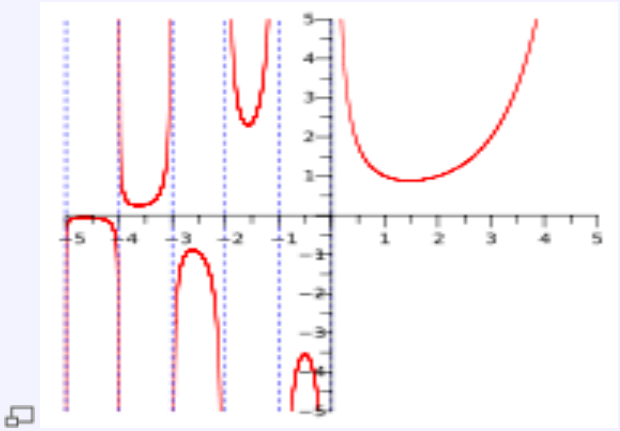
[574] Landau I 30 ff.

[575] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.

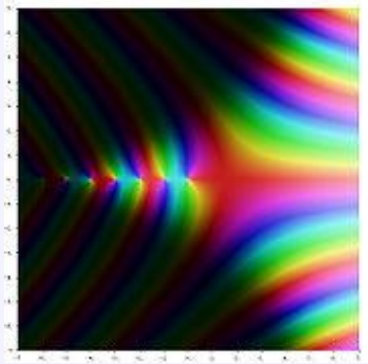
[576] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >; Havil 65 ff; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.

„**Gammafunktion**

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie
Wechseln zu: Navigation, Suche



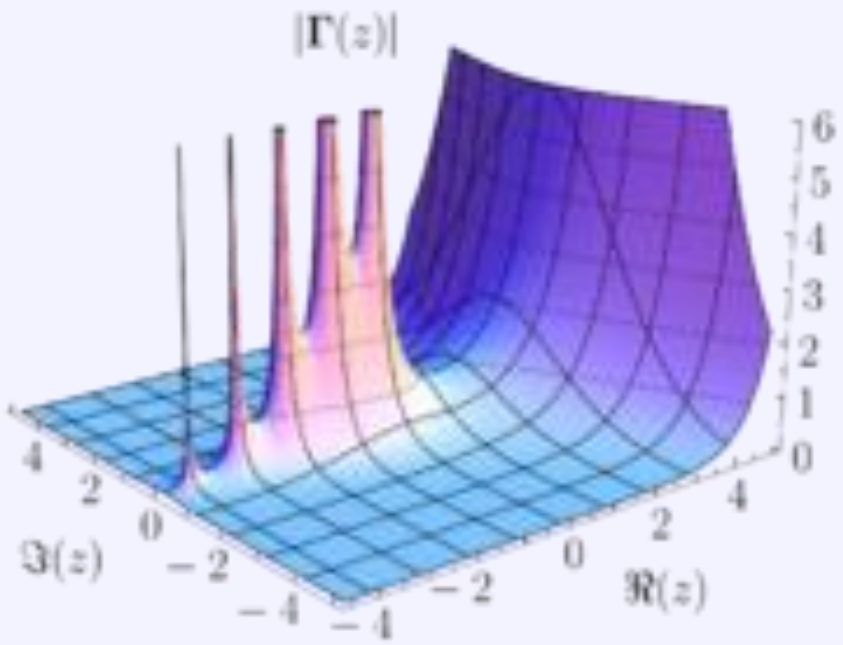
Graph der Gammafunktion im Reellen



Komplexe Gammafunktion: Helligkeit entspricht dem Betrag, Farbe dem Argument des Funktionswerts

---

[577] Trost 62 ff.



Betrag der komplexen Gammafunktion

Die **Gammafunktion** ist in der Mathematik eine Funktion, die definiert wird als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

für $x > 0$. Sie genügt der Funktionalgleichung[578]

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x) ,$$

[578] Wikipedia, Pochhammer-Symbol, In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 45639461, Bearbeitungsstand: 4. Mai 2008, 18:21 UTC < URL >.

aus der sich mit der Bedingung $\Gamma(1) = 1$ der Wert der Gammafunktion für alle positiven ganzen Zahlen n als

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

ergibt. Sie erweitert also die Fakultätsfunktion[579] auf die positiven reellen Zahlen.

Die Gammafunktion lässt sich als meromorphe Funktion ohne Nullstellen auf die komplexe Zahlenebene[580] mit einfachen Polstellen an den nichtpositiven ganzen Zahlen fortsetzen.

Aus der Gammafunktion leitet sich die Gamma-Wahrscheinlichkeitsverteilung ab.

Inhaltsverzeichnis

- 1 Darstellungsformen
- 2 Der Satz von Bohr-Mollerup
- 3 Funktionalgleichungen
- 4 Zusammenhang zur Riemannsche ζ-Funktion
- 5 Unvollständige Gammafunktion
- 6 Geschichtliches
- 7 Siehe auch
- 8 Literatur
- 9 Weblinks

Darstellungsformen

[579] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

[580] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.

Eine weitere Ausweitung des Definitionsbereichs erlaubt die Darstellung der Gammafunktion nach Gauß:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} \text{ für } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}.$$

Direkt aus der Gaußschen Darstellungsform abgeleitet ist diejenige von Karl Weierstraß:

$$\Gamma(x) = \left[x \cdot e^{\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-z/k}\right]^{-1},$$

wobei die Eulersche Konstante γ definiert ist als

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right).$$

Näherungswerte der Gammafunktion für $x > 0$ liefert die Stirlingsche Formel, es gilt

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}.$$

Der Satz von Bohr-Mollerup

Der Satz von Bohr-Mollerup (H. Bohr und J. Mollerup, 1922) erlaubt eine einfache Charakterisierung der Gammafunktion:

> Eine Funktion $G\colon \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist in diesem Bereich gleich der Gammafunktion, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:
>
> 1. G(1) = 1
> 2. G(x + 1) = x·G(x)
> 3. G ist *logarithmisch konvex*, d.h. $x \mapsto \log G(x)$ ist eine konvexe Funktion.

Die ersten beiden Bedingungen werden auch von Funktionen wie $G(x) = \Gamma(x)\cdot(1 + \sin(2\pi x))$, $0 < c < 1$, erfüllt.

Funktionalgleichungen

Die Gammafunktion genügt der Funktionalgleichung

$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ mit $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Der Ergänzungssatz der Gammafunktion

$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ für $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

ermöglicht die Berechnung von Werten der Gammafunktion aus bereits bekannten Funktionswerten ebenso wie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \cdot \Gamma(x).$$

Diese ist ein Spezialfall der Gaußschen Multiplikationsformel

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{z-1/2}} \cdot \Gamma(x)$$ für n = 2, 3, 4, …

Zusammenhang zur Riemannsche ζ-Funktion

Die Gammafunktion besitzt folgende Beziehung zur Riemannsche ζ-Funktion, was von Riemann mit Hilfe der Funktionentheorie abgeleitet wurde.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1 - s)$$

Unvollständige Gammafunktion

In der Literatur wird dieser Begriff, im Hinblick auf Integrationsgrenzen und Normierung (Regularisierung), nicht einheitlich verwendet.

Häufige Notationen sind:

$\gamma(a,x) = \int_0^y t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ unvollständige Gammafunktion der oberen Grenze
$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ unvollständige Gammafunktion der unteren Grenze
$\mathrm{P}(a,x) = \frac{\gamma(a,x)}{\Gamma(a)}$ regularisierte (unvollständige) Gammafunktion der oberen Grenze
$\mathrm{Q}(a,x) = \frac{\Gamma(a,x)}{\Gamma(a)}$ regularisierte (unvollständige) Gammafunktion der unteren Grenze

Spricht man von einer regularisierten Gammafunktion, so induziert dies schon, dass sie unvollständig ist.

$$\Gamma(a,x,y) = \int_x^y t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ bzw. } \Gamma(a,x,y) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^y t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

steht für die verallgemeinerte unvollständige Gammafunktion. Unklar ist, ob sie regularisiert ist oder nicht. Ebenso unklar ist, ob man das Wort ‚verallgemeinert' darauf beziehen soll, dass nun beide Integrationsgrenzen variabel sind, oder ob es sich, wie bei den obigen vier Darstellungen, um eine Verallgemeinerung der (vollständigen) Gammafunktion handelt.

Geschichtliches

1730 stellte Leonhard Euler in einem Brief an Christian Goldbach folgendes Integral zur Interpolation der Fakultätsfunktion[581] vor:

$$\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1}\mathrm{d}t$$

(Diese Funktionsdefinition geht durch die Substitution $u = \ln(1/t)$ in die obige Form über.)

[581] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

Dieses Integral entdeckte Euler bei der Untersuchung eines Problems aus der Mechanik, bei dem die Beschleunigung eines Partikels betrachtet wird.

Die Verwendung des griechischen Gamma-Zeichens und die uns heute vertraute Darstellung wurde erst später durch Adrien-Marie Legendre eingeführt."[582]

Euler hat 1730 die nach ihm benannte Gammafunktion[583] als Integral zur Interpolation der Fakultätsfunktion[584] vorgestellt,

$$\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1} \mathrm{d}t$$

die durch Substitution u = ln(1/t) in die obige Form übergeht. Das Integral entdeckte Euler bei der Betrachtung der Beschleunigung eines Partikels und Legendre hatte mit dem Gamma-Zeichen den Namen gegeben[585].

„Euler-Mascheroni-Konstante

[…] Die **Euler-Mascheroni-Konstante** (nach den Mathematikern Leonhard Euler und Lorenzo Mascheroni), auch **Eulersche Konstante**, ist eine wichtige mathematische Konstante, die mit dem griechischen Buchstaben γ (gamma) bezeichnet wird.

Ihre Definition lautet:

---

[582] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >.
[583] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[584] Peters, Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, in: < URL >; Peters, Die Fakultät, in: < URL >.
[585] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

wobei H_n die Harmonische Reihe bezeichnet.

Ihr numerischer Wert ist auf 100 dezimale Nachkommastellen genau (Folge A001620 in OEIS):

> γ = 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488486772677766467093694706329
> 17467495.

Derzeit (13. Jan. 2009) sind 14.900.000.000 dezimale Nachkommastellen bekannt.[1]

Trotz großer Anstrengungen ist bis heute unbekannt, ob diese Zahl rational oder irrational, ob sie algebraisch oder transzendent ist. Es wird aber stark vermutet, dass sie zumindest eine irrationale Zahl ist. Den ersten konkreten Beweisversuch hierzu hat 1926 Paul Émile Appell mit Hilfe der unten genannten Entwicklung von Joseph Ser unternommen.

Im Gegensatz zur Kreiszahl π, die jeweils bei Umfang und Fläche eines Kreises mit rationalem Radius auftritt, ist für die Eulersche Konstante außerhalb der Mathematik kein Beispiel eines direkten Vorkommens bekannt. Es gibt zwar viele praktische Probleme, die auf die Summierung der endlichen harmonischen Reihe H_n führen wie etwa das Problem der optimalen Sitzreihen-Erhöhung in Theatern und Kinos. Dort handelt es sich aber immer um endlich viele Terme, so dass kein Grenzübergang $n \to \infty$ zustande kommt, der für das Auftreten von γ erforderlich wäre. Beim Kreis, der aus unendlich vielen Punkten gebildet wird, ist ein solcher Grenzprozess bereits enthalten.

Inhaltsverzeichnis

- 1 Die Euler-Mascheroni-Konstante in mathematischen Problemen
- 2 Bezeichnungen
- 3 Einzelnachweise
- 4 Literatur

- 5 Weblinks

Die Euler-Mascheroni-Konstante in mathematischen Problemen

Die eulersche Konstante tritt in der Mathematik sehr häufig und manchmal auch ganz unerwartet in unterschiedlichen Teilgebieten auf. Hauptsächlich tritt sie bei Grenzwertprozessen der Differential- und Integralrechnung auf. Das Auftreten lässt sich (wie auch bei anderen mathematischen Konstanten) so unterteilen:

1. Als Funktionswert oder Grenzwert von Speziellen Funktionen.

Der Wert γ ist die negative Ableitung der Gammafunktion an der Stelle 1, also

$\Gamma'(1) = q - \gamma$.

$\lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$.

Hierbei bezeichnet $\zeta(s)$ die riemannsche Zeta-Funktion.

2. In Entwicklungen spezieller Funktionen, z.B. bei der Reihenentwicklung des Integrallogarithmus von Leopold Schendel oder der Besselfunktionen.

3. Integraldarstellungen

Hier gibt es eine reichhaltige Fülle, z.B.:

$$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln x)\,\mathrm{d}x$$

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x \,\mathrm{d}x$$

$$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x e^x}\right) dx$$

$$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{1 - x}\right) dx$$

oder auch

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\gamma + 2\ln 2)$$

Es gibt auch sehr viele invariante Parameterintegrale, z.B.:

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^k + 1} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x}, k > 0$$

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{kx + 1} - e^{-kx}\right)\frac{dx}{x}, k > 0$$

Ferner gibt es eine ebenso reichhaltige Fülle an unendlichen Summen und Produkten, etwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \prod_{p \le n, p \text{ prim}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{\gamma}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\prod_{p\le n,p\ prim}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}$$

$$\gamma=\lim_{n\to 1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{x^n}\right)$$

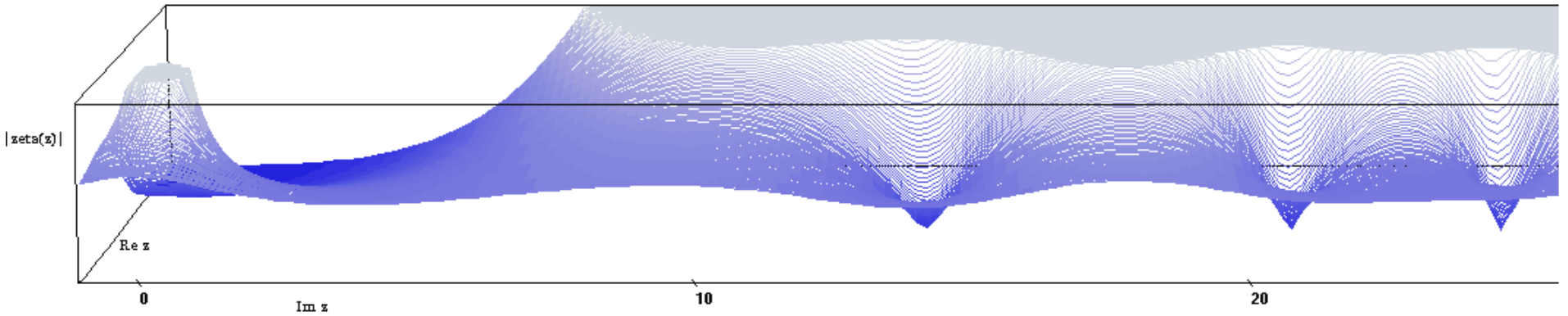
4. Reihendarstellungen sind im Gegensatz zu π prinzipiell seltener. Als Beispiele von Reihen mit rationalen Gliedern sind nur die Reihen von Euler, Giovanni Enrico Eugenio Vacca, Ramanujan und Joseph Ser bekannt. An Reihen mit irrationalen Gliedern gibt es unzählige Variationen, deren Glieder aus rational gewichteten Werten der riemannschen Zeta-Funktion an den ungeraden Argumentstellen ζ(3), ζ(5), ... bestehen. Ein Beispiel einer besonders schnell konvergenten Reihe ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)-1}{(2n+1)2^{2n}}=1+\ln 2-\ln 3-\gamma=\ 0{,}0173192\ldots$$

Bezeichnungen

Man kann sagen, dass die Eulersche Konstante diejenige Konstante mit den meisten Bezeichnungen ist. Euler selbst bezeichnete sie mit *C* und gelegentlich mit *O* bzw. *n*. Es ist jedoch zweifelhaft, ob er damit ein eigenständiges Symbol für seine Konstante einführen wollte. Mascheroni bezeichnete die Konstante nicht - wie oft behauptet - mit γ, sondern ausschließlich mit A. Andere Mathematiker verwenden die Bezeichnungen C, c, ℂ, γ, E, K, M, *l*. Der Ursprung der heute üblichen Bezeichnung γ ist ein offenes Problem. Als gesichert gilt, dass Carl Anton Bretschneider (1808−1878) in seiner Arbeit 1837 *Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova* die Bezeichnung γ verwendet."[586]

[586] Wikipedia, Euler-Mascheroni-Konstante, In: < URL >; vgl Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.



„Die ζ-Funktion als analytische Landschaft mit Blick auf die kritische Gerade: Links der (abgeschnittene) Pol bei z = 1, daneben drei der nichttrivialen Nullstellen. Die dem Beobachter zugewandte Schnittlinie wird durch ζ(3 + ti) gebildet."[587]

Eine weitere Näherung bietet die Stirling-Formel[588]: Sie verwendet das Element 1/12n als Bindeglied zwischen Fakultätsfunktion[589] und Logarithmus und ist sozusagen die halbe Lösung[590] von 24n:

„Die Stirling-Formel in ihrer einfachsten Form ist eine Näherungsformel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Zu den einzelnen Elementen dieser Formel siehe Fakultät (!), Quadratwurzel (√), Kreiszahl (π) und Eulersche Zahl (e).

Genauer gilt für $n > 0$:

[587] Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 9.
[588] Wikipedia, Stirling-Formel, In: Wikipedia, Versions-ID: 57817801, 13. März 2009, 09:34 UTC < URL >.
[589] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[590] Pommerening, Klaus: Kryptologie, in: < URL >.

$$1 < e^{1/(12n+1)} \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq e^{1/(12n)} < 1 + \frac{1}{11n}$$

Insbesondere ist der Grenzwert des Bruches für $n \to \infty$ gleich 1.

Die Stirling-Entwicklung mit der Euler-MacLaurinschen Summenformel lautet

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k-1)2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots,$$

wobei B_k die k-te Bernoulli-Zahl[591] bezeichnet. Als Näherung betrachtet man lediglich eine endliche Zahl von Gliedern. Der Fehler liegt in der Größenordnung des ersten vernachlässigten Gliedes. Beispiel: bricht man nach dem dritten Glied ab, ist der absolute Fehler kleiner als $1 / (12n)$. Die Reihe selbst konvergiert nicht für festes n, sie ist eine asymptotische Entwicklung.

Für $n > 751$ genügen zwei Glieder für einen relativen Fehler kleiner als 0,1 Prozent:

$$\ln(n!) \approx n \cdot \ln(n) - n.$$

Für $n > 7{,}31 \times 10^{43}$ genügt ein Glied für einen relativen Fehler kleiner als 1 Prozent:

$$\ln(n!) \approx n \cdot \ln(n).$$

Herleitung der ersten beiden Glieder

Die Formel wird oft in der statistischen Physik für den Grenzfall großer Teilchenzahlen verwendet, wie sie in thermodynamischen Systemen (Größenordnung 10^{23} Teilchen) vorkommen. Für thermodynamische Betrachtungen ist es meist völlig ausreichend die ersten beiden Glieder $\ln(N!) \approx N \cdot \ln(N) - N$ zu berücksichtigen. Diese Formel lässt sich einfach gewinnen, indem man nur den ersten Term der Euler-MacLaurin-Formel verwendet:

[591] Knopp 185 f, 207 ff; .

$$\ln(N!) = \sum_{n=1}^{N} \ln(n) \approx \int_1^N \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]_1^N = N\ln(N) - N + 1 \approx N\ln(N) - N$$

Stirling-Formel für die Gammafunktion

Auch die Gammafunktion lässt sich durch die Stirling-Formel abschätzen. Für $x > 0$ gilt

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi/x}\left(\frac{n}{e}\right)^x e^{\mu(x)},$$

wobei μ die Abschätzung $0 < \mu(x) < 1 / (12x)$ erfüllt. Der Wert der Approximation mit $\mu = 0$ ist also immer etwas zu klein. Der relative Fehler ist aber für $x \geq 9$ kleiner als 1 % und für $x \geq 84$ kleiner als 0,1 %. Da $n\Gamma(n) = n!$, stimmt diese Approximationsformel mit der obigen für die Fakultät überein."[592]

Die Benoulli Zahlen[593] sind ein tragendes Element der hier gezeigten Zusammenhänge.

„Die **Bernoulli-Zahlen** B_n sind eine Folge rationaler Zahlen, die in der Mathematik in verschiedenen Zusammenhängen auftreten: als Entwicklungskoeffizienten trigonometrischer, hyperbolischer und anderer Funktionen, in der Euler-Maclaurin-Formel, und in der Zahlentheorie in Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion. Die Benennung dieser Zahlen nach ihrem Entdecker Jakob Bernoulli wurde von Abraham de Moivre eingeführt.

[…]

[592] Wikipedia, Stirling-Formel, In: Wikipedia, Versions-ID: 57817801, 13. März 2009, 09:34 UTC < URL >.
[593] Knopp 185 f, 207 ff; Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.

Achtung: In der Literatur werden die Bernoulli-Zahlen in zwei verschiedenen Weisen definiert, die im Folgenden zur Unterscheidung B_n bzw. β_n geschrieben werden.

Die Bernoulli-Zahlen werden am einfachsten als Taylor-Koeffizienten der erzeugenden Funktion $\frac{x}{(e^x-1)}$ eingeführt. Die Reihenentwicklung[594]

$$\frac{x}{(e^x-1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$$

Beziehungsweise β

$$\frac{x}{(e^x-1)} = \beta_0 \frac{x^0}{0!} + \beta_1 \frac{x^1}{1!} + \beta_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + \beta_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

konvergiert für alle *x* mit einem Betrag kleiner als 2π.

Bernoulli selbst entdeckte diese Zahlen bei der Summation von Potenzen natürlicher Zahlen, z. B.:

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{1}{2}(n-1)n.$$
$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Bei der Summation der *k*-ten Potenzen ist der Koeffizient des linearen Gliedes des Polynoms auf der rechten Seite die Bernoullische Zahl β_k.

Zahlenwerte

[594] Knopp 185 f, 207 ff.

Die ersten Bernoulli-Zahlen lauten B_1, B_2, B_3, ... = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder.

In der alternativen Definition ist $\beta_0 = 1$ und $\beta_1 = -1/2$, alle weiteren β mit ungeradem Koeffizienten verschwinden: $\beta_{2n+1} = 0$. Die β mit geraden Koeffizienten ergeben sich aus den B_n gemäß $B_n = (-1)^{n+1}\beta_{2n}$ als β_2, β_4, β_6, ... = 1/6, –1/30, 1/42, –1/30, 5/66, ...

Auch wenn die Folge β_n zunächst kleine Zahlenwerte annimmt, geht $|\beta_n|$ doch schneller gegen Unendlich als e^n. So ist $\beta_{100} \approx -2.838\text{x}10^{78}$ bzw. $\beta_{1000} \approx -5.319\text{x}10^{1769}$.

Reihenentwicklungen für Bernoulli-Zahlen

Die folgenden Reihenentwicklungen liefern die klassischen (im o. g. Sinne) Bernoulli-Zahlen:

$$B_n = \frac{(2n)!}{x^{2n-1}\pi^{2n}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

$$B_n = \frac{2\cdot(2n)!}{(x^{2n}-1)\cdot\pi^{2n}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}}$$

$$B_n = \frac{(2n)!}{(x^{2n-1}-1)\cdot\pi^{2n}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2n}}$$

Rekursionsformel

Setzt man $\beta_0 = 1$ und $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ so ergeben sich die Bernoulli-Zahlen β_k aus der Rekursionformel:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \beta_k = 0$$

Für ungerade Zahlen $n \geq 3$ gilt $\beta_n = 0$.

Bernoulli-Zahlen und Bernoulli-Polynome

Die **Bernoulli-Polynome** sind eine Abbildung $B_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ und sind durch folgende Rekursionsgleichungen vollständig charakterisiert:

$$B_0(x) = 1$$

und für n größer gleich Eins:

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x) \qquad \int_0^1 B_n(x)dx = 0$$

Als Summe geschrieben lautet der Ausdruck für das *n*-te Polynom

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k x^{n-k}$$

Die ersten drei Polynome lauten:

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Die konstanten Terme dieser Polynome stehen in direktem Zusammenhang mit den Bernoulli-Zahlen, denn es sind gerade die Bernoulli-Zahlen β_n."[595]

[595] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.

Die Bernoulli-Zahlen[596] sind das Bindeglied zu der Trigonometrie: „Die ersten Bernoulli-Zahlen lauten B_1, B_2, B_3, ... = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder.“[597] Euler hat eine Formel für Pi mit den Bernoullizahlen[598] gefunden: $\pi = \frac{1}{4} + 4n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right) - \frac{4\pi}{e^{2\pi n}} + \frac{B_2}{n^2} - \frac{B_6}{3\cdot 2^2\cdot n^6} + \frac{B_{10}}{5\cdot 2^4\cdot n^{10}} + \frac{B_{14}}{7\cdot 2^6\cdot n^{14}} \ldots$

[596] Knopp 185 f, 207 ff.
[597] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >.
[598] Arndt/Haenel 215.

Die Folge $e^{i\pi} + 1$

So wie die Riemannsche Zetafunktion[599] die Verbindung zu π über die Potenzen herstellt, so stellt die „Eulersche Identität"[600] die Verbindung zu π über die Potenzen der „Eulerschen Zahl" e her[601].

„Die **eulersche Identität** bezeichnet die Formel

$$e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i\, sin(\varphi)$$

und bildet das Bindeglied zwischen trigonometrischen Funktionen und den komplexen Zahlen[602]. Dabei bezeichnet e die eulersche Zahl (Basis des natürlichen Logarithmus) und i die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen.

---

[599] Gekeler, Ernst-Ulrich: Primzahlen von Euklied bis heute, in: < URL >; Prachar 3 ff; Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: URL < URL >; Pittner 7; Trost 62 ff.

[600] Wikipedia, Eulersche Identität. In: URL < URL >.

[601] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; vgl Waldschmidt 4 [248].

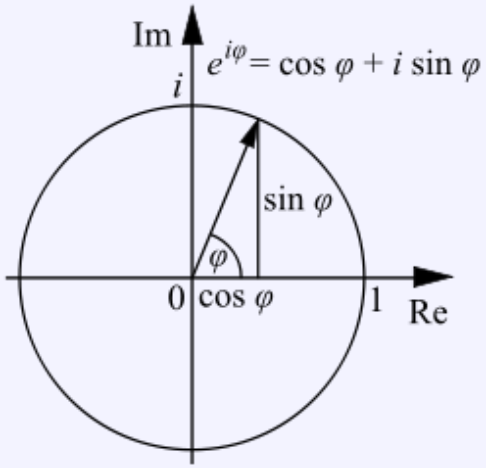
[602] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >: „Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und φ, so kann die komplexe Zahl $z = a + bi$ auch in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

dargestellt werden, da $a = r \cdot \cos\varphi$ und $b = r \cdot \sin\varphi$ ist. Diese Darstellung einer komplexen Zahl heißt Polarform.

Die Darstellung $r \cdot e^{i\varphi}$ mit Hilfe der komplexen e-Funktion heißt Exponentialform, die Darstellung $r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ heißt trigonometrische Form.

Wegen der eulerschen Identität sind Exponentialform und trigonometrische Form bedeutungsgleich und stellen alternative Schreibweisen für die Polarform dar."



Veranschaulichung in der komplexen Zahlenebene

Die Gleichung erscheint in Leonhard Eulers *Introductio*, veröffentlicht in Lausanne 1748 unter der $\varphi \in \mathbb{R}$ Voraussetzung (aus der Anschauung wird klar, dass φ auch Winkel genannt wird), sie gilt jedoch auch für alle komplexen Argumente $\varphi \in \mathbb{C}$.

Für den Winkel $\varphi = \pi$ (die Kreiszahl; entspricht einem Winkel von 180°) ergibt sich die Identität

$$e^{i\pi} = -1$$

die einen verblüffend einfachen Zusammenhang zwischen vier der bedeutendsten mathematischen Konstanten herstellt: der eulerschen Zahl *e*, der imaginären Einheit i der komplexen Zahlen, der Kreiszahl π sowie der Einheit 1 der reellen Zahlen.

Eine alternative, ebenfalls weit verbreitete Schreibweise der Gleichung lautet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Diese Formulierung betont die Identität nicht im eigentlichen Sinne als Äquivalenz oder Definition, wird jedoch von verschiedenen Mathematikern aus ästhetischen und historischen Gründen bevorzugt, da sie als fünfte wichtige Konstante die

Null hinzufügt - ein Konzept, ohne das die moderne Mathematik nicht hätte entstehen können. Andere Quellen lehnen dies als unnötig kompliziert ab - mathematisch korrekt sind selbstverständlich beide Schreibweisen.

Richard Feynman nannte diese Gleichung in seinem Notizbuch die ‚bemerkenswerteste Formel der Welt'; andere nennen sie die *schönste Formel der Mathematik*.

[…]

Als einfache Folgerung der eulerschen Identität erhält man die eulersche Formel, die sich folgendermaßen darstellt:

$$e^{z} = e^{x + iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x} \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

Hieraus erhält man sofort eine Darstellung des Betrages von e^{z}: $| e^{z} | = e^{x}$.

[…]

Eine Leserumfrage des Fachblattes *Mathematical Intelligencer* sah die eulersche Identität als schönstes Theorem der Mathematik an. Eine weitere Leserumfrage die von 2004 von *Physics World* durchgeführt wurde, nannte die Identität als ‚größte Gleichung aller Zeit', gemeinsam mit den Maxwell-Gleichungen.

Das Buch *Dr. Euler's Fabulous Formula* (Paul Nahin, Professor Emeritus an der University of New Hampshire, 2006) erzählt auf über 400 Seiten über die Geschichte und Rezeption der eulerschen Identität und bezeichnet sie zusammenfassend als den ‚Goldstandard der mathematischen Schönheit'.

Gauß war nach zeitgenössischen Berichten der Ansicht, dass diese Formel einem Schüler der Mathematik sofort ersichtlich sein müsse - oder er würde niemals ein hochkarätiger Mathematiker werden."[603]

[603] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >.

Schon für Sinus und Kosinus gilt grundsätzlich, dass die trigonometrischen Funktionen eng mit den Exponentialfunktionen verbunden sind[604], was auch umkehrbar gilt.

„Dieser Ansatz führt zum einen Sinus und Kosinus auf nur eine Reihe zurück, und ist aus der Eulerformel

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

motiviert:

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2l+1}}{(2l+1)!} = \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\varphi^{2l}}{(2l)!}}_{\cos\varphi} + i \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\varphi^{2l+1}}{(2l+1)!}}_{\sin\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Dabei wurde verwendet $i^{2l} = (i^2)^l = (-1)^l$ sowie $i^{2l+1} = i \cdot i^{2l} = i(-1)^l$

Für eine reelle Zahl φ ist also cos(φ) der Realteil und sin(φ) der Imaginärteil der komplexen Zahl $e^{i\varphi}$.

Für beliebige komplexe Zahlen *z* definiert man analog

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

und

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

[604] Wikipedia, Sinus und Kosinus In: < URL >.

Man kann aber auch den Sinus wie oben als Taylorreihe definieren und dann die Übereinstimmung mit dieser Definition zeigen."[605]

Der Realteil und Imagenärteil einer komplexen Zahl e^{iz} kann im Sinne der Eulerschen Identität eine trigonometrische Funktion[606] wie sin und/oder cos stehen.

[605] Wikipedia, Sinus und Kosinus, In: < URL >.

[606] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >: „Die Darstellung $r \cdot e^{i\varphi}$ mit Hilfe der komplexen e-Funktion heißt Exponentialform, die Darstellung $r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ heißt trigonometrische Form.

Wegen der eulerschen Identität sind Exponentialform und trigonometrische Form bedeutungsgleich und stellen alternative Schreibweisen für die Polarform dar."

Die Folge [(n – 1)/n]^n

Euler entwickelte die Formel

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)\left(1 - \frac{1}{5^k}\right)\ldots},$$

kürzer geschrieben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p} \left[1 : \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)\right],$$

wobei die linke Seite die Riemannsche Zahlenfunktion ζ(k) darstellt[607] und *p* die Reihe der Primzahlen durchläuft. In diesen Zusammenhang stellt und studiert Euler die Theorie der transzendenten Zahlen

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

der Basis der natürlichen Logarithmen[608]. Die Eulersche Zahl e kann auf unterschiedliche Weise beschrieben werden.

„Die Zahl *e* kann unter anderem durch Grenzwertbildung definiert werden. Die beiden bekanntesten Darstellungen lauten:

[607] Prachar 3; Gekeler, Ernst-Ulrich: Primzahlen von Euklied bis heute, in: < URL >.
[608] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; vgl Waldschmidt 4 [248].

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

als Grenzwert einer Folge bzw. Funktion (je nachdem, ob man $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{R}$ voraussetzt) und

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

als Reihe.

Mit $k!$ wird dabei die Fakultät $1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$ bezeichnet[609]. Beide Darstellungen entsprechen dem Funktionswert $\exp(1) = e^1$ der Exponentialfunktion (oder ‚*e*-Funktion') an der Stelle 1; die Reihenschreibweise entspricht zudem der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion um den Punkt Null.

Eigenschaften

Die eulersche Zahl *e* ist eine irrationale (Beweis) und transzendente Zahl (Beweis nach Charles Hermite, 1873). Sie lässt sich also (wie auch die Kreiszahl π nach Ferdinand von Lindemann 1882) weder als Bruch zweier natürlicher Zahlen noch als Lösung einer algebraischen Gleichung endlichen Grades darstellen und besitzt eine unendliche nichtperiodische Dezimalbruchentwicklung.

In der eulerschen Identität

$$e^{i\pi}+1=0$$

werden fundamentale mathematische Konstanten in Zusammenhang gesetzt: Die ganze Zahl 1, die eulersche Zahl *e*, die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen[610] und die Kreiszahl π.

[…]

[609] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[610] Wikipedia, Komplexe Zahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 60430529/Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, < URL >.

Die eulersche Zahl lässt sich auch durch

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

oder durch den Quotienten aus Fakultät[611] und Subfakultät beschreiben:

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{!n}$$

Eher von exotischem Reiz als von praktischer Bedeutung ist die *catalansche Darstellung*

$$e = \sqrt[1]{\frac{2}{1}} \cdot \sqrt[2]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}} \cdot \sqrt[8]{\frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}} \ldots$$

Die Kettenbruchentwicklung von e weist folgendes Muster auf, welches sich bis ins Unendliche fortsetzt:

$$e = [2;\ 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1\ , 8, 1, 1, 10, 1, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}}}}}$$

Außerdem lässt sich e als der Wert von x, bei dem die Funktion

[611] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

$$f(x) = \sqrt[x]{x}$$

ihr Maximum aufweist, beschreiben.

[…]

Den Grenzwert der ersten Formel kann man folgendermaßen deuten: Jemand zahlt am 1. Januar einen Euro auf der Bank ein. Die Bank garantiert ihm eine momentane Verzinsung zu einem Zinssatz p = 100 % pro Jahr. Wie groß ist sein Guthaben am 1. Januar des nächsten Jahres?

Nach der Zinseszinsformel ist das Kapital nach n Verzinsungen $K_n = K_0(1 + p / 100)^n$, wobei K_0 das Startkapital, p der Zinssatz, und n die Anzahl der Verzinsungen sind.

In diesem Beispiel sind $K_0 = 1$ und $p = 100$, wenn der Zinszuschlag jährlich erfolgt, oder $p = 100 / n$, wenn der Zinszuschlag n mal im Jahr erfolgt.

Bei jährlichem Zuschlag wäre $K_1 = 1 \cdot (1 + 1)^1 = 2{,}00$. Bei halbjährlichem Zuschlag hat man $p = 100 / 2$, also $K_2 = 1 \cdot (1 + 1/2)^2 = 2{,}25$, also schon etwas mehr. Bei täglicher Verzinsung ($p = 100/365$) erhält man $K_{365} = 1 \cdot (1 + 1/365)^{365} = 2{,}714567$. Wenn man momentan verzinst, wird n unendlich groß, und man bekommt die oben angegebene erste Formel für e.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

e ist auch häufig in der Wahrscheinlichkeitstheorie anzutreffen (siehe auch Exponentialfunktion, Stochastik): Angenommen, ein Bäcker gibt für jedes Brötchen eine Rosine in den Teig und knetet gut durch. Nachher enthält statistisch gesehen jedes e-te Brötchen keine Rosine. Die Wahrscheinlichkeit p, dass bei n Brötchen alle n Rosinen in anderen Brötchen sind, ergibt im Grenzwert für $n \to \infty$ (37%-Regel):

$$p = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$$

Sonstige Eigenschaften

Die zwei Teilkurven der impliziten Funktion $x^y - y^x = 0$ schneiden sich im Punkt $P(e / e)$. Mehrdimensionale Verallgemeinerungen dieser Funktion setzen sich im n-dimensionalen Raum aus $\frac{n^2-n}{2} + 1$ Teilkurven zusammen, die sich alle in einem Punkt schneiden, dessen Koordinaten sämtlich e betragen. Der Beweis hierfür ist nicht leicht zu führen."[612]

Die Funktion $x^y - y^x = 0$ zeigt in der mehrdimensionalen Verallgemeinerung $\frac{n^2-n}{2} + 1$ einen Ausblick auf die Dreiecksformel[613] $\Delta_{n-1} + \Delta_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$, wo $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^2+n}{2}$ geschrieben werden und $\frac{n^2+n}{2} = 1$ sein kann (bei n = 1, oder bei n = – 2). Vor allem zeigt sich die Querverbindung zu der Formel[614] von Euler p = 4n + 1 = x² + y² als Grundprinzip der Primzahlen[615] (nach Fermat). Wenn sonach zwei Formel von Euler[616] für die Berechnung der Primzahlen gibt, nämlich p = 4n + 1 = x² + ny² und n² + n + 41 sowie die gleiche Formel nochmals mit n² + n + 17, so zeigt sich, dass Euler mit der Formel x² + ny² auch y = 1 meint, so dass ebendort n = 17 oder n = 41, oder 11 und auch 1, sein kann (zB bei x = 2, y = 1, und n = 3; x² + ny² = 2² + 3·1² = 7), und so die Formel n² + n + p allgemein gilt, weil die Formel x² + ny² darin aufgeht bzw. dazu überführbar sei[617].

---

[612] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.
[613] Gronau, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, in: < URL > 22 ff; Wikipedia, Dreieckszahl, in: < URL >.
[614] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f.
[615] Tietze 3; vgl Rettenbacher 3 ff.
[616] Kowol 48.
[617] Müller-Stach/Piontkowski 3; Bundschuh 71, 283.

Es ist dann lediglich von Bedeutung, dass die Formel $n^2 + n + p$ (in der Umkehrung) auch für die Quadratzahlen gelte und deren Spezialfall sei (zB bei n = 2 und p = 1; $2^2 + 2 + 1 = 7$). Die Formel $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ korrespondiert mit der Dreiecksformel $n(n + 1)/2$ in der einfachsten Form[618]. Bei der Fakultät n! erhält man die Anzahl der Permutationen[619] durch $n(n – 1)$.

Die Formel[620] von Euler $p = 4n + 1 = x^2 + y^2$ verlangt einerseits nach der Folge 4n + 1 (= 6n – 1) als Grundprinzip und entspricht andererseits der Summe zweier Quadrate[621]. Die Eulersche Formel[622] $n^2 + n + 17$ und später $n^2 + n + 41$, mit der sich – jeweils – eine gewisse Anzahl von Primzahlen berechnen lässt[623], ist im ersten Teil $n^2 + n$ ein Spezialfall von $n^2 + am^2$ bei m = 1 und a = n. Aus den zwei von Euler gewählten Zahlen, 17 und 41, ist zu ersehen, dass die Zahl variabel ist, und eine Auswahl danach getroffen wurde, um beste Ergebnisse zu errechnen. Es lassen sich aber auch mit der einfachen Form $n^2 + n + 1$, und $n^2 + n + 11$ wenn auch in bescheidenerem Umfang, Primzahlen berechnen. Das gilt analog für weitere Primzahlen, die zugleich auch Primzahlzwillinge sind. Nach einigem Probieren zeigt sich im Vergleich, dass die beiden von Euler gewählten Zahlen p = 17, und p = 41, in $n^2 + n + p$ sich verallgemeinern lassen[624], wobei p ein Primzahlzwilling ist.

[618] Wikipedia, Dreieckszahl, in: < URL >; Gronau, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, in: < URL > 22 ff.
[619] Peters, Die Fakultät, in: < URL > 5.
[620] Fellmann/Jenni/Burckhardt 36 f.
[621] Tietze 3.
[622] Wikipedia, Seite „Primzahl", < URL >.
[623] Pieper 22 f; Bundschuh 71, 283; vgl Kowol 48; Müller-Stach/Piontkowski 3; Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.
[624] Kracher 32.

Die einfache Form $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ korrespondiert mit der Form $n(n + 1)/2$ der Dreiecksformel[625].

$n^2 + n + p$	$n^2 + n + p$	$n^2 + n + p$	$n^2 + n + p$	$n^2 + n + p$
$0^2 + 0 + 1 = 1$ $1^2 + 1 + 1 = 3$ $2^2 + 2 + 1 = 7$ $3^2 + 3 + 1 = 13$ $4^2 + 4 + 1 = 21$ $5^2 + 5 + 1 = 31$ $6^2 + 6 + 1 = 43$ $7^2 + 7 + 1 = 57$ $8^2 + 8 + 1 = 73$ $9^2 + 9 + 1 = 91$ $10^2 + 10 + 1 = 111$ $11^2 + 11 + 1 = 113$ $12^2 + 12 + 1 = 157$ …	$0^2 + 0 + 3 = 3$ $1^2 + 1 + 3 = 5$ $2^2 + 2 + 3 = 9$ $3^2 + 3 + 3 = 15$ $4^2 + 4 + 3 = 23$ $5^2 + 5 + 3 = 33$ $6^2 + 6 + 3 = 45$ $7^2 + 7 + 3 = 59$ $8^2 + 8 + 3 = 75$ $9^2 + 9 + 3 = 93$ $10^2 + 10 + 3 = 113$ $11^2 + 11 + 3 = 135$ $12^2 + 12 + 3 = 159$ …	$0^2 + 0 + 5 = 5$ $1^2 + 1 + 5 = 7$ $2^2 + 2 + 5 = 11$ $3^2 + 3 + 5 = 17$ $4^2 + 4 + 5 = 25$ $5^2 + 5 + 5 = 35$ $6^2 + 6 + 5 = 47$ $7^2 + 7 + 5 = 51$ $8^2 + 8 + 5 = 77$ $9^2 + 9 + 5 = 95$ $10^2 + 10 + 5 = 115$ $11^2 + 11 + 5 = 127$ $12^2 + 12 + 5 = 161$ …	$0^2 + 0 + 7 = 7$ $1^2 + 1 + 7 = 9$ $2^2 + 2 + 7 = 13$ $3^2 + 3 + 7 = 19$ $4^2 + 4 + 7 = 27$ $5^2 + 5 + 7 = 37$ $6^2 + 6 + 7 = 49$ $7^2 + 7 + 7 = 63$ $8^2 + 8 + 7 = 79$ $9^2 + 9 + 7 = 97$ $10^2 + 10 + 7 = 117$ $11^2 + 11 + 7 = 119$ $12^2 + 12 + 7 = 163$ …	$0^2 + 0 + 9 = 9$ $1^2 + 1 + 9 = 11$ $2^2 + 2 + 9 = 15$ $3^2 + 3 + 9 = 21$ $4^2 + 4 + 9 = 29$ $5^2 + 5 + 9 = 39$ $6^2 + 6 + 9 = 51$ $7^2 + 7 + 9 = 65$ $8^2 + 8 + 9 = 81$ $9^2 + 9 + 9 = 99$ $10^2 + 10 + 9 = 119$ $11^2 + 11 + 9 = 121$ $12^2 + 12 + 9 = 165$ …
$0^2 + 0 + 11 = 11$ $1^2 + 1 + 11 = 13$ $2^2 + 2 + 11 = 17$ $3^2 + 3 + 11 = 23$ $4^2 + 4 + 11 = 31$ $5^2 + 5 + 11 = 41$ $6^2 + 6 + 11 = 53$ $7^2 + 7 + 11 = 67$	$0^2 + 0 + 13 = 13$ $1^2 + 1 + 13 = 15$ $2^2 + 2 + 13 = 19$ $3^2 + 3 + 13 = 25$ $4^2 + 4 + 13 = 33$ $5^2 + 5 + 13 = 43$ $6^2 + 6 + 13 = 55$ $7^2 + 7 + 13 = 69$	$1^2 + 1 + 15 = 17$ $2^2 + 2 + 15 = 21$ $3^2 + 3 + 15 = 27$ $4^2 + 4 + 15 = 35$ $5^2 + 5 + 15 = 45$ $6^2 + 6 + 15 = 57$ $7^2 + 7 + 15 = 71$ $8^2 + 8 + 15 = 87$	$1^2 + 1 + 17 = 19$ $2^2 + 2 + 17 = 23$ $3^2 + 3 + 17 = 29$ $4^2 + 4 + 17 = 37$ $5^2 + 5 + 17 = 47$ $6^2 + 6 + 17 = 59$ $7^2 + 7 + 17 = 73$ $8^2 + 8 + 17 = 89$	$1^2 + 1 + 19 = 21$ $2^2 + 2 + 19 = 25$ $3^2 + 3 + 19 = 31$ $4^2 + 4 + 19 = 39$ $5^2 + 5 + 19 = 49$ $6^2 + 6 + 19 = 61$ $7^2 + 7 + 19 = 75$ $8^2 + 8 + 19 = 91$

[625] Wikipedia, Dreieckszahl, in: < URL >; Gronau, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, in: < URL > 22 ff.

$8^2 + 8 + 11 = 83$ $9^2 + 9 + 11 = 101$ $10^2 + 10 + 11 = 121$ $11^2 + 11 + 11 = 123$ $12^2 + 12 + 11 = 167$ …	$8^2 + 8 + 13 = 85$ $9^2 + 9 + 13 = 103$ $10^2 + 10 + 13 = 123$ $11^2 + 11 + 13 = 145$ $12^2 + 12 + 13 = 169$ …	$9^2 + 9 + 15 = 105$ $10^2 + 10 + 15 = 125$ $11^2 + 11 + 15 = 147$ $12^2 + 12 + 15 = 171$ …	$9^2 + 9 + 17= 107$ $10^2 + 10 + 17 = 127$ $11^2 + 11 + 17 = 149$ $12^2 + 12 + 17 = 173$ $13^2 + 13 + 17 = 199$ $14^2 + 14 + 17 = 227$ $15^2 + 15 + 17 = 257$ $16^2 + 16 + 17 = 289$ …	$9^2 + 9 + 19 = 109$ $10^2 + 10 + 19 = 129$ $11^2 + 11 + 19 = 151$ $12^2 + 12 + 19 = 175$ $13^2 + 13 + 19 = 201$ $14^2 + 14 + 19 = 229$ $15^2 + 15 + 19 = 259$ $16^2 + 16 + 19 = 291$ …
$1^2 + 1 + 21 = 23$ $2^2 + 2 + 21 = 27$ $3^2 + 3 + 21 = 33$ $4^2 + 4 + 21 = 41$ $5^2 + 5 + 21 = 51$ $6^2 + 6 + 21 = 63$ $7^2 + 7 + 21 = 77$ $8^2 + 8 + 21 = 93$ $9^2 + 9 + 21 = 111$ $10^2 + 10 + 21 = 131$ $11^2 + 11 + 21 = 153$ $12^2 + 12 + 21 = 177$ $13^2 + 13 + 21 = 203$ $14^2 + 14 + 21 = 231$ $15^2 + 15 + 21 = 261$ $16^2 + 16 + 21 = 293$ …	$1^2 + 1 + 23 = 25$ $2^2 + 2 + 23 = 29$ $3^2 + 3 + 23 = 35$ $4^2 + 4 + 23 = 43$ $5^2 + 5 + 23 = 53$ $6^2 + 6 + 23 = 65$ $7^2 + 7 + 23 = 79$ $8^2 + 8 + 23 = 95$ $9^2 + 9 + 23 = 113$ $10^2 + 10 + 23 = 133$ $11^2 + 11 + 23 = 155$ $12^2 + 12 + 23 = 179$ $13^2 + 13 + 23 = 205$ $14^2 + 14 + 23 = 233$ $15^2 + 15 + 23 = 263$ $16^2 + 16 + 23 = 295$ …	$1^2 + 1 + 25 = 27$ $2^2 + 2 + 25 = 31$ $3^2 + 3 + 25 = 37$ $4^2 + 4 + 25 = 45$ $5^2 + 5 + 25 = 55$ $6^2 + 6 + 25 = 67$ $7^2 + 7 + 25 = 81$ $8^2 + 8 + 25 = 97$ $9^2 + 9 + 25 = 115$ $10^2 + 10 + 25 = 135$ $11^2 + 11 + 25 = 157$ $12^2 + 12 + 25 = 181$ $13^2 + 13 + 25 = 207$ $14^2 + 14 + 25 = 235$ $15^2 + 15 + 25 = 265$ $16^2 + 16 + 25 = 297$ …	$1^2 + 1 + 27 = 29$ $2^2 + 2 + 27 = 33$ $3^2 + 3 + 27 = 39$ $4^2 + 4 + 27 = 47$ $5^2 + 5 + 27 = 57$ $6^2 + 6 + 27 = 69$ $7^2 + 7 + 27 = 83$ $8^2 + 8 + 27 = 100$ $9^2 + 9 + 27 = 117$ $10^2 + 10 + 27 = 137$ $11^2 + 11 + 27 = 159$ $12^2 + 12 + 27 = 183$ $13^2 + 13 + 27 = 209$ $14^2 + 14 + 27 = 237$ $15^2 + 15 + 27 = 267$ $16^2 + 16 + 27 = 299$ …	$1^2 + 1 + 29 = 31$ $2^2 + 2 + 29 = 35$ $3^2 + 3 + 29 = 41$ $4^2 + 4 + 29 = 49$ $5^2 + 5 + 29 = 59$ $6^2 + 6 + 29 = 71$ $7^2 + 7 + 29 = 85$ $8^2 + 8 + 29 = 101$ $9^2 + 9 + 29 = 119$ $10^2 + 10 + 29 = 139$ $11^2 + 11 + 29 = 161$ $12^2 + 12 + 29 = 185$ $13^2 + 13 + 29 = 211$ $14^2 + 14 + 29 = 239$ $15^2 + 15 + 29 = 269$ $16^2 + 16 + 29 = 303$ …
$1^2 + 1 + 31 =33$ $2^2 + 2 + 31 = 37$	$1^2 + 1 + 33 =35$ $2^2 + 2 + 33 = 39$	$1^2 + 1 + 35 =37$ $2^2 + 2 + 35 = 41$	$1^2 + 1 + 37 =39$ $2^2 + 2 + 37 = 43$	$1^2 + 1 + 39 = 41$ $2^2 + 2 + 39 = 45$

$3^2 + 3 + 31 = \underline{43}$ $4^2 + 4 + 31 = 51$ $5^2 + 5 + 31 = \underline{61}$ $6^2 + 6 + 31 = \underline{73}$ $7^2 + 7 + 31 = 87$ $8^2 + 8 + 31 = \underline{103}$ $9^2 + 9 + 31 = 121$ $10^2 + 10 + 31 = 141$ $11^2 + 11 + 31 = \underline{163}$ $12^2 + 12 + 31 = 187$ $13^2 + 13 + 31 = 213$ $14^2 + 14 + 31 = \underline{241}$ $15^2 + 15 + 31 = \underline{271}$ $16^2 + 16 + 31 = 305$ …	$3^2 + 3 + 33 = 45$ $4^2 + 4 + 33 = \underline{53}$ $5^2 + 5 + 33 = 63$ $6^2 + 6 + 33 = 75$ $7^2 + 7 + 33 = \underline{89}$ $8^2 + 8 + 33 = 105$ $9^2 + 9 + 33 = 123$ $10^2 + 10 + 33 = 143$ $11^2 + 11 + 33 = 165$ $12^2 + 12 + 33 = 189$ $13^2 + 13 + 33 = 215$ $14^2 + 14 + 33 = 243$ $15^2 + 15 + 33 = 273$ $16^2 + 16 + 33 = \underline{307}$ …	$3^2 + 3 + 35 = \underline{47}$ $4^2 + 4 + 35 = 55$ $5^2 + 5 + 35 = 65$ $6^2 + 6 + 35 = 77$ $7^2 + 7 + 35 = 91$ $8^2 + 8 + 35 = \underline{107}$ $9^2 + 9 + 35 = 125$ $10^2 + 10 + 35 = 145$ $11^2 + 11 + 35 = \underline{167}$ $12^2 + 12 + 35 = \underline{191}$ $13^2 + 13 + 35 = 217$ $14^2 + 14 + 35 = 245$ $15^2 + 15 + 35 = 275$ $16^2 + 16 + 35 = 309$ …	$3^2 + 3 + 37 = 49$ $4^2 + 4 + 37 = 57$ $5^2 + 5 + 37 = \underline{67}$ $6^2 + 6 + 37 = \underline{79}$ $7^2 + 7 + 37 = 93$ $8^2 + 8 + 37 = \underline{109}$ $9^2 + 9 + 37 = \underline{127}$ $10^2 + 10 + 37 = 147$ $11^2 + 11 + 37 = 169$ $12^2 + 12 + 37 = \underline{193}$ $13^2 + 13 + 37 = 219$ $14^2 + 14 + 37 = 247$ $15^2 + 15 + 37 = \underline{277}$ $16^2 + 16 + 37 = \underline{311}$ …	$3^2 + 3 + 39 = 51$ $4^2 + 4 + 39 = \underline{59}$ $5^2 + 5 + 39 = 69$ $6^2 + 6 + 39 = 81$ $7^2 + 7 + 39 = 95$ $8^2 + 8 + 39 = 111$ $9^2 + 9 + 39 = 129$ $10^2 + 10 + 39 = \underline{149}$ $11^2 + 11 + 39 = 171$ $12^2 + 12 + 39 = 195$ $13^2 + 13 + 39 = 221$ $14^2 + 14 + 39 = 249$ $15^2 + 15 + 39 = 279$ $16^2 + 16 + 39 = \underline{313}$ …
$1^2 + 1 + 41 = \underline{43}$ $2^2 + 2 + 41 = \underline{47}$ $3^2 + 3 + 41 = \underline{53}$ $4^2 + 4 + 41 = \underline{61}$ $5^2 + 5 + 41 = \underline{71}$ $6^2 + 6 + 41 = \underline{83}$ $7^2 + 7 + 41 = \underline{97}$ $8^2 + 8 + 41 = \underline{113}$ $9^2 + 9 + 41 = \underline{131}$ $10^2 + 10 + 41 = \underline{151}$ $11^2 + 11 + 41 = \underline{173}$ $12^2 + 12 + 41 = \underline{197}$ $13^2 + 13 + 41 = \underline{223}$ $14^2 + 14 + 41 = \underline{251}$ $15^2 + 15 + 41 = \underline{281}$	$1^2 + 1 + 43 = 45$ $2^2 + 2 + 43 = 49$ $3^2 + 3 + 43 = 55$ $4^2 + 4 + 43 = 63$ $5^2 + 5 + 43 = \underline{73}$ $6^2 + 6 + 43 = 85$ $7^2 + 7 + 43 = 99$ $8^2 + 8 + 43 = 115$ $9^2 + 9 + 43 = 133$ $10^2 + 10 + 43 = 153$ $11^2 + 11 + 43 = 175$ $12^2 + 12 + 43 = \underline{199}$ $13^2 + 13 + 43 = 225$ $14^2 + 14 + 43 = 253$ $15^2 + 15 + 43 = \underline{283}$	$1^2 + 1 + 45 = \underline{47}$ $2^2 + 2 + 45 = 51$ $3^2 + 3 + 45 = 57$ $4^2 + 4 + 45 = 65$ $5^2 + 5 + 45 = 75$ $6^2 + 6 + 45 = 87$ $7^2 + 7 + 45 = \underline{101}$ $8^2 + 8 + 45 = 117$ $9^2 + 9 + 45 = 135$ $10^2 + 10 + 45 = 155$ $11^2 + 11 + 45 = 177$ $12^2 + 12 + 45 = 201$ $13^2 + 13 + 45 = \underline{227}$ $14^2 + 14 + 45 = 255$ $15^2 + 15 + 45 = 285$	$1^2 + 1 + 47 = 49$ $2^2 + 2 + 47 = \underline{53}$ $3^2 + 3 + 47 = \underline{59}$ $4^2 + 4 + 47 = \underline{67}$ $5^2 + 5 + 47 = 77$ $6^2 + 6 + 47 = \underline{89}$ $7^2 + 7 + 47 = \underline{103}$ $8^2 + 8 + 47 = 119$ $9^2 + 9 + 47 = \underline{137}$ $10^2 + 10 + 47 = \underline{157}$ $11^2 + 11 + 47 = \underline{179}$ $12^2 + 12 + 47 = 203$ $13^2 + 13 + 47 = \underline{229}$ $14^2 + 14 + 47 = \underline{257}$ $15^2 + 15 + 47 = 287$	$1^2 + 1 + 49 = 51$ $2^2 + 2 + 49 = 55$ $3^2 + 3 + 49 = \underline{61}$ $4^2 + 4 + 49 = 69$ $5^2 + 5 + 49 = \underline{79}$ $6^2 + 6 + 49 = 91$ $7^2 + 7 + 49 = 105$ $8^2 + 8 + 49 = 121$ $9^2 + 9 + 49 = \underline{139}$ $10^2 + 10 + 49 = 159$ $11^2 + 11 + 49 = \underline{181}$ $12^2 + 12 + 49 = 205$ $13^2 + 13 + 49 = 231$ $14^2 + 14 + 49 = 259$ $15^2 + 15 + 49 = 289$

$16^2 + 16 + 41 = \underline{313}$	$16^2 + 16 + 43 = 315$	$16^2 + 16 + 45 = \underline{317}$	$16^2 + 16 + 47 = 319$	$16^2 + 16 + 49 = 321$
$17^2 + 17 + 41 = \underline{347}$	$17^2 + 17 + 43 = \underline{349}$	$17^2 + 17 + 45 = 351$	$17^2 + 17 + 47 = \underline{353}$	$17^2 + 17 + 49 = 355$
$18^2 + 18 + 41 = \underline{383}$	$18^2 + 18 + 43 = 385$	$18^2 + 18 + 45 = 387$	$18^2 + 18 + 47 = \underline{389}$	$18^2 + 18 + 49 = 391$
$19^2 + 19 + 41 = \underline{421}$	$19^2 + 19 + 43 = 423$	$19^2 + 19 + 45 = 425$	$19^2 + 19 + 47 = 427$	$19^2 + 19 + 49 = 429$
$20^2 + 20 + 41 = \underline{461}$	$20^2 + 20 + 43 = \underline{463}$	$20^2 + 20 + 45 = 465$	$20^2 + 20 + 47 = \underline{467}$	$20^2 + 20 + 49 = 469$
$21^2 + 21 + 41 = \underline{503}$	$21^2 + 21 + 43 = 505$	$21^2 + 21 + 45 = 507$	$21^2 + 21 + 47 = \underline{509}$	$21^2 + 21 + 49 = 511$
$22^2 + 22 + 41 = \underline{547}$	$22^2 + 22 + 43 = 549$	$22^2 + 22 + 45 = 551$	$22^2 + 22 + 47 = 553$	$22^2 + 22 + 49 = 555$
$23^2 + 23 + 41 = \underline{593}$	$23^2 + 23 + 43 = 595$	$23^2 + 23 + 45 = 597$	$23^2 + 23 + 47 = \underline{599}$	$23^2 + 23 + 49 = \underline{601}$
$24^2 + 24 + 41 = \underline{641}$	$24^2 + 24 + 43 = \underline{643}$	$24^2 + 24 + 45 = 645$	$24^2 + 24 + 47 = \underline{647}$	$24^2 + 24 + 49 = 649$
$25^2 + 25 + 41 = \underline{691}$	$25^2 + 25 + 43 = 693$	$25^2 + 25 + 45 = 695$	$25^2 + 25 + 47 = 697$	$25^2 + 25 + 49 = 699$
$26^2 + 26 + 41 = \underline{743}$	$26^2 + 26 + 43 = 745$	$26^2 + 26 + 45 = 747$	$26^2 + 26 + 47 = 749$	$26^2 + 26 + 49 = \underline{751}$
$27^2 + 27 + 41 = \underline{797}$	$27^2 + 27 + 43 = 799$	$27^2 + 27 + 45 = 801$	$27^2 + 27 + 47 = 803$	$27^2 + 27 + 49 = 805$
$28^2 + 28 + 41 = \underline{853}$	$28^2 + 28 + 43 = 855$	$28^2 + 28 + 43 = \underline{857}$	$28^2 + 28 + 47 = \underline{859}$	$28^2 + 28 + 49 = 861$
$29^2 + 29 + 41 = \underline{911}$	$29^2 + 29 + 43 = 913$	$29^2 + 29 + 43 = 915$	$29^2 + 29 + 47 = 917$	$29^2 + 29 + 49 = \underline{919}$
$30^2 + 30 + 41 = \underline{971}$	$30^2 + 30 + 43 = 973$	$30^2 + 30 + 43 = 975$	$30^2 + 30 + 47 = \underline{977}$	$30^2 + 30 + 49 = 979$
$31^2 + 31 + 41 = \underline{1033}$	$31^2 + 31 + 43 = 1035$	$31^2 + 31 + 43 = 1037$	$31^2 + 31 + 47 = \underline{1039}$	$31^2 + 31 + 49 = 1041$
$32^2 + 32 + 41 = \underline{1097}$	$32^2 + 32 + 43 = 1099$	$32^2 + 32 + 43 = 1101$	$32^2 + 32 + 47 = \underline{1103}$	$32^2 + 32 + 49 = 1105$
$33^2 + 33 + 41 = \underline{1163}$	$33^2 + 33 + 43 = 1165$	$33^2 + 33 + 43 = 1167$	$33^2 + 33 + 47 = 1169$	$33^2 + 33 + 49 = \underline{1171}$
$34^2 + 34 + 41 = \underline{1231}$	$34^2 + 34 + 43 = 1233$	$34^2 + 34 + 43 = 1235$	$34^2 + 34 + 47 = \underline{1237}$	$34^2 + 34 + 49 = 1239$
$35^2 + 35 + 41 = \underline{1301}$	$35^2 + 35 + 43 = \underline{1303}$	$35^2 + 35 + 45 = 1305$	$35^2 + 35 + 47 = \underline{1307}$	$35^2 + 35 + 49 = 1309$
$36^2 + 36 + 41 = \underline{1373}$	$36^2 + 36 + 43 = 1375$	$36^2 + 36 + 45 = 1377$	$36^2 + 36 + 47 = 1379$	$36^2 + 36 + 49 = \underline{1381}$
$37^2 + 37 + 41 = \underline{1447}$	$37^2 + 37 + 43 = 1449$	$37^2 + 37 + 45 = \underline{1451}$	$37^2 + 37 + 47 = \underline{1453}$	$37^2 + 37 + 49 = 1455$
$38^2 + 38 + 41 = \underline{1523}$	$38^2 + 38 + 43 = 1525$	$38^2 + 38 + 45 = 1527$	$38^2 + 38 + 47 = 1529$	$38^2 + 38 + 49 = \underline{1531}$
$39^2 + 39 + 41 = \underline{1601}$	$39^2 + 39 + 43 = 1603$	$39^2 + 39 + 45 = 1605$	$39^2 + 39 + 47 = \underline{1607}$	$39^2 + 39 + 49 = \underline{1609}$
$40^2 + 40 + 41 = 1681$	$40^2 + 40 + 43 = 1683$	$40^2 + 40 + 45 = 1685$	$40^2 + 40 + 47 = 1687$	$40^2 + 40 + 49 = 1689$
$41^2 + 41 + 41 = 1763$	$41^2 + 41 + 43 = 1765$	$41^2 + 41 + 45 = 1767$	$41^2 + 41 + 47 = 1769$	$41^2 + 41 + 49 = 1771$
$42^2 + 42 + 41 = \underline{1847}$	$42^2 + 42 + 43 = 1849$	$42^2 + 42 + 45 = 1851$	$42^2 + 42 + 47 = 1853$	$42^2 + 42 + 49 = 1855$
$43^2 + 43 + 41 = \underline{1933}$	$43^2 + 43 + 43 = 1935$	$43^2 + 43 + 45 = 1937$	$43^2 + 43 + 47 = 1939$	$43^2 + 43 + 49 = 1941$
$44^2 + 44 + 41 = 2021$	$44^2 + 44 + 43 = 2023$	$44^2 + 44 + 45 = 2025$	$44^2 + 44 + 47 = \underline{2027}$	$44^2 + 44 + 49 = 2079$
$45^2 + 45 + 41 = \underline{2111}$	$45^2 + 45 + 43 = \underline{2113}$	$45^2 + 45 + 45 = 2115$	$45^2 + 45 + 47 = 2117$	$45^2 + 45 + 49 = 2119$
…	…	…	…	

$1^2 + 1 + 71 = 73$ $2^2 + 2 + 71 = 77$ $3^2 + 3 + 71 = 83$ $4^2 + 4 + 71 = 91$ $5^2 + 5 + 71 = 101$ $6^2 + 6 + 71 = 113$ $7^2 + 7 + 71 = 127$ $8^2 + 8 + 71 = 143$ $9^2 + 9 + 71 = 161$ $10^2 + 10 + 71 = 181$ $11^2 + 11 + 71 = 203$ $12^2 + 12 + 71 = 227$ $13^2 + 13 + 71 = 253$ $14^2 + 14 + 71 = 281$ $15^2 + 15 + 71 = 311$ $16^2 + 16 + 71 = 343$ $17^2 + 17 + 71 = 377$ $18^2 + 18 + 71 = 413$ $19^2 + 19 + 71 = 451$ $20^2 + 20 + 71 = 491$ $21^2 + 21 + 71 = 533$ $22^2 + 22 + 71 = 577$ $23^2 + 23 + 71 = 623$ $24^2 + 24 + 71 = 671$ $25^2 + 25 + 71 = 721$ $26^2 + 26 + 71 = 773$ $27^2 + 27 + 71 = 827$ $28^2 + 28 + 71 = 883$ $29^2 + 29 + 71 = 941$ $30^2 + 30 + 71 = 1001$ $31^2 + 31 + 71 = 1063$				

$32^2 + 32 + 71 = 1127$ $33^2 + 33 + 71 = 1193$ $34^2 + 34 + 71 = 1261$ $35^2 + 35 + 71 = 1331$ $36^2 + 36 + 71 = 1403$ $37^2 + 37 + 71 = 1477$ $38^2 + 38 + 71 = \underline{1553}$ $39^2 + 39 + 71 = 1631$ $40^2 + 40 + 71 = 1711$ $41^2 + 41 + 71 = 1793$ $42^2 + 42 + 71 = 1877$ $43^2 + 43 + 71 = 1963$ $44^2 + 44 + 71 = 2051$ $45^2 + 45 + 71 = 2141$ $46^2 + 46 + 71 = 2233$ $47^2 + 47 + 71 = 2327$ $48^2 + 48 + 71 = 2423$ $49^2 + 49 + 71 = 2521$ $50^2 + 50 + 71 = 2621$ $51^2 + 51 + 71 = 2723$ $52^2 + 52 + 71 = 2927$ $53^2 + 53 + 71 = 2933$ $54^2 + 54 + 71 = 3041$ $55^2 + 55 + 71 = 3151$ $56^2 + 56 + 71 = 3263$ $57^2 + 57 + 71 = 3377$ $58^2 + 58 + 71 = 3493$ $59^2 + 59 + 71 = 3611$ $60^2 + 60 + 71 = 3731$ $61^2 + 61 + 71 = 3853$ $62^2 + 62 + 71 = 3977$ $63^2 + 63 + 71 = 4103$				

$64^2 + 64 + 71 = 4231$ $65^2 + 65 + 71 = 4361$ $66^2 + 66 + 71 = 4493$ $67^2 + 67 + 71 = 4627$ $68^2 + 68 + 71 = 4763$ $69^2 + 69 + 71 = 4901$ $70^2 + 70 + 71 = 5041$ $71^2 + 71 + 71 = 5183$ …				
$0^2 + 0 + 101 = 101$ $1^2 + 1 + 101 = 103$ $2^2 + 2 + 101 = 107$ $3^2 + 3 + 101 = 113$ $4^2 + 4 + 101 = 121$ $5^2 + 5 + 101 = 131$ $6^2 + 6 + 101 = 143$ $7^2 + 7 + 101 = 157$ $8^2 + 8 + 101 = 173$ $9^2 + 9 + 101 = 191$ $10^2 + 0 + 101 = 211$ $11^2 + 11 + 101 = 233$ $12^2 + 12 + 101 = 257$ $13^2 + 13 + 101 = 283$ $14^2 + 14 + 101 = 311$ $15^2 + 15 + 101 = 341$ $16^2 + 16 + 101 = 373$ $17^2 + 17 + 101 = 407$ $18^2 + 18 + 101 = 443$ $19^2 + 19 + 101 = 481$ $20^2 + 20 + 101 = 521$				

$21^2 + 21 + 101 = 563$ $22^2 + 22 + 101 = 607$ $23^2 + 23 + 101 = 653$ $24^2 + 24 + 101 = 701$ $25^2 + 25 + 101 = 751$ $26^2 + 26 + 101 = 803$ $27^2 + 27 + 101 = 857$ $28^2 + 28 + 101 = 913$ $29^2 + 29 + 101 = 971$ $30^2 + 30 + 101 = 1031$ $31^2 + 31 + 101 = 1093$ $32^2 + 32 + 101 = 1157$ $33^2 + 33 + 101 =$ $34^2 + 34 + 101 =$ $35^2 + 35 + 101 =$ $36^2 + 36 + 101 =$ $37^2 + 37 + 101 =$ $38^2 + 38 + 101 = 1$ $39^2 + 39 + 101 = 1$ $40^2 + 40 + 101 = 1$ $41^2 + 41 + 101 = 1$ $42^2 + 42 + 101 =$ $43^2 + 43 + 101 =$ $44^2 + 44 + 101 =$ $45^2 + 45 + 101 =$ $46^2 + 46 + 101 =$ $47^2 + 47 + 101 =$ $48^2 + 48 + 101 =$ $49^2 + 49 + 101 =$ $50^2 + 50 + 101 =$ $51^2 + 51 + 101 =$ $52^2 + 52 + 101 =$				

$53^2 + 53 + 101 =$ $54^2 + 54 + 101 =$ $55^2 + 55 + 101 =$ $56^2 + 56 + 101 = 3293$ $57^2 + 57 + 101 =$ $58^2 + 58 + 101 =$ $59^2 + 59 + 101 =$ $60^2 + 60 + 101 =$ $61^2 + 61 + 101 =$ $62^2 + 62 + 101 =$ $63^2 + 63 + 101 =$ $64^2 + 64 + 101 =$ $65^2 + 65 + 101 =$ $66^2 + 66 + 101 = 4523$ $67^2 + 67 + 101 = 4657$ $68^2 + 68 + 101 = 4793$ $69^2 + 69 + 101 = 4931$ $70^2 + 70 + 101 = 5071$ $71^2 + 71 + 101 = 5213$ …				
$1^2 + 1 + 461 = 463$ $2^2 + 2 + 461 = 467$ $3^2 + 3 + 461 =$ $4^2 + 4 + 461 =$ $5^2 + 5 + 461 =$ $6^2 + 6 + 461 =$ $7^2 + 7 + 461 =$ $8^2 + 8 + 461 =$ $9^2 + 9 + 461 =$ $10^2 + 10 + 461 =$ $11^2 + 11 + 461 =$				

$12^2 + 12 + 461 =$ $13^2 + 13 + 461 =$ $14^2 + 14 + 461 =$ $15^2 + 15 + 461 =$ $16^2 + 16 + 461 =$ $17^2 + 17 + 461 =$ $18^2 + 18 + 461 =$ $19^2 + 19 + 461 =$ $20^2 + 20 + 461 =$ $21^2 + 21 + 461 =$ $22^2 + 22 + 461 = 976$ $23^2 + 23 + 461 = 1013$ $24^2 + 24 + 461 = 1061$ $25^2 + 25 + 461 =$ $26^2 + 26 + 461 =$ $27^2 + 27 + 461 =$ $28^2 + 28 + 461 =$ $29^2 + 29 + 461 =$ $30^2 + 30 + 461 =$ $31^2 + 31 + 461 =$ $32^2 + 32 + 461 =$ $33^2 + 33 + 461 =$ $34^2 + 34 + 461 =$ $35^2 + 35 + 461 = \underline{1721}$ $36^2 + 36 + 461 = 1793$ $37^2 + 37 + 461 = \underline{1867}$ $38^2 + 38 + 461 = 1943$ $39^2 + 39 + 461 = 2021$ $40^2 + 40 + 461 = 2101$ $41^2 + 41 + 461 = 2183$				

Die Formel $n^2 + n + p$ scheint nur bei $n^2 + n + 11$; $n^2 + n + 17$ und $n^2 + n + 41$, also nur bei einigen ausgesuchten Zahlen, zu greifen[626]. Dort ist jeweils bis zum Quadratzahl. wo zwangsläufig die Reihe der Primzahlen endet, durchgehend eine Primzahl mit der Formel zu bekommen. Damit sind allerdings, wie die nachstehende Tabelle für $n^2 + n + 41$ zeigt, keineswegs alle Primzahlen erfasst, die durch Unterstreichen gezeichnet werden.

	1, 2, 3, 5, 7, 11,	2, 2, 2,4,
$1^2 + 1 + 41 = \underline{43}$ $2^2 + 2 + 41 = \underline{47}$ $3^2 + 3 + 41 = \underline{53}$ $4^2 + 4 + 41 = \underline{61}$ $5^2 + 5 + 41 = \underline{71}$ $6^2 + 6 + 41 = \underline{83}$ $7^2 + 7 + 41 = \underline{97}$	13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107	2,4 2,4,6 2,6,4, 2,4,6,6 2,6,4 2,6,4,6,8,4 2,4
$8^2 + 8 + 41 = \underline{113}$ $9^2 + 9 + 41 = \underline{131}$ $10^2 + 10 + 41 = \underline{151}$ $11^2 + 11 + 41 = \underline{173}$ $12^2 + 12 + 41 = \underline{197}$ $13^2 + 13 + 41 = \underline{223}$ $14^2 + 14 + 41 = \underline{251}$ $15^2 + 15 + 41 = \underline{281}$ $16^2 + 16 + 41 = \underline{313}$	109, <u>113</u>, 127, <u>131</u>, 137, 139, 149, <u>151</u>, 157, 163, 167, <u>173</u>, 179, 181,191, 193, <u>197</u>, 199, 211, <u>223</u>, 227, 229, 233, 239, 241, <u>251</u>, 257, 263, 269, 271, 277, <u>281</u>,	2,4,4,4,6 2,10 2,6,6,4,6,6 2,10, 2,6, 2,12,12,4 2,4,6 2,10,6,6, 2,6,4,

[626] Müller-Stach/Piontkowski 3; Bundschuh 71, 283; Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164.

$17^2 + 17 + 41 = \underline{347}$	283, 293, 307, 311,	2,10,14,4
$18^2 + 18 + 41 = \underline{383}$	313, 317, 331, 337,	2,
$19^2 + 19 + 41 = \underline{421}$	347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383,	
$20^2 + 20 + 41 = \underline{461}$	389, 397, 401, 409, 419,	
$21^2 + 21 + 41 = \underline{503}$	421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461,	
$22^2 + 22 + 41 = \underline{547}$	463, 467, 479, 487, 491, 499,	
$23^2 + 23 + 41 = \underline{593}$	503, 509, 521, 523, 541,	
$24^2 + 24 + 41 = \underline{641}$	547, 557, 563, 569, 571, 577, 587,	
$25^2 + 25 + 41 = \underline{691}$	593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631,	
$26^2 + 26 + 41 = \underline{743}$	641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683	
$27^2 + 27 + 41 = \underline{797}$	691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743,	
$28^2 + 28 + 41 = \underline{853}$	751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809,	
$29^2 + 29 + 41 = \underline{911}$	811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857,	
$30^2 + 30 + 41 = \underline{971}$	859, 863, 877, 881, 883, 887, 907 911, 919,	
$31^2 + 31 + 41 = \underline{1033}$	929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977,	
$32^2 + 32 + 41 = \underline{1097}$	983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021,	
$33^2 + 33 + 41 = \underline{1163}$	1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063,	
$34^2 + 34 + 41 = \underline{1231}$	1069, 1087, 1091, 1093, 1097,	
$35^2 + 35 + 41 = \underline{1301}$	1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153,	
$36^2 + 36 + 41 = \underline{1373}$	1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213,	
$37^2 + 37 + 41 = \underline{1447}$	1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259,	
$38^2 + 38 + 41 = \underline{1523}$	1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297,	
$39^2 + 39 + 41 = \underline{1601}$	1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361,	
$40^2 + 40 + 41 = 1681$	1367, 1373, 1381, 1399,	
$41^2 + 41 + 41 = 1763$	1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447,	
$42^2 + 42 + 41 = \underline{1847}$	1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487,	
$43^2 + 43 + 41 = \underline{1933}$	1489, 1493, 1499,	
$44^2 + 44 + 41 = 2021$	1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559,	

$45^2 + 45 + 41 = 2111$ …	1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889,	

Die Folge $(6n)^2$

Mit Ausnahme von $n = 1$ ist die letzte Ziffer eines n eine 0, 2, 3, 5, 7 oder eine 8, da im anderen Fall eine der beiden Zahlen $6n - 1$ bzw. $6n + 1$ durch 5 teilbar und damit keine Primzahl wäre.[627] Denn die Zahl n in 6n + 1 und 6n – 1 darf nicht die Endziffer 1, 4, 6, 9, haben, wenn sie eine Primzahl sein soll:

„Will man nun wissen, ob eine Zahl eine Primzahl sein kann, so dividiert man sie durch 6 und beachtet den Rest; ist dieser 5, so ist die Zahl aus der Formel 6x – 1, und ist er 1, so ist sie aus der Formel 6x + 1 entstanden. Diese Zahl kann eine Primzahl sein, jede andere nicht.

Kann sie eine Primzahl sein, so ist noch festzustellen, ob sie wirklich eine ist oder nicht.

Die Zahl ist keine Primzahl, wenn

1. sie auf 5 endigt; daher darf, wenn sie eine Primzahl sein soll, das x in 6x – 1 nicht mit 1 oder 6 und in 6x + 1 nicht mit 4 oder 9 endigen.“[628]

Bei Primzahlzwillingen[629] darf also die Endziffer weder 1 und 6 noch 4 und 9 sein. Die Quadrate von n haben die Endziffern 0, 1, 4, 5, 6, 9, was hieße, dass die Quadrate dafür prädestiniert seien, keine Primzahl zu sein, was so weit trivial wäre. In den Quadraten von (6n) allerdings werde n mit 6 multipliziert, 1·6 = 6, 2·6 = 12, 3·6 = 18, 4·6 = 24, 5·6 = 30, 6·6 = 6, 7·6 = 42, 8·6 = 48 und 9·6 = 54,

[627] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[628] Christof 4.
[629] Schwarz, Werner 42.

d. h. es kommen und haben die Endziffer 0, 2, 3, 5, 7, 8, sodass die zwei Gruppen von Endziffern sich gegenseitig ergänzen[630].

[630] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.

Die Folge 4(n – 1)! + 2

Der Satz von Wilson[631] $(n – 1)! + 1 \equiv 0 \pmod n$, der von CLEMENT für n und n + 2 auf Primzahlzwillinge, wenn $4[(n – 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n (n + 2)}$, n > 1, erweitert wurde, ist V. F. TKAČEV [45] hat Satz 8 auf das Zahlenpaar n, n + k (n > k >0, k gerade) verallgemeinert[632] worden:

„Es sei n ≥ 2. Die Zahlen n, n + 2 bilden genau dann ein Paar von Primzahlzwillingen, wenn

$$4[(n – 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n + 2)}.$$

Beweis. Wenn die Kongruenz erfüllt ist, dann ist n ≠ 2, 4 und

$$(n – 1)! + 1 \equiv 0 \pmod n,$$

sodass nach Wilsons[633] Satz n eine Primzahl ist. Zudem

---

[631] Pieper 52 ff.

[632] Trost 25: „Der folgende Satz, der erstmals von Waring 1770 bewiesen und J. Wilson (1741-1793) zugeschrieben wurde, stellt wohl das bekannteste Primzahlkriterium dar.

Satz 7. Die natürliche Zahl n > 1 ist dann und nur dann Primzahl, wenn $(n – 1)! + 1 \equiv 0 \pmod n$. […] Setzt man x = 0, so folgt $(p – 1)! \equiv – 1 \pmod p$. Ist n zusammengesetzt, so enthält n einen Primfaktor q < n; q ist ein Teiler von (n – 1)!, also ist (n – 1)! + 1 nicht durch q und damit auch nicht durch n teilbar.

Als Anwendung bewies CLEMENT [4] den hübschen

Satz 8. n und n + 2 sind dann und nur dann Primzahlzwillinge, wenn $4[(n – 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n (n + 2)}$, n > 1. […] V. F. TKAČEV [45] hat Satz 8 auf das Zahlenpaar n, n + k (n > k >0, k gerade) verallgemeinert."

[633] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

$$4(n-1)! + 2 \equiv 0 \pmod{n+2};$$

multipliziert mit n(n + 1),

$$4[(n+1)! + 1] + 2n + 2n - 4 \equiv 0 \pmod{n+2}$$

daraus

$$4[(n+1)! + 1] + (n+2)(2n-2) \equiv 0 \pmod{n+2};$$

und nach Wilsons Satz ist auch n + 2 prim.“[634]

n!	$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{n-2} \cdot n_{n-1} \cdot n_n$	$n \cdot 10^m$
1!	1	$0{,}1 \cdot 10^1$
2!	2	$0{,}2 \cdot 10^1$
3!	6	$0{,}6 \cdot 10^1$
4!	24	$2{,}4 \cdot 10^1$
5!	120	$1{,}2 \cdot 10^2$
6!	720	$7{,}2 \cdot 10^2$
7!	5040	$50{,}4 \cdot 10^2$
8!	40320	$403{,}2 \cdot 10^2$
9!	362880	$3628{,}8 \cdot 10^2$
10!	3628800	$3628{,}8 \cdot 10^3$
11!	39916800	$39916{,}8 \cdot 10^3$

[634] Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.

12!	479001600	$479001{,}6 \cdot 10^3$
13!	6227020800	$6227020{,}8 \cdot 10^3$
14!	87178291200	$87178291{,}2 \cdot 10^3$
15!	1307674368000	$130767436{,}8 \cdot 10^4$
16!	20922789888000	$2092278988{,}8 \cdot 10^4$
17!	355687428096000	$35568742809{,}6 \cdot 10^4$
18!	6402373705728000	$640237370572{,}8 \cdot 10^4$
19!	121645100408832000	$12164510040883{,}2 \cdot 10^4$
20!	2432902008176640000	$2432902008176{,}4 \cdot 10^5$
21!	51090942171709440000	$5109094217170{,}4 \cdot 10^5$
22!	1124000727777607680000	$1124000727777607{,}6 \cdot 10^5$
23!	25852016738884976640000	$2585201673888497{,}6 \cdot 10^5$
24!	620448401733239439360000	$620448401733239439{,}3 \cdot 10^5$
25!	15511210043330985984000000	$1551121004333098598{,}4 \cdot 10^7$
26!	403291461126605635584000000	$403291461126605635{,}8 \cdot 10^7$
27!	10888869450418352160768000000	$1088886945041835216076{,}8 \cdot 10^7$
28!	304888344611713860501504000000	$30488834461171386050150{,}4 \cdot 10^7$
29!	8841761993739701954543616000000	$884176199373970195454361{,}6 \cdot 10^7$
30!	…	…

Ein besonderes Strukturmerkmal von N! ist[635], dass mit Ausnahme der ersten Zahlen alle Ergebnisse der Multiplikation die Endziffer 0 haben.

[635] Schwarz, Werner 23 ff, 42.

Die Folge 15n

„Des Weiteren folgt auch

$(6n – 1)\cdot(6n + 1) + 1 = 36n^2 – 1 + 1 = 36n^2 = (6n)^2$.

N	(6n – 1)	(6n + 1)	N	(6n – 1)	(6n + 1)	n	(6n – 1)	(6n + 1)	n	(6n – 1)	(6n + 1)	n	(6n – 1)	(6n + 1)	n	(6n – 1)	(6n + 1)
1	5	7	32	191	193	95	569	571	175	1049	1051	248	1487	1489	338	2027	2029
2	11	13	33	197	199	100	599	601	177	1061	1063	268	1607	1609	347	2081	2083
3	17	19	38	227	229	103	617	619	182	1091	1093	270	1619	1621	348	2087	2089
5	29	31	40	239	241	107	641	643	192	1151	1153	278	1667	1669	352	2111	2113
7	41	43	45	269	271	110	659	661	205	1229	1231	283	1697	1699	355	2129	2131

10	59	61	47	281	283	135	809	811	213	1277	1279	287	1721	1723	357	2141	2143
12	71	73	52	311	313	137	821	823	215	1289	1291	298	1787	1789	373	2237	2239
17	101	103	58	347	349	138	827	829	217	1301	1303	312	1871	1873	378	2267	2269
18	107	109	70	419	421	143	857	859	220	1319	1321	313	1877	1879	385	2309	2311
23	137	139	72	431	433	147	881	883	238	1427	1429	322	1931	1933	390	2339	2341
25	149	151	77	461	463	170	1019	1021	242	1451	1453	325	1949	1951	397	2381	2383
30	179	181	87	521	523	172	1031	1033	247	1481	1483	333	1997	1999	425	2549	2551

Mit Ausnahme von $n = 1$ ist die letzte Ziffer eines n eine 0, 2, 3, 5, 7 oder eine 8, da im anderen Fall eine der beiden Zahlen $6n - 1$ bzw. $6n + 1$ durch 5 teilbar und damit keine Primzahl wäre.“[636]

[636] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.

Die Reihe der Primzahlzwillinge[637] 6n in der obigen Tabelle ist: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 17, 18, 23, 25, 30, 32, 33, 38, 40, 45, 47, 52, 58, 70, 72, 77, 87, 95, 100, 103, 107, 110, 135, 137, 138, 143, 147, 170, 172, 175, 177, 182, 192, 205, 213, 215, 217, 220, 238, 242, 247, 248, 268, 270, 278, 283, 287, 298, 312, 313, 322, 325, 333, 338, 347, 348, 352, 355, 357, 373, 378, 385, 390, 397, 425. Davon sind die Endziffern: 1, 2, 3, 5, 7, 0, 2, 7, 8, 3, 5, 0, 2, 3, 8, 0, 5, 7, 2, 8, 0, 2, 7, 7, 5, 0, 3, 7, 0, 5, 7, 8, 3, 7, 0, 2, 5, 7, 2, 2, 5, 3, 5, 7, 0, 8, 2, 7, 8, 8, 0, 8, 3, 7, 8, 2, 3, 2, 5, 3, 8, 7, 8, 2, 5, 7, 3, 8, 5, 0, 7, 5. Diese Folge scheint einerseits aus der Liste der Endziffern der Quadrate 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, und andererseits aus $(6n)^2 = 36n^2$ in der Form zu bestehen, dass die Liste der Endziffern in der Multiplikation mit 36 bzw. mit 6 eine neue Liste von Endziffern ergibt, wo nur die Endziffern 0, 2, 3, 5, 7, 8, vorkommen.

$6 \cdot 1 = 6$
$6 \cdot 2 = 12$
$6 \cdot 3 = 18$
~~$6 \cdot 4 = 24$~~
$6 \cdot 5 = 30$
~~$6 \cdot 6 = 36$~~
$6 \cdot 7 = 42$
~~$6 \cdot 8 = 48$~~
~~$6 \cdot 9 = 54$~~
$6 \cdot 10 = 60$
~~$6 \cdot 11 = 66$~~
$6 \cdot 12 = 72$
~~$6 \cdot 13 = 78$~~
~~$6 \cdot 14 = 84$~~

[637] Schwarz, Werner 23 ff.

~~6·15 = 90~~
~~6·16 = 96~~
6·17 = 102
6·18 = 108
~~6·19 = 114~~
~~6·20 = 120~~
~~6·21 = 126~~
~~6·22 = 132~~
6·23 = 138

Die Endziffern sind 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0…

„Die ersten 206 Primzahlpaare mit Abstand 2 sind (ohne Gewähr):

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571), (599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859), (881, 883), (1019, 1021), (1031, 1033), (1049, 1051), (1061, 1063), (1091, 1093), (1151, 1153), (1229, 1231), (1277, 1279), (1289, 1291), (1301, 1303), (1319, 1321), (1427, 1429), (1451, 1453), (1481, 1483), (1487, 1489), (1607, 1609), (1619, 1621), (1667, 1669), (1697, 1699), (1721, 1723), (1787, 1789), (1871, 1873), (1877, 1879), (1931, 1933), (1949, 1951), (1997, 1999), (2027, 2029), (2081, 2083), (2087, 2089), (2111, 2113), (2129, 2131), (2141, 2143), (2237, 2239), (2267, 2269), (2309, 2311), (2339, 2341), (2381, 2383), (2549, 2551), (2591, 2593), (2657, 2659), (2687, 2689), (2711, 2713), (2729, 2731), (2789, 2791), (2801, 2803), (2969, 2971), (2999, 3001), (3119, 3121), (3167, 3169), (3251, 3253), (3257, 3259), (3299, 3301), (3329, 3331), (3359, 3361), (3371, 3373), (3389, 3391), (3461, 3463), (3467, 3469), (3527, 3529), (3539, 3541), (3557, 3559), (3581, 3583), (3671, 3673), (3767, 3769), (3821, 3823), (3851, 3853), (3917, 3919), (3929, 3931), (4001, 4003), (4019, 4021), (4049, 4051), (4091, 4093), (4127, 4129), (4157, 4159), (4217, 4219), (4229, 4231), (4241, 4243), (4259, 4261), (4271, 4273), (4337, 4339),

(4421, 4423), (4481, 4483), (4517, 4519), (4547, 4549), (4637, 4639), (4649, 4651), (4721, 4723), (4787, 4789), (4799, 4801), (4931, 4933), (4967, 4969), (5009, 5011), (5021, 5023), (5099, 5101), (5231, 5233), (5279, 5281), (5417, 5419), (5441, 5443), (5477, 5479), (5501, 5503), (5519, 5521), (5639, 5641), (5651, 5653), (5657, 5659), (5741, 5743), (5849, 5851), (5867, 5869), (5879, 5881), (6089, 6091), (6131, 6133), (6197, 6199), (6269, 6271), (6299, 6301), (6359, 6361), (6449, 6451), (6551, 6553), (6569, 6571), (6659, 6661), (6689, 6691), (6701, 6703), (6761, 6763), (6779, 6781), (6791, 6793), (6827, 6829), (6869, 6871), (6947, 6949), (6959, 6961), (7127, 7129), (7211, 7213), (7307, 7309), (7331, 7333), (7349, 7351), (7457, 7459), (7487, 7489), (7547, 7549), (7559, 7561), (7589, 7591), (7757, 7759), (7877, 7879), (7949, 7951), (8009, 8011), (8087, 8089), (8219, 8221), (8231, 8233), (8291, 8293), (8387, 8389), (8429, 8431), (8537, 8539), (8597, 8599), (8627, 8629), (8819, 8821), (8837, 8839), (8861, 8863), (8969, 8971), (8999, 9001), (9011, 9013), (9041, 9043), (9239, 9241), (9281, 9283), (9341, 9343), (9419, 9421), (9431, 9433), (9437, 9439), (9461, 9463), (9629, 9631), (9677, 9679), (9719, 9721), (9767, 9769), (9857, 9859), (9929, 9931), (10007, 10009), ..."[638]

Die Primzahlzwillinge[639] zeigen also eine Gesetzmäßigkeit, die dem Mythos der angeblichen Unlösbarkeit[640] des Primzahlproblems entgegen stehe.

Es gibt also in der Reihe der Primzahlzwillinge[641] je 5 Spalten, gemäß den 5 Endziffern 1, 3, 5, 7, 9, der ungeraden Zahlen. In jeder der Spalten, also für jede Endziffer, gibt es einen periodisch wiederkehrenden Rhythmus der Endziffern[642].

1	1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1, …
3	3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3, …

[638] Heiligenbrunner, Primzahlzwillinge bis 10000, in: < URL >.
[639] Schwarz, Werner 42.
[640] Vgl Kracher 31 ff; Landau I 4 f.
[641] Fritz, Primzahlzwillinge zwischen 5 und 10.000.000, in: < URL >; Heiligenbrunner, Primzahlzwillinge bis 10000, in: < URL >.
[642] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.

5	5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5, …
7	7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7, …
9	9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9, …

Die zuvor in Spalten dargestellten Endziffern sind jetzt die Zeilen. Sie zeigen jeweils einen sich periodisch wiederholenden Zyklus a-b-c-b-a … (und dann wiederholt sich der Zyklus).

- Der Zyklus ist zwar einerseits 5gliedrig, wie die Anzahl der Endziffern (1, 3, 5, 7, 9) der ungeraden Zahlen, es kommen aber nur je 3 Endziffern je Zeile vor, von denen sich je 2 wiederholen (1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1…; 3, 5, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 5, 3…; 5, 7, 1, 7, 5, 5, 7, 1, 7, 5…; 7, 9, 3, 9, 7, 7, 9, 3, 9, 7…; 9, 1, 5, 1, 9, 9, 1, 5, 1, 9). Ansonsten sind die Abläufe – im Hinblick auf die Endziffern – regelmäßig bzw. symmetrisch. Und in jeder Zeile ist immer eine andere Ziffer, sodass von Zeile zu Zeile jeweils der Zyklus der ungeraden Zahlen, 1, 3, 5, 7, 9, wenn auch nicht immer in dieser Reihenfolge, durchlaufen wird.
- Nimmt man je Zeile die erste Ziffer, 1, 3, 5, 7, 9, dann die die zweite, 3, 5, 7, 9, 1, dann die dritte, 7, 9, 1, 3, 5, vierte, 3, 5, 7, 9, 1, und fünfte, 1, 3, 5, 7, 9, dann zeigt sich, dass die „vierte" Ziffer jeweils schon eine Wiederholung der zweiten Ziffern ist, und die fünfte die Wiederholung der ersten ist. Würde man die Ziffern in einem Koordinatensystem – als Matrix – darstellen, oder wie hier in einer Tabelle, so zeigt sich aufgrund der 5 Endziffern ein Fünfer-Zyklus von Spalte zu Spalte, aber von Zeile zu Zeile ein Dreier-Zyklus, bzw. ein Fünfer-Zyklus aus drei Ziffern statt fünf Ziffern (der ab der Mitte – symmetrisch – rückläufig ist).
- Im Gegensatz zu den Endziffern, die in dem bisher gezeigten Sinne sich linear von Ziffer zu Ziffer fortschreitend entwickeln, entfalten sich die Zahlen der Folge, welche die lineare Abfolge der Endziffern zeigen, nicht linear. Das ist schon bei den Quadratzahlen 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 … so gewesen.
- Die Endziffern der Quadratzahlen ergeben analog einen ganz bestimmten Zyklus, mit 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, allerdings mit dem Unterschied, dass hier der Zyklus doppelt so lange ist,

weil dabei nicht nur die ungeraden Zahlen vorkommen, sondern auch die gerade Zahlen. Es fehlen in dieser Reihe die Endziffern 2, 3, 7, 8, die für Primzahlzwillinge[643] (aber auch für Primzahlen) charakteristisch sind[644].

- Entgegen der scheinbar linearen Abfolge und Periodik der Endziffern, wachsen die Beträge, die diese Endziffern ergeben, steigend an (2n, – 4n).

Die Formel $n^2 - n = (n - 1)^2 + (n - 1) = n^2 - 2n + 1 + n - 1 = n^2 - n$ ergibt $(n - 1)^2 + n = n^2$ und $n^2 + n$).

$0^2 + 1^2 = 1$	$5 - 1 = 4 = 1 \cdot 4$
$1^2 + 2^2 = 5$	$13 - 5 = 8 = 2 \cdot 4$
$2^2 + 3^2 = 13$	$25 - 13 = 12 = 3 \cdot 4$
$3^2 + 4^2 = 25$	$41 - 25 = 16 = 4 \cdot 4$
$4^2 + 5^2 = 41$	$61 - 41 = 20 = 5 \cdot 4$
$5^2 + 6^2 = 61$	$85 - 61 = 24 = 6 \cdot 4$
$6^2 + 7^2 = 85$	$113 - 85 = 28 = 7 \cdot 4$
$7^2 + 8^2 = 113$	$145 - 113 = 32 = 8 \cdot 4$
$8^2 + 9^2 = 145$	,,,
…	

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,

[643] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[644] Christof 4.

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, …

Das Charakteristikum der Primzahlvierlinge[645] ist 15n (15n – 4, 15n – 2, 15n + 2, 15n + 4). Zwischen 30n und (6n)² und 6 ± 1 liegt 15n und lässt sich, wie die anderen Folgen, aus 2n – 1 ableiten, bzw. darauf zurückführen. Das korrespondiert mit 15n ± 2, 15n ± 4.

„**Primzahlvierlinge** bestehen aus zwei Primzahlzwillingspaaren im Abstand 4, das heißt aus vier Primzahlen der Form *p*, *p* + *2*, *p* + *6*, *p* + *8*. Anders ausgedrückt: Zwischen den beiden Primzahlzwillingspaaren liegen genau drei Zahlen, welche alle zusammengesetzt (nicht prim) sind.

Mit einer Ausnahme (5, 7, 11, 13) lässt sich jedes Quadrupel auch in der Form (15n – 4, 15n – 2, 15n + 2, 15n + 4) schreiben. Die Zahl in der Mitte, ist daher immer durch 15 teilbar und die Summe der Primzahlen des Quadrupels ist immer durch 60 teilbar. Die Zahlen enden im Dezimalsystem also immer auf 1, 3, 7 und 9.

Ebenso lässt sich jedes Quadrupel entweder als (210n + 101, 210n + 103, 210n + 107, 210n + 109) oder als (210n ± 11, 210n ± 13, 210n ± 17, 210n ± 19) schreiben.

Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Primzahlvierlinge gibt. Eine Voraussetzung für unendlich viele Primzahlvierlinge ist die Existenz unendlich vieler Primzahlzwillinge; ob diese Bedingung erfüllt ist, ist ebenfalls nicht bekannt.

Eine Liste von Primzahlvierlingen:

[645] Wikipedia, Primzahlvierling, In: Wikipedia < URL >.

n	15n-4	15n-2	15n+2	15n+4	n	15n-4	15n-2	15n+2	15n+4	n	15n-4	15n-2	15n+2	15n+4
1	11	13	17	19	1049	15731	15733	15737	15739	4199	62981	62983	62987	62989
7	101	103	107	109	1071	16061	16063	16067	16069	4481	67211	67213	67217	67219
13	191	193	197	199	1203	18041	18043	18047	18049	4633	69491	69493	69497	69499
55	821	823	827	829	1261	18911	18913	18917	18919	4815	72221	72223	72227	72229
99	1481	1483	1487	1489	1295	19421	19423	19427	18429	5151	77261	77263	77267	77269
125	1871	1873	1877	1879	1401	21011	21013	21017	21019	5313	79691	79693	79697	79699
139	2081	2083	2087	2089	1485	22271	22273	22277	22279	5403	81041	81043	81047	81049
217	3251	3253	3257	3259	1687	25301	25303	25307	25309	5515	82721	82723	82727	82729

231	3461	3463	3467	3469	2115	31721	31723	31727	31729	5921	88811	88813	88817	88819
377	5651	5653	5657	5659	2323	34841	34843	34847	34849	6499	97481	97483	97487	97489
629	9431	9433	9437	9439	2919	43781	43783	43787	43789	6609	99131	99133	99137	99139
867	13001	13003	13007	13009	3423	51341	51343	51347	51349					
1043	15641	15643	15647	15649	3689	55331	55333	55337	55339					

[…] Diese Seite wurde zuletzt am 17. Februar 2009 um 10:41 Uhr geändert.“[646]

Die Zusammenhänge werden in einem größeren Zusammenhang anschaulich, weil die Summe Primzahl-Quadrupel ist 60n beschrieben, und selbst statt 15n lässt sich 210n+101, 210n+103, 210n+107, 210n+109 oder 210n±11, 210n±13, 210n±17, 210n±19 schreiben[647].

[646] Wikipedia, Primzahlvierling, In: Wikipedia < URL >.
[647] Wikipedia, „Primzahlvierling“, In: Wikipedia < URL >; Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.

Die Folge 60n

Nach 30n für Primzahlen[648] kommt folgerichtig 60n für Primzahlzwillinge[649]. Bisher wurde im Primzahlsatz[650]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

mit dem natürlichen Logarithmus[651] vergeblich eine durchgehende Gesetzmäßigkeit gesucht, weil die Periodizität[652] der Formel übersehen wurde. Mit der Einbeziehung der Periodizität in die Betrachtung, zeigen sich die nämlichen zyklischen Regelmäßigkeiten[653].

„Im Juni 2005 sah sich Herr Thomas Kantke aus München die Sache an. Er schrieb sehr überraschend: **‚Ihre Ausarbeitung wird als Spezialfall von einer allgemeineren Behauptung erfasst, die 1923 von den Mathematikern Hardy und Littlewood aufgestellt worden ist.‘** Nachlesen kann man es in dem Buch ‚The New Book of Prime Number Records‘ von

[648] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.
[649] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[650] Landau I S. VII; Padberg 80.
[651] Prachar 3; vgl Rohringer 42 f; Remmert/Ullrich 73; Bartholomé/Rung/Kern 83 f; Trost 62 ff.
[652] Schönhacker, Die Zahl e, S.43, in: < URL >
[653] Jeschke, Graphik zu der Funktion "Relative Häufigkeit von Primzahlabständen", in: < URL >.

Paulo Ribenboim[654] (Springer Verlag, z.Zt. vergriffen ?). Hier ist die Originalzeile, wobei k ≧ 1 und C_2 die sogenannte Primzahlzwillingskonstante (= 0.66016...) ist:

$$\pi_{2k}(x) \sim 2C_2 \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{\substack{p>2 \\ p|k}} \frac{p-1}{p-2'}$$

Was enthält nun diese Gleichung der bekannten Mathematiker? Sie liefert die Anzahl von Primzahlabständen unterhalb einer Schranke x. Der rechte Teil der Formel ist ein bestimmtes Produkt - abhängig von den ungeraden Primfaktoren eines Primzahlabstandes - und entspricht exakt meiner Funktion $r_h(n)$. Der linke Teil, vor dem Produkt, ist die allgemein bekannte Näherung für die Anzahl von Primzahlzwillingen unterhalb von x.
H+Li machen keine besonderen Angaben – soweit mir bekannt – zu der Konstanz der 'relativen Häufigkeit' von Primzahlabständen in beliebig gelegenen Intervallen innerhalb unseres Zahlensystems. Doch genau dort liegt mein beinahe trivialer Ansatz, dazu die folgende Darstellung von Intervallen:

```
o----|---------|------|--------|---------------|---------|-------Intervall-------->
o-----|-------|----------------|----------Intervall--------|-----------|---------->
```

Die Skizze zeigt zweimal die Zahlengerade unterteilt in völlig beliebige, große Intervalle.
Für jedes einzelne, hinreichend große Intervalle gilt meine Aussage, nicht nur allgemein für Zahlen unterhalb einer Schranke x. Das schließt ein, daß auch jedes zunächst 'letzte Intervall' die gegebene relative Häufigkeit der Primzahlabstände aufweist – wobei durch den oder die Unendlichkeitsbeweis(e) von Primzahlen feststeht, daß es jenes 'letzte Intervall' nicht gibt.
[..] Geht man davon aus, daß nur ungerade Zahlen > 2 Primzahlen sein können, hat man bereits mod 2 angewandt. Die nächsten Module wären 6 (=2·3) oder 30 (=2·3·5). Natürlich auch jedes weitere primoriale Produkt ansteigender Faktoren, etwa 210 (=2·3·5·7). Hier soll wegen der besseren Übersicht mod 30 verwendet werden. Die Zahlengerade, dargestellt in der ersten Zeile, sieht dann an jeder beliebigen Stelle so aus:

[654] Ribenboim/Richstein/Keller 271 f.

```
..o|o.....o...o.o...o.o...o.....o|o.....o...o.o...o.o...o.....o|o.....o...o.o...
..o|1.....7..11.13.17.19..23...29|1.....7..11.13.17.19..23...29|_Block mod 30_..
    o-----o-----o   o------------------o
      a=6   a=6             a=20
```

Es ist hinlänglich bekannt und bewiesen: Jede Zahl, die mod 30 einen der Reste 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 oder 29 liefert, ist möglicherweise eine Primzahl. Oder anders betrachtet: Verwendet man das viel besprochene 'Sieb des Eratosthenes', dann ist obige erste Zeile eine Abbildung der Zahlengeraden nach den Streichungen durch die Primfaktoren 2, 3 und 5. Dabei ist jeder 'Punkt' eine nach Eratosthenes gestrichene Zahl und jedes Zeichen o ein verbleibender 'möglicher' Primzahlplatz.
In der 3. Zeile sind drei beliebige Abstände eingetragen... zweimal a=6 und einmal a=20. Bereits durch einfaches Abzählen kann ermittelt werden, wie oft ein 'möglicher' Primzahlabstand in einem 30-er Zahlenblock auftritt. Wohlgemerkt: ein 'möglicher', kein 'tatsächlicher'. Das Zählen beginnt immer in einem ersten 30-er Block und endet spätestens im zweiten Block. Für größere Modulwerte kann man vorteilhaft ein Zählprogramm verwenden.

Als Resultat des Zählens wird man die Häufigkeit der Abstände pro 30-er Block feststellen mit:

```
pi.a .... Anzahl der Abstände     a
pi.2 .... Anzahl Zwillinge        a=2           (pi.2 = Grundmenge M0)
Abstände, nur mit Primfaktor   2  a=2,4,8,16,32  pi.a = pi.2       = 3
Abstände, ein ungerader Faktor 3  a=6,12,18,24   pi.a = pi.2 * 2/1 = 6
Abstände, ein ungerader Faktor 5  a=10,20        pi.a = pi.2 * 4/3 = 4

An dem Abstand 30 mit den Faktoren 3 und 5 läßt sich besonders einfach erkennen:
            pi.30 = pi.2 * 2/1 * 4/3 = 3*2*4/3 = 8
Ohne jede Formel findet man dazu die einfache Bestätigung, denn...
Alle 8 Primzahlplätze eines 30er Zahlenblocks haben mod 30 ihren Partner!
```

Andere Abstände (14, 22, 26, 28...) auszuwerten macht wenig Sinn , da diese die noch nicht gestrichenen Primfaktoren 7, 11,

13... enthalten. Dazu müßten höhere modulo-Werte für die Parkettierung eingesetzt werden. Diesen Schritt kann man sich jedoch sparen, denn die Funktion der 'relativen Häufigkeit' rh(n) liefert die korrekten Werte für alle Primfaktoren in allgemeiner Gültigkeit, ohne jede Begrenzung bis 'abzählbar unendlich' !"[655]

Bei Ribenboim[656] ist zu Partitio Numerorum von „**Hardy und Littlewood** " Tatsächlich die Formel

$$\pi_{2k}(x) \sim 2C_2 \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{\substack{p>2 \\ p|k}} \frac{p-1}{p-2'}$$

mit

$$C_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0{,}66016\ldots$$

zu finden, die der „Primzahlzwillingskonstante" entspricht. Die Zusammenhänge lassen sich auch grafisch darstellen: „Zur Ableitung der Funktion 'Relative Häufigkeit von Primzahlabständen' wurde das einfache Auszählen des mit mod 30 'parkettierten Zahlenstrahles' erläutert. Man kann es nachvollziehen. Der Schluß auf die allgemeine Gültigkeit fällt jedoch leichter, wenn man sich die Verteilung der Primzahlen - oder besser ihrer Abstände - an einer einfachen Grafik ansieht. Diese ist bewußt auf mod 30 beschränkt, denn es geht hier nur um das Prinzip. Höhere Faktoren machen das Bild nur schwerer verständlich, dazu benutzt man besser den Rechner.
So möchte ich nochmal jene 'aufgewickelte Zahlengerade' vorstellen. Die Zahlengerade wird in einer Art Gewinde oder ‚Wendel' um einen Zylinder mit einer ganz bestimmten Steigung herumgelegt. Die Blickrichtung ist in Richtung der Achse dieses Zylinders, geschnitten an beliebiger Stelle.
Der Umfang (Länge einer Steigung) soll hier s = 150 = 5·30 betragen. Die weißen und roten Primzahlplätze am Kreisumfang

[655] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.
[656] Ribenboim/Richstein/Keller 271 f.

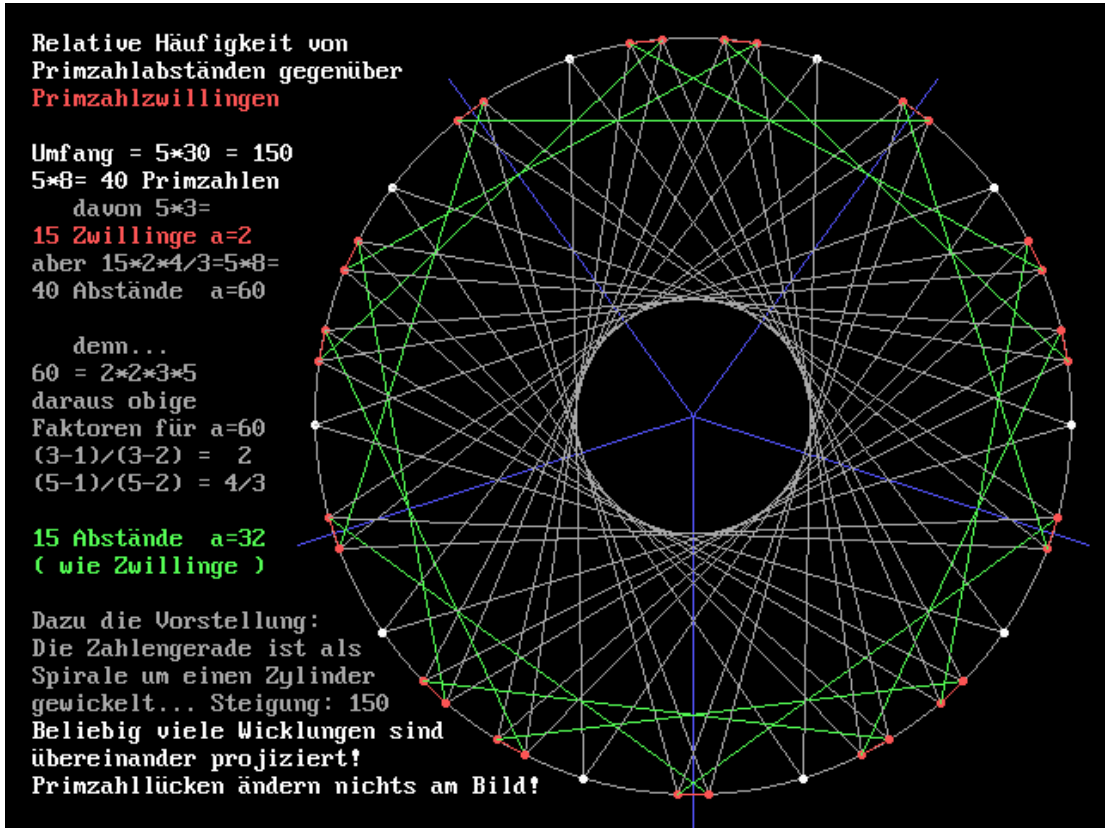
der Projektion sind jene, die nach der Eratosthenes-Streichung mit 2, 3 und 5 übrig geblieben sind. Mod 30 haben die darauf liegenden Primzahlen die Reste 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 und 29. Zwillinge: rot, restliche Primzahlen: weiß....

Zur Erinnerung... Die Funktion der relativen Häufigkeit der Primzahlabstände lautet:

$$\mathbf{rh(n) \sim M_0 * (f_1 - 1)/(f_1 - 2) * (f_2 - 1)/(f_2 - 2) * \ldots (f_k - 1)/(f_k - 2)}$$

M_0 Grundmenge (= Menge der Primzahlzwillinge, auch pi.a_2)

f_ ungerade Primfaktoren des Primzahlabstandes



Das Bild ist durch den enthaltenen Text fast selbsterklärend. Nur die beiden letzten Sätze sollten ergänzt werden. Stellt man sich die Wendel durchsichtig vor, dann erscheinen alle Primzahlplätze besetzt, selbst dann, wenn ein betrachtetes, 'tatsächliches' Intervall beliebige Primzahllücken aufweist. Oder, man stelle sich vor, der Schnitt zeigt alle möglichen Primzahlplätze die nach der Eratosthenes-Streichung (2,3,5) übrig geblieben sind..., siehe oben.
In dieser Darstellung modulo 150 (=5·30) ist die 'gegebene' Anzahl der Zwillinge 15 (=5·3). Dieser Wert ist hier – und nur hier – jene Grundmenge M_0 für alle anderen Abstände, die die Primfaktoren 2, 3, 5 besitzen.

Anmerkung: Statt 5·30 hätte auch jedes andere Vielfache von 30 verwendet werden können, auch 7·30, obwohl das eventuell zu Fehlschlüßen verleiten könnte, da 7 die nächstfolgende Primzahl ist. Primzahlen gleich oder größer 7 sind hier nicht berücksichtigt.“[657]

Die grafische Darstellung zeigt, wie die Formel 6n ± 1 in Verbindung mit 30n = 5·6n neben der ursprünglich hexagonalen Struktur eine überlagerte pentagonale Form annimmt. Bereits bei der Zurückführung der Eulerschen Formel n² + n + 41 auf n² + n + 1 und dann bei der Überführung in die negative Form[658] n² – n – 1 = 0 => n(n – 1) = 1, hat sich der Übergang zum Goldenen Schnitt[659]

$$n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

und zur Fibonacci-Folge[660] gezeigt. Die Fibonacci-Folge[661] ist ein ein Spezialfall der logarithmischen Spirale[662], die unter anderem in tropischen Wirbelstürmen und Sternengalaxien zu finden ist[663].

---

[657] Jeschke, Graphik zu der Funktion "Relative Häufigkeit von Primzahlabständen“, in: < URL >.
[658] Beuteilspacher/Petri 16; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 18 f, 24 f, 32 ff.
[659] Stelzner, Der Goldene Schnitt, in: < URL > 16 ff; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 8; Timerding 13 f, 20 ff.
[660] Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f.
[661] Riesenhuber 125 ff.

„Mathematische Darstellung

Am leichtesten lässt sich eine logarithmische Spirale in Polarkoordinaten (r,φ) angeben:

$$r(\varphi) = ae^{k\varphi}\ a, k \in \mathbb{R}, k\ \neq 0$$

mit k = const. als *Steigung der Spirale*, und dem *Steigungswinkel* α, tanα = k

In kartesischen Koordinaten ergibt sich:

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi = ae^{k\varphi}\cos\varphi,$$

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi = ae^{k\varphi}\sin\varphi,$$

Namensgebend ist die implizite Darstellung:

$$\varphi = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

$\frac{r}{a}$ lässt sich hierbei als *normierter Radius* verstehen.

In der komplexen Ebene lässt sich jede logarithmische Spirale sogar noch einfacher darstellen:

$$w(t) = z^t\ \ z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R},\ |z|\ \neq 1,\ Im(z) \neq 0,$$

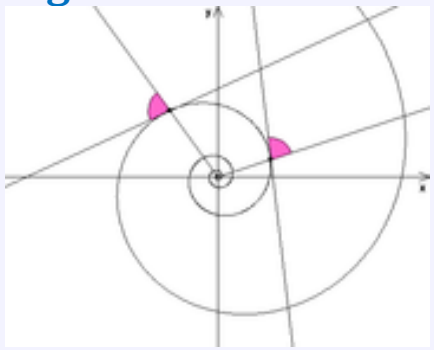
denn

$$z^t = e^{t\ln z} = e^{t(\ln|z| + i\arg z)} = |z|^t e^{it\arg z} = |z|^t(\cos(t\arg z) + i\sin(t\arg z)).$$

---

[662] Riesenhuber 127 ff, 152 ff; Schönhacker, Die Zahl e, S. 16 ff, 40: < URL >; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas' Mathe-Seiten < URL > 35 ff.
[663] Wikipedia, Logarithmische Spirale, in: Wikipedia < URL >.

Eigenschaften



Logarithmische Spirale: alle durch den Pol gehenden Geraden schneiden die Kurve unter dem gleichen Tangentenwinkel

Die logarithmische Spirale hat eine Reihe einzigartiger Eigenschaften, weshalb sie von einem ihrer größten Liebhaber, Jakob Bernoulli, auch als *spira mirabilis* (‚wundersame Spirale') bezeichnet wurde:

- alle durch den Pol gehenden Geraden schneiden die Kurve – also ihre Tangenten – unter dem gleichen *Tangentenwinkel* $\tan \bar{\alpha} = \frac{1}{k}$ bzw. $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (siehe Abbildung)
- die Spirale umkreist den Ursprung unendlich oft, ohne ihn zu erreichen (asymptotischer Punkt)
- obwohl unendlich viele Drehungen bis zum Erreichen des Pols benötigt werden, ist die Länge der Kurve von jedem Kurvenpunkt bis zum Pol endlich
- mit jeder Windung wächst der Radius um einen konstanten Faktor:

$r(\varphi + 2\pi) = ae^{k(\varphi + 2\pi)} = ae^{k \cdot 2\pi} ae^{k\varphi} = a(e^{2\pi})^k r(\varphi)$

mit $e^{2\pi} \approx 535{,}5$ in einer Potenz der Steigung k (daher ergeben nur relativ flache Spiralen mit $k < 1$ ‚hübsche' Schnecken). Diese Eigenschaft unterscheidet alle *logarithmischen* Spiralen von den *archimedischen*, die sich bei jeder Windung um eine Konstante ausdehnen (ihre Steigung nimmt dabei ab)

- die logarithmische Spirale ist – in Verallgemeinerung der obigen Herleitung – *selbstähnlich (invariant)* gegenüber einer *zentrischen Streckung* um den Faktor $e^{k\gamma}$ bei gleichzeitiger *Drehung um den Winkel* γ

Das gilt für die konstant wachsende Archimedesspirale nicht: Darum scheinen rotierende Archimedesspiralen ‚nach außen' zu wandern, aber logarithmische perspektivisch auf den Beobachter zuzukommen.

- die Kurve ist ihre eigene *Evolute*
- die Kurve ist ihre eigene *Brennlinie (Kaustik)*
- die Kurve ist ihre eigene *Fußpunktkurve*
- eine *Inversion der Kurve* ($r \longmapsto 1/r$) führt zu Drehung und Spiegelung[664] der Kurve an der Y-Achse (für $a = 1$ nur zur Spiegelung); aus einer linksdrehenden logarithmischen Spirale wird eine rechtsdrehende und umgekehrt
- alle *Spiralen gleicher Steigung* sind ähnlich
- Für $k \to 0$ nähert sich die Spirale immer mehr einem Kreis des Radius a an, der die Kurvengleichung für $k = 0$ (Schnittwinkel 90 Grad) erfüllt. Dass der Kreis ein Spezialfall der logarithmischen Spirale ist, ist insbesondere in der Kugelgeometrie bedeutend.

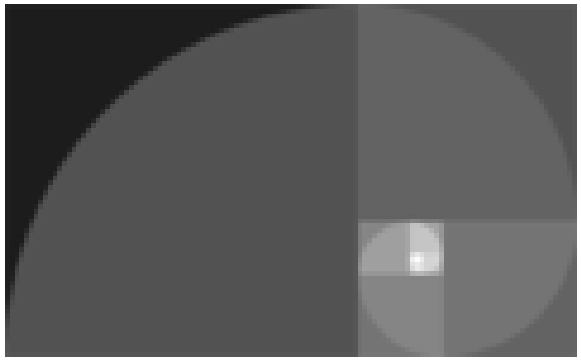
Spezialfälle und Näherungen

Die *Goldene Spirale* ist ein Sonderfall der logarithmischen Spirale, die als Spezialität das Teilungsverhältnisses des Goldenen Schnittes als Steigung verwendet, und durch Verwendung von rekursiver Teilung eines *Goldenen Rechtecks* in je ein Quadrat und ein weiteres, kleineres Goldenes Rechteck, in sich trägt.

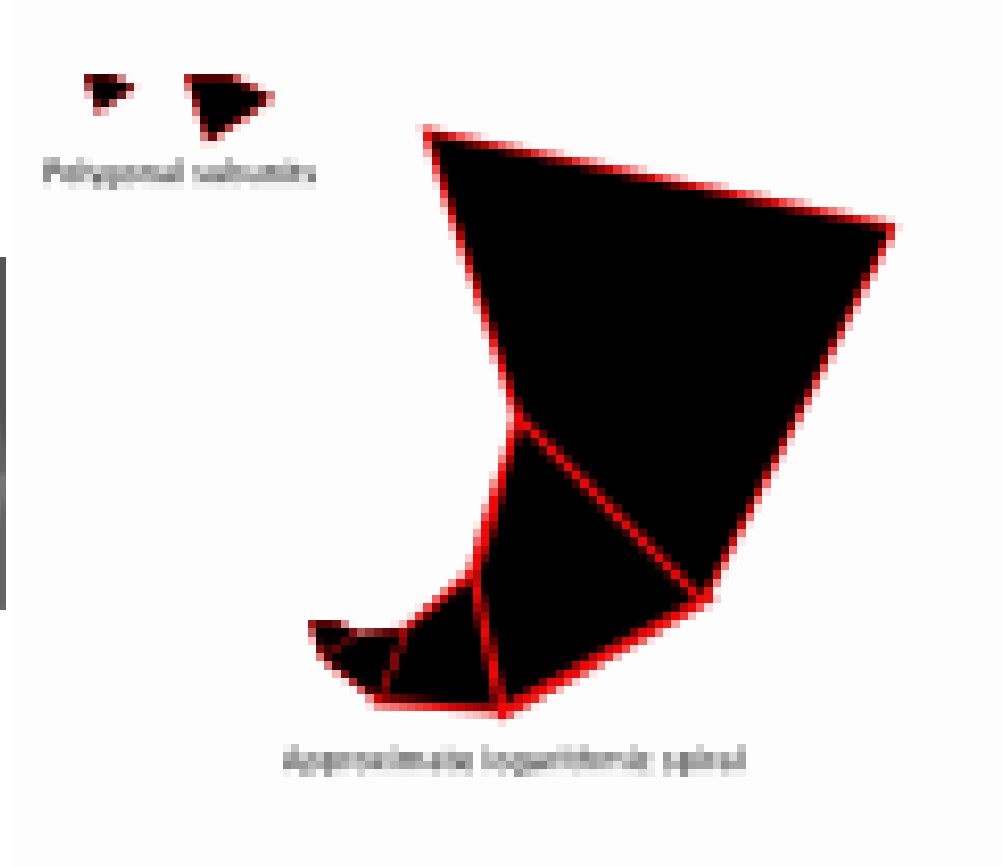
Jede logarithmische Spirale lässt sich auch durch einen Polygonzug approximieren, bei dem Dreiecke mit einem gleichen Winkel (k), und jeweils der kürzeren Seite so lang wie die längere Seite des vorigen Dreiecks. Eine Erweiterung dieses

[664] Westermann 196.

Gedankenganges gilt auch für gewisse irreguläre Polygone, die sich aneinanderlegen lassen. Dieses Bauprinzip ist in der Natur verbreitet[665], und liefert im allgemeinen *mehrgängige Spiralen*.



Goldene Spirale



irreguläre *Polygonspirale*

[665] Pfeifer 71 ff; Ostermann 100 ff; Timerding 29 ff.

Formeln

siehe auch: Formelsammlung Geometrie

Formeln zur Logarithmischen Spirale	
Funktion	$r(\varphi) = a \cdot e^{k \cdot \varphi}$
Steigung	$k = \frac{dr}{d\varphi} = \cot \alpha$
Krümmungsradius	$\rho = r \cdot \sqrt{1 + k^2}$
Bogenelement	$ds = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + k^2} dr$

Vorkommen

In der belebten Natur finden sich zahlreiche Beispiele logarithmischer Spiralen mit diversen Steigungen, wie beispielsweise durch Wachstum entstandene Schneckenhäuser oder die Anordnung von Kernen in der Blüte einer Sonnenblume.

Ein Fluginsekt orientiert sich bei einem nächtlichen Flug am Stand des (weitentfernten) Mondes, indem es den Winkel zu ihm konstant hält. Durch eine (punktuelle nahe) Straßenlaterne wird die Flugkurve jedoch regelmäßig korrigiert, so dass sie zu einer logarithmischen Spirale wird, in deren Zentrum sich die Straßenlaterne befindet.

Daneben finden sich annähernd logarithmisch spiralförmige Strukturen in allen dynamischen Mehrkörpersystemen und fluiddynamischen Systemen (Wirbelbildung bei ausreichend großem Geschwindigkeitsgradient) sowie in der Technik (z. B. Hinterdrehen).

Der Erzählung nach war es ein Wunsch Jakob Bernoullis, dass seine geliebte logarithmische Spirale mit der Inschrift *eadem mutata resurgo* (‚Verwandelt kehr' ich als dieselbe wieder') auf seinen Grabstein eingemeißelt werden sollte. Der zuständige Steinmetz meißelte nach dem Tod Bernoullis zwar eine Spirale auf dessen Grabstein, allerdings handelte es sich (vermutlich aus Unwissenheit oder um sich Arbeit zu sparen) um eine Archimedische Spirale, für die keine der genannten Eigenschaften zutrifft. Bernoullis Grabstein kann noch heute im Kreuzgang des Münsters zu Basel besichtigt werden.

Sonnenblume mit 34 und 55 Fibonacci-Spiralen

Schnitt eine Nautilus-Schale

Whirlpool-Galaxie, eine typische Spiralgalaxie

Tiefdruckwirbel über Island"[666]

[666] Wikipedia, Logarithmische Spirale, in: Wikipedia < URL >.

Der Wind oder Sternenstaub nimmt dabei die nämliche Spiralform an[667], und es bildet sich ein sogenanntes Auge des Sturms (man kann das als Zirkulation auch beim Abfluss der Badewanne beobachten und bilden den Freiraum für den Wirbelkern[668] im geschlossenen Wirbel), das genau so aussieht, wie das Loch in der Mitte der obigen Grafik[**669**]. Auffällig ist dabei, dass das nämliche 20-Eck und dann 25-Eck hier für Primzahlen, bereits für die Fibonacci-Zahlen bekannt ist[670]. Noch eigenartiger ist, dass daraus eine weitere Formation als Dreieck herausragt, die 210 Einheiten umfasst[671], die dann auf den Tafeln X und XII im Anhang des zitierten Buches zu sehen sind. Die Primzahlen lassen sich wahlweise mit mit 30n oder 210 darstellen[**672**], so wie das auch vom Vorspann zu der hier eingangs zitierten Stelle zu lesen war[**673**].

[667] Pfeifer 76 ff.
[668] Bergmann/Schäfer I (1975) 299 ff, 329 ff.
[669] Jeschke, Graphik zu der Funktion "Relative Häufigkeit von Primzahlabständen", in: < URL >.
[670] Pfeifer 34 ff.
[671] Pfeifer 71 ff.
[672] Wikipedia, „Primzahlvierling", In: Wikipedia < URL >.
[673] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.

Die Folge $ae^{k\varphi}$

Die Fibonacci-Folge als Spezialfall der logarithmischen Spirale[674] berechnet sich $r(\varphi) = ae^{k\varphi}$

„Das Gegenteil der Symmetrie ist die Asymmetrie. Bei der Betrachtung einer Strecke gibt es neben einer einzig möglichen symmetrischen Aufteilung des Ganzen unendlich viele asymmetrische Teilungsmöglichkeiten. Unter diesen unzählbaren ungleichen Trennungen tritt nun eine auf, deren Einzigartigkeit und Besonderheit immer wieder die Aufmerksamkeit auf sich zog.

Abb. 4: Die asymmetrische Proportion des Goldenen Schnittes

Minor : Major = Major : Ganzes

[674] Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL >; Riesenhuber 127 ff, 152 ff.

Man teilt eine Strecke so in zwei Teile, dass der kleinere Teil (Minor) sich zum größeren Teil (Major) genau so verhält wie der größere Teil wiederum zum Ganzen (*Abb. 4*). Anders ausgedrückt: Der proportionale Größenunterschied oder das Verhältnis zwischen Minor und Major ist gleich dem zwischen Major und dem Ganzen. Es handelt sich somit um eine Teilung, bei der immer ein Bezug auf das nächst Größere und somit schließlich auf das Ganze besteht. Gerade durch die Teilung wird der Bezug zum Ganzen herausgestellt. Das klingt erst einmal paradox, denn unter Teilung verstehen wir die Zerstörung des Ganzen. Die Proportion des goldenen Schnittes vollbringt das Paradoxon zwischen Teilung und Rückbezug auf das Ganze in beeindruckender Art und Weise. Diese auch als Proportio divina oder göttliche Proportion bezeichnete Aufteilung übt schon seit Jahrtausenden eine besondere Anziehung auf die Menschen aus. Sie findet sich, wie später erläutert, in zahlreichen antiken Bauwerken, Gemälden und erstaunlicherweise auch in der Natur immer wieder. Geometrisch findet sich das Maß des goldenen Schnittes im Fünfstern, dem Pentagramm mehrfach wieder (*Abb. 5*). Ihm wurde zu allen Zeiten eine magische Wirkung zugeschrieben. Noch heute finden wir dieses Symbol in den Staatsfahnen in über 40 Ländern der Erde, u. a. in der USA.

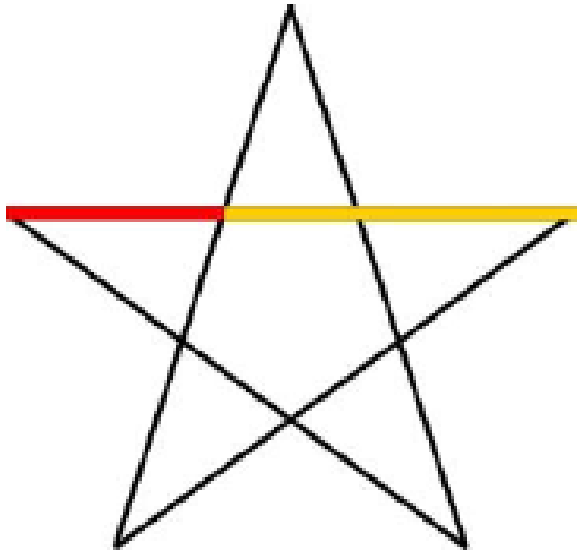


Abb 5. Das Pentagramm und der goldene Schnitt

Die Schönheit des goldenen Schnittes

Es stellt sich die Frage, warum das Vorkommen des goldenen Schnittes immer wieder mit der Schönheit in Verbindung gebracht wurde und immer noch wird. Das Prinzip der Gleichheit und Einheit spielt dabei die Schlüsselrolle. Im goldenen Schnitt entsteht das Bild der Vollkommenheit nun jedoch nicht mehr durch die Gleichheit der Teile, sondern durch die Gleichheit der Proportionen. Die Verhältnisse der Teile Minor zur Major und Major zum Ganzen sind immer gleich. Die Einheit der Proportionen vermittelt das Bild der Vollkommenheit und lässt uns die Asymmetrie der Teile als harmonisch empfinden. Offensichtlich hängt das mit einer Symmetrie zusammen, die die Asymmetrie integriert: Die Symmetrie findet sich innerhalb das goldenen Schnittes nicht mehr in einer förmlichen Umsetzung (Gleichheit der Teile), sondern in einer verhältnismäßigen. Die *Proportionen* der einzelnen Elemente sind gleich. Im goldenen Schnitt ist das Verhältnis symmetrisch. Es ist die Symmetrie der Teile zu Gunsten der Symmetrie der Proportionen untergegangen.

[…]

Der Parthenon ist nur ein Beispiel unter vielen für die Anwendung des goldenen Schnittes in berühmten und großen sakralen Bauten. Die Umsetzung menschlichen Schönheitsempfindens in Form des goldenen Schnittes findet sich in zahlreichen anderen bekannten Bauwerken, wie der alten Petersbasilika in Rom oder dem Kölner Dom wieder (MOESSEL 1926). Selbst in den Pyramiden von Gizeh zeigen sich die Proportionen der Zahl Phi in erstaunlicher Genauigkeit (HAGENMAIER 1988). So ist beispielsweise der Neigungswinkel der Cheops-Pyramide $\alpha = 51°50'$ bis $\alpha = 51°52'$. Der Kosinus dieses Winkels beträgt 0,618. Auf die gleiche Größe stößt man beim Verhältnis der Länge der Pyramidenseite zur Hälfte der Pyramidenbasis (356 : 220 Ellen). Auch im berühmtesten der großen Steinmonumente, Stonehenge, das vor ca. 3500 Jahren bei Salisbury in England erbaut wurde, finden sich die goldenen Maße wieder (DOCZI 1996). In der Kunst zeigen sich die Proportionen des goldenen Schnittes im Grundaufbau zahlreicher bekannter Gemälde (DOCZI 1996), wie »Das Abendmahl« von Leonardo da Vinci, Albrecht Dürers »Selbstbildnis« oder Raffaels »Die Sixtinische Madonna«.

Die goldenen Proportionen sind jedoch nicht nur Produkt eines bewusst menschlichen Schaffens, wie die zahlreichen oben erwähnten Beispiele vermuten lassen. Sie scheinen ursprünglicherer Natur zu sein."[675]

Früh schon hat man erkannt, dass es sich beim Goldenen Schnitt um eine Naturkonstante handelt[676]. Der Goldene Schnitt als Folge aufgereiht geht in die Fibonacci-Folge in die logarithmische Spirale über[677].

"Vor rund 150 Jahren beschäftigte sich der Mediziner Adolf Zeising mit den Maßen des menschlichen Körpers. Mit dem Ziel, eine übergreifende Gesetzmäßigkeit in Bezug auf den Bau des menschlichen Körpers zu finden, vermaß er zahlreiche Menschen und deren Körperteile. Er verglich sie untereinander und mit bekannten klassischen Statuen der Antike, von denen man bis heute sagt, dass sie ein perfektes Bild des menschlichen Körpers zur Darstellung bringen. Die Ergebnisse veröffentlichte er in seinem Lebenswerk »Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers« (1854). Sie sollen im Folgenden anhand weniger Beispiele erläutert werden. Zur Darstellung der Größenverhältnisse und Gliederung der einzelnen Körperabschnitte des Menschen wird die griechische Statue des Speerträgers des Doryphoros von Polyklet herangezogen.

[…]

Das Auftreten dieser Proportionen am menschlichen Körper zeigt, dass der goldene Schnitt nicht nur ein Produkt der Kunst ist, sondern dass im Laufe des 19. und 20. Jahrhunderts bewiesen werden konnte, dass der goldene Schnitt in zahlreichen Wachstumsmustern von Pflanzen, Tieren und Mensch naturgemäß vorkommt. In der Natur sind die Proportionen des goldenen Schnittes also in vielfacher Art und Weise vorhanden.

---

675 Stelzner, Der Goldene Schnitt, in: < URL > S. 16 ff.
676 Timerding 29 ff; Pfeifer 71 ff; Ostermann 23 ff.
677 Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas' Mathe-Seiten < URL >; Riesenhuber 127 ff, 152 ff.

Anfang des 19. Jahrhunderts untersuchten die befreundeten Botaniker Alexander Braun und Carl Schimper die Wachstumsgeometrien in der Pflanzenwelt. Die wichtigste Erkenntnis war, dass sich bei genauer Betrachtung der Abfolge der Blätter am Stängel einer Pflanze immer wieder ganz bestimmte Blattanordnungen fanden, die das höhere Pflanzenreich durchziehen. Dabei werden eine gegenständige, symmetrische und eine asymmetrisch, spiralige Blattstellung voneinander unterschieden. Bei der symmetrischen Anordnung stehen sich jeweils zwei Blätter gegenüber. Bei der asymmetrischen Blattstellung sind die einzelnen Blätter nicht etwa willkürlich, sondern im Rahmen einer bestimmten Spiraltendenz angeordnet. Innerhalb der asymmetrischen, spiraligen Blattgeometrie zeigten sich nun ganz bestimmte Zahlenverhältnisse. Dies lässt sich folgendermaßen erläutern:

Bei der asymmetrischen Blattstellung sind die Blätter am Stängel einer Pflanze nicht in zufälliger, unregelmäßiger Reihe angeordnet, sondern folgen regelmäßig aufeinander. Aufgrund der Regelmäßigkeit im Spiralzyklus werden diese Blattstellungen auch als zentralsymmetrisch bezeichnet. Das heißt jedes Blatt bildet zum nächst höheren einen bestimmten Winkel (Divergenz). Folgt man der Anordnung der Blätter, so wird man spiralig um den Stiel herumgeführt. Erst ein ganz bestimmtes Blatt zeigt dann wieder in die gleiche Richtung wie das erste Blatt. Bis zu dieser Ausgangsstellung wird eine bestimmte Anzahl von Windungen zurückgelegt. Dies wird als Blattzyklus bezeichnet und in Bruchzahlen angegeben. Winden sich beispielsweise fünf Blätter in zwei Windungen um den Stiel bis die Ausgangsstellung, das heißt der »Ursprung«, wieder erreicht ist, dann spricht man von einem Blattzyklus von 2/5. Hinter der offensichtlich asymmetrischen Blattanordnung verbirgt sich demnach doch wieder eine Regelmäßigkeit, eine Symmetrie.

Im Pflanzenreich kommen verschiedene Arten von Blattzyklen vor. Äußerst beeindruckend ist allerdings, dass bestimmte Blattzyklen immer wieder vorkommen, andere Kombinationen dagegen gar nicht. So gibt es beispielsweise keine Pflanze, bei der die Anzahl der auf einen Zyklus kommenden Blätter 12, 15 oder 20 beträgt! Trägt man das gesamte Spektrum der verschiedenartigen, tatsächlich in der Natur vorkommenden Blattzyklen zusammen, so entsteht folgende Reihe:

$$^1/_2 - ^1/_3 - ^2/_5 - ^3/_8 - ^5/_{13} - ^8/_{21} - ^{13}/_{34} - ^{21}/_{55} \cdots$$

Sie weist eine eigenartige Besonderheit auf: Es handelt sich bei der Zahlenreihe sowohl im Nenner als auch im Zähler jeweils um die gleiche Folge von Zahlen, lediglich um zwei Stellen verschoben. Diese Zahlenfolge wird auch als die Fibonacci-Reihe bezeichnet:

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 – 144 – 233 ...

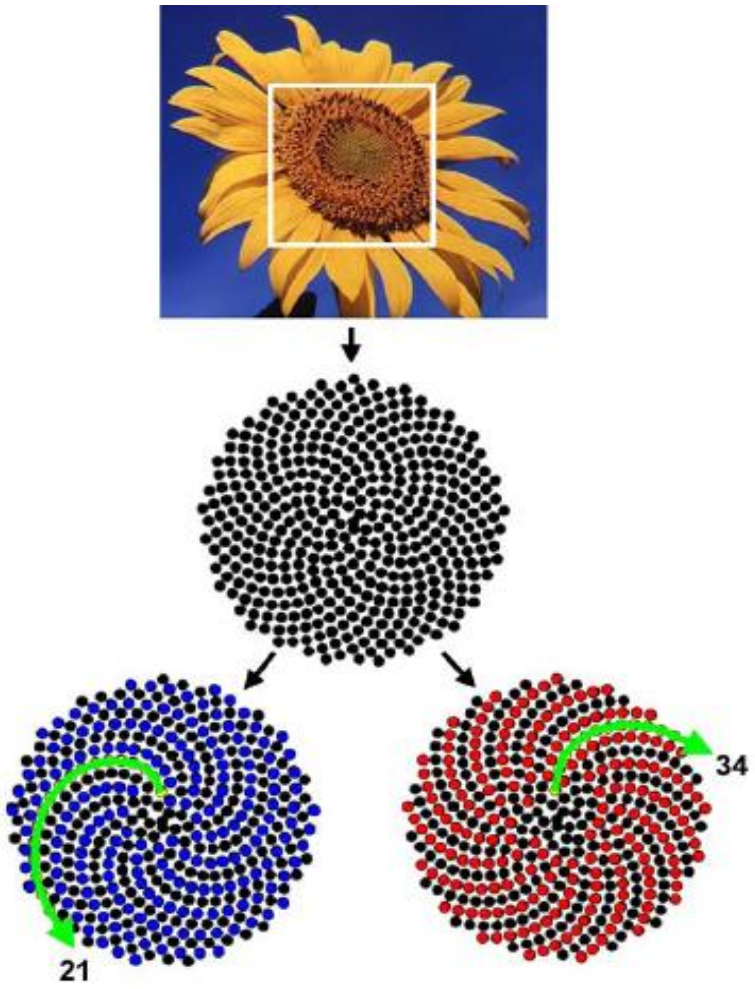


Abb. 14: Der Blütenkorb der Sonnenblume besteht aus zahlreichen kleinen Blüten, die in mehreren recht- und linksdrehenden Spiralen angeordnet sind. Die Anazhelen der Spiralen sind immer Glieder der Fibonacci-Reihe (hier 21 und 34).

Die Fibonacci-Folge wurde das erste Mal von dem italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa (*Abb. 13*), genannt Fibonacci, im Jahre 1202 in seinem Buch »Liber Abaci« veröffentlicht. Mit diesem Werk führte er das *indisch-arabische Dezimalzahlensystem* in Europa ein. Weitere Untersuchungen zeigten, dass sich die Fibonacci-Reihe auch noch in zahlreichen anderen Wachstumsvorgängen der Pflanzen manifestiert. So finden sich diese Zahlen beispielsweise in der Struktur vieler Blüten wieder. Die Ähnlichkeit zum Blattzyklus verwundert nicht. Bereits Goethe vermutete in seiner Metamorphose der Pflanze ein einheitliches Wachstumsprinzip von Blatt, Stängel und Blüte einer Pflanze. Eindrücklich sind diese Zahlenverhältnisse am Beispiel der Sonnenblume zu demonstrieren. Ihrer besonderen Größe wegen ist die beeindruckende Anordnung besonders gut zu erkennen (*Abb. 14*): Das gesamte Blütenkörbchen besteht aus zahlreichen kleinen echten Blüten. Diese sind jedoch nicht chaotisch angeordnet, sondern in deutlich erkennbaren Spiralzügen. Hier wird ersichtlich, dass innerhalb einer Blüte rechtsdrehende und linksdrehende Spiralzüge existieren. Die Anzahlen der Spiralzüge sind erstaunlicherweise wiederum nicht beliebig. Bestimmte Zahlen treten immer wieder auf. Dabei handelt es sich stets um Glieder aus der Fibonacci-Reihe! Bei großen Sonnenblumen findet sich beispielsweise ein Verhältnis von 89 zu 144 oder sogar 144 zu 233 Spiralzügen.

Die Fibonacci-Zahlen finden sich auch in der Schuppenordnung von Tannenzapfen, der Anordnung der Stacheln von Kakteen, beim Aufbau der Ananasfrucht usw. Es scheint, als sei die Fibonacci-Reihe eine Art Wachstumsmuster in der Natur. Die Fibonacci-Zahlen weisen zudem einige sehr eindrückliche mathematische Besonderheiten auf:

- Jede Zahl der Folge ist die Summe der beiden vorausgehenden Zahlen (*Abb. 15*). Die Reihe folgt demnach einem Additionsgesetz. Jede Zahl hat eine Beziehung zur vorherigen Zahl und zur folgenden Zahl. Ähnlich wie Major eine Beziehung zu Minor und dem Ganzen hat. Wachstum in der Natur scheint einem zeitlichen Bezugsgesetz, einem *Additionsgesetz*, zu folgen!

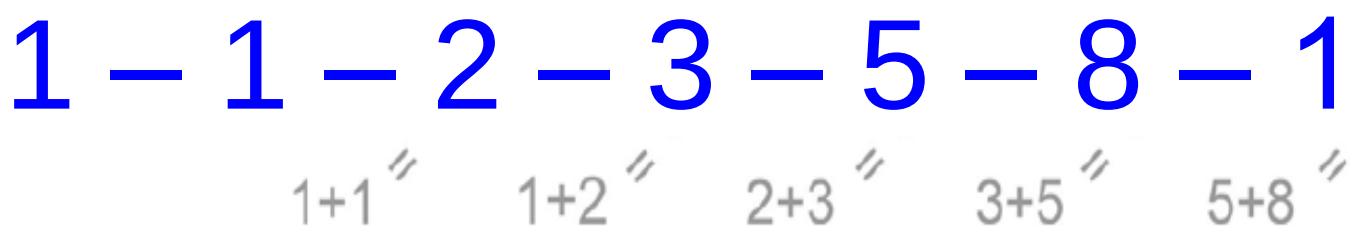


Abb. 15: Jede Zahl der Fibonacci-Reihe ist die Summe der beiden vorausgehenden Zahlen.

- Noch erstaunlicher ist, dass diese Zahlenfolge in einem unmittelbaren Zusammenhang zum goldenen Schnitt steht. Die Verbindung ist einfach und eindrücklich: Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen nähert sich immer mehr dem Verhältnis des goldenen Schnittes, der Zahl Phi, an. Je mehr Spiralzüge beispielsweise der Blütenkorb einer Sonnenblume aufweist, um so mehr nähert sich das Verhältnis der einbezogenen Fibonacci-Zahlen dem goldenen Schnitt an. Mathematisch ausgedrückt, entspricht der Grenzwert (Limes) zweier aufeinander folgender Zahlen der Fibonacci-Folge exakt dem *Verhältnis des goldenen Schnittes*, der Zahl Phi!

  21 : 13 = 1,6154
  34 : 21 = 1,6190
  55 : 34 = 1,6176
  … ≈ 1,618033 (Φ)

- Die nebeneinanderstehenden Fibonacci-Zahlen nähern sich in u8ihrem Verhältnis zueinander nicht beliebig dem Wert des goldenen Schnitts (Φ) an. Sie tun es abwechselnd von oben und von unten (*Abb. 16*). Dadurch werden zwei voneinander unterschiedene Reihen beschrieben. Die eine Reihe nähert sich von oben dem Wert Phi an, die andere von unten. Sie bilden eine *polare Gegenläufigkeit, die auf eine gemeinsame Einheit zulaufen*, deren Repräsentant die Zahl Phi ist. Die Fibonacci-Reihe folgt damit inhaltlich wiederum dem Prinzip der Symmetrie.

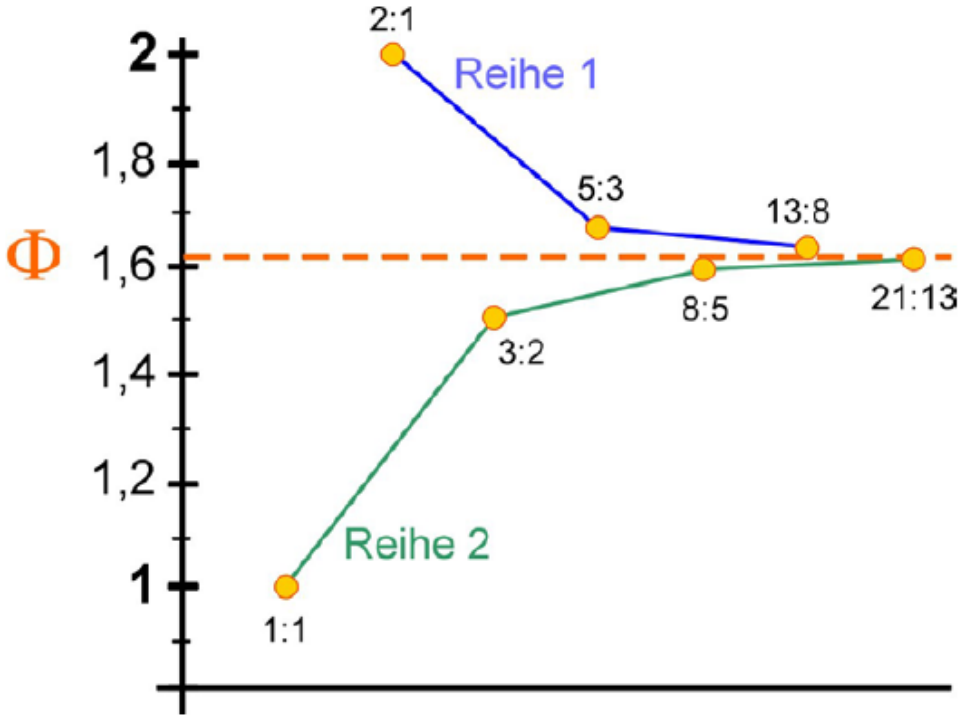


Abb. 16: Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen nähert sich symmetrisch in zwei Reihen, abwechselnd von oben und und unten, immer mehr der Zahl Phi an.

Nähere Untersuchungen der Blattstellungsgeometrien anfangs des 20. Jahrhunderts ergaben weitere Besonderheiten: Beide unterschiedlichen Blattstellungstypen, sowohl die symmetrische als auch die asymmetrische, demonstrieren im Anfangsstadium des Wachstums, am Vegetationsscheitel, eine gemeinsame, konstante Blattstellung. Das heißt bevor sich die artspezifischen Blattstellungstypen entwickeln, existiert eine Art Urform. Innerhalb dieser Urform entsprechen die Stellungswinkel der späteren Blätter der Limitdivergenz der Fibonacci-Reihe, mit anderen Worten dem Goldenen-Schnitt- Verhältnis. Im Anfangsstadium des Wachstums

findet sich demnach immer wieder eine sehr enge Annäherung an den Grenzwert der Fibonacci-Reihe, der auf den Vollkreis von 360° bezogen 137° 30’ ausmacht (360°: 137° 30’ = 1: 0,618...). Dieser Winkel prägt anfänglich alle Blattstellungsgeometrien. Aus jener Anlage entwickelt sich dann durch sekundäre Wachstumsfaktoren die spätere Blattstellungsarchitektonik (ITERSON 1907, HIRMER 1922). Der goldene Schnitt zeigt sich wiederum als Bindeglied zwischen Symmetrie und Asymmetrie; diesmal als archetypische Ursprungsform der diversen Blattstellungsvarianten. Je weiter die Entwicklung fortschreitet, desto mehr also entfernt sich die Pflanze von dem »Urbild« des goldenen Schnittes und entwickelt eine für ihre Art typische Blattstellung. Die Verhältnismäßigkeiten des goldenen Schnittes finden sich dann nicht mehr in einer direkten

Umsetzung, sondern nur noch im Zusammenhang der einzelnen Blattstellungstypen (Fibonacci-Reihe), deren Grenzwert sich, wie gezeigt, der Zahl Phi annähert. Alles in allem gilt heute die Fibonacci-Reihe als ein anerkanntes Wachstums- und Entwicklungsmuster in der Pflanzenwelt. Auch der Zusammenhang zu den Proportionen des goldenen Schnittes ist unbestritten. Es fällt nun schwer, aus diesen Zusammenhängen nicht die Schlussfolgerung zu ziehen, dass es sich hier um eine der Urformen natürlicher Prozesse handelt. Der in den USA lebende ungarische Architekt und Botaniker Györgi Doczi, der sehr ausführlich und eindrucksvoll den goldenen Schnitt als universelles Ganzheitsmuster in der Natur belegt hat, schreibt angesichts dieser Erkenntnisse (G. Doczi, in: GOWLETT 1985): »Auch wir, die wir uns nicht mehr vor rachsüchtigen Göttern fürchten, empfinden Ehrfurcht und Staunen angesichts dieser unerwarteten Präzision eines Wachstumsmusters der Natur.«

Das Beispiel der Fibonacci-Reihe zeigt, dass der goldene Schnitt nicht nur das Produkt menschlichen Schönheitsempfindens ist, sondern als objektives Entwicklungsmuster in der Natur vorkommt. An dieser Stelle wird Goethe schon verständlicher mit seiner Behauptung, dass Schönheit eine Manifestation von Naturgesetzen ist. Biologen vermuten, dass die Fibonacci-Reihe und der goldene Schnitt vor allem deswegen optimale Entwicklungs- und Konstruktionsprinzipien sind, da sie Ausdruck einer maximalen Vereinfachung numerischer Beziehungen sind (RADIUK 2001). Der goldene Schnitt als einfachste Urform jeglicher Gestaltung? Eine mathematische Analyse[678] verdeutlicht dies.

Die Mathematik

[678] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.

Erwähnenswert sind vor allem zwei mathematische Besonderheiten im Zusammenhang mit der Zahl

Phi:

Die Besonderheit der Zahl: Die Maßzahl des goldenen Schnitts gehört zu den irrationalen Zahlen, das heißt sie ist nicht durch Brüche ganzer Zahlen darstellbar, wie zum Beispiel 1/3. Nun scheint es, als wären alle irrationalen Zahlen gleich irrational, aber einige irrationalen Zahlen sind irrationaler als andere. Das lässt sich folgendermaßen verstehen: Wenn man das Maß für die Irrationalität darin sieht, inwieweit man sie mit Hilfe von rationalen Zahlen in die Nähe dieser irrationalen Zahl bringen kann, dann lassen sich verschiedene Stufen der Irrationalität beschreiben. In der so entstehenden Kette der irrationalen Zahlen bildet die goldene Zahl Phi das Schlusslicht. Phi ist die *irrationalste aller irrationalen Zahlen*! Das wirkt erst einmal erstaunlich, denn es besagt nichts anderes, als dass wir gerade das Irrationalste als besonders harmonisch empfinden. Das von uns als wohlproportioniert Empfundene ist nicht nur das Gegenteil des Rationalen, es hat sogar eine maximale Entfernung zu ihm. Wir erfahren hier gerade das Gegenteil dessen, was uns die formale Logik glauben macht. Hier berühren sich die Extreme, Rationalität und Irrationalität, Schönheit und Chaos. Das Irrationale, nicht vollständig Erfassbare findet sich nicht etwa im Ungeordneten, Unangenehmen, wie man meinen würde, sondern ist darüber hinaus auch noch Ausdruck des Schönen und Wohlproportionierten. Wieder treffen bei der Betrachtung des goldenen Schnittes scheinbar widersprüchliche Qualitäten aufeinander. Einmal mehr wird deutlich, dass dieses Zahlenverhältnis bei der Vereinbarung von Gegensätzen eine besondere Rolle zu spielen scheint. Die rein mathematische Betrachtung der Zahl Phi macht ihre Sonderstellung innerhalb der Zahlen offensichtlich.

Die »schöne« Formel:

So lässt sich über die Verhältnismäßigkeiten der drei Größen Minor, Major und das Ganze eine einfache Formel für die Berechnung der Zahl Phi ableiten. *Abbildung 17* zeigt die klassische und gleichzeitig bekannteste Formel zur Ermittlung der Proportionen des goldenen Schnittes.

Neben der erwähnten gibt es noch eine weitere Formel zur Berechnung der Zahl Phi, die bis heute, selbst in mathematischen Kreisen, noch meist unbekannt ist. Jeder mathematische Bruch ist durch sogenannte »Kettenbrüche« darstellbar (PEITGEN & al. 1992). Das gilt wohlgemerkt für *jede* Art von Bruch! Bei Kettenbrüchen handelt es sich um Simplifizierungen des ursprünglichen Verhältnisses durch eine Aufschlüsselung in mehrere einfache Brüche. *Abbildung 18* zeigt ein solches Beispiel. Zähler jedes einzelnen Bruches ist die Zahl *Eins*. Auch dies gilt für alle denkbaren Brüche und Verhältnisse! In Bezug zur Zahl Eins ist demnach *jedes* rationale Verhältnis darstellbar.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

Abb. 17: Die »klassische« Formel zur Berechnung der Zahl Phi

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}$$

Abb. 19: Kettenbruchdarstellung einer irrationalen Zahl, hier am Beispiel der $\sqrt{2}$

$$\frac{57}{17} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

Abb. 18: Beispiel für eine Kettenbruchdarstellung eines bestimmten Verhältnisses

Neben allen normalen Zahlen und Bruchzahlen ist auch jede irrationale Zahl durch einen Kettenbruch darstellbar. Der einzige Unterschied besteht darin, dass Kettenbrüche irrationaler Zahlen unendlich lange Wiederholungen eines gleichen Grundelements sind. *Abbildung 19* verdeutlicht dies anhand der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$. Der Kettenbruch ist demnach ein mathematisches Verfahren, mit welchem jede Zahl und jedes Zahlenverhältnis ausgedrückt werden kann. Auch die irrationale Zahl Phi ist in Form eines Kettenbruches darstellbar. Dabei ergibt sich folgende, höchst einfache Formel für die Berechnung der Zahl Phi (*Abb. 20*).

Die Zahl des goldenen Schnittes zeigt damit innerhalb der Kettenbruchdarstellungen eine einzigartige Stellung: Der Kettenbruch zur Berechnung der Zahl Phi besteht als einziger unter allen denkbaren aus nur einer Zahl! Damit aber nicht genug. Der goldene Schnitt errechnet sich darüber hinaus aus der Zahl Eins. Die Zahl Phi ist demnach »Ausdruck der Zahl Eins«. Es kann also auf die Besonderheit hingewiesen werden, dass die *irrationalste* Zahl sich durch den *einfachsten* Kettenbruch errechnet! Das Irrationalste lässt sich nicht etwa nur durch einen komplizierten mathematischen Zusammenhang beschreiben, sondern ist vor allem Ausdruck einer der einfachsten Verhältnisse – Ausdruck der einfachsten Zahl! Die oben erwähnte Vermutung, dass der goldene Schnitt aufgrund seiner maximalen Simplifizierung das Urverhältnis jeglicher Zusammenhänge darstellt, wird evident. Die goldenen Proportionen und ihre unmittelbare Erscheinung in der Fibonacci-Reihe sind Ausdruck einer maximal vereinfachten Information, die ausschließlich durch die Zahl Eins und das Additions- wie Divisionsgesetz beschrieben wird. Die Natur bevorzugt dieses Verhältnis in zahllosen Erscheinungen. Es muss sich demnach um ein Lebens- und Entwicklungsprinzip schlechthin handeln.

Eine andere Ausdrucksweise für die gleiche Formel zeigt *Abbildung 21*.

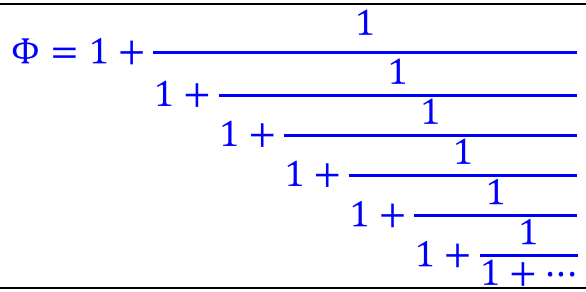


Abb. 20: Kettenbruchdarstellung der Zahl Phi

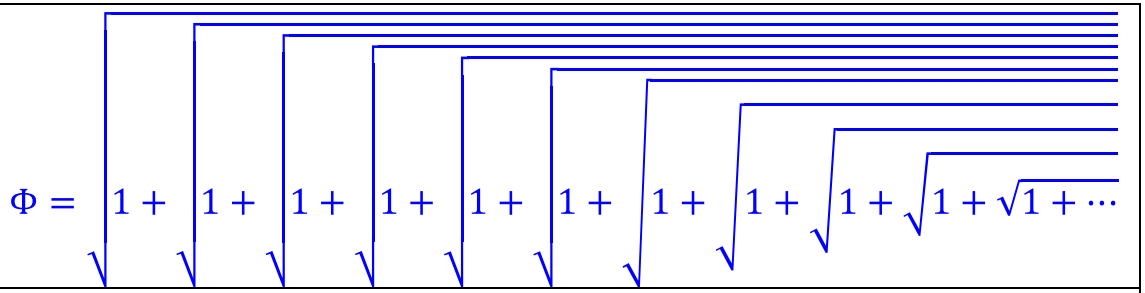


Abb. 21: Einfache Formel zur mathematischen Darstellung der Zahl Phi

Auch diese zweite Herleitung spart nicht an Kuriositäten. Sie zeigt in etwa die gleichen mathematischen Eigenarten wie die Kettenbruchdarstellung der Zahl Phi. Die Formel unterliegt im Aufbau dem gleichen Prinzip, wie es durch die geometrische Ausdrucksweise des goldenen Schnittes (*Abb. 4* und *6*) zum Vorschein kommt. So wie Minor eine Beziehung zum Major hat, so hat auch in der Formel jedes Element eine Beziehung zum über- und zum

untergeordneten Element. Jedes nächste Glied steht unter dem Wurzelzeichen des vorhergehenden. Damit besteht immer ein Zusammenhang zum nächsthöheren, ähnlich der stetigen Beziehung vom Minor zum Major. Gerade das besondere Verhältnis des Ganzen und seiner Teile zueinander ist ja Entstehungsweise des goldenen Schnittes. Als weitere Besonderheit darf gelten, dass es sich bei der Rechenoperation immer auch um Additionen handelt. Der goldene Schnitt ist Ausdruck eines Additionsverhältnisses, wie wir ihm bereits als Grundprinzip innerhalb der Fibonacci-Reihe begegnet sind. Man kann schlicht sagen: Die Formel ist schön.

Die mathematischen Ausführungen zeigen auf imposante Art, dass der goldene Schnitt und die Zahl Phi eine »unbezweifelbar zentrale Rolle innerhalb der Mathematik« einnehmen (BEUTELSPACHER & PETRI 1995). Das Rätsel ihrer elitären Stellung innerhalb der Mathematik war bisher allerdings ungeklärt. Es ist anzunehmen, dass sich eine befriedigende Erklärung der Sonderstellung der Zahl Phi nicht allein aus einer mathematischen Analyse finden lässt. Denn die Kenntnis der mathematischen Regeln, mit denen der goldene Schnitt errechnet oder geometrisch konstruiert wird, bedeutet ja noch nicht, seinen inhaltlichen Charakter erfahren zu haben. Die mathematischen Zusammenhänge können jedoch helfen, den Zugang zum universalen Charakter der Proportio divina und seiner eindrücklichen Verbindung zur Schönheit zu finden. Carl Friedrich von Weizsäcker vermutete, »vielleicht ist die allgegenwärtig verborgene Mathematik der Natur der Seinsgrund aller Schönheit.« (VON WEIZSÄCKER 1995)

Die Quintessenz

Es handelt sich beim goldenen Schnitt um ein Proportionsverhältnis, welches vom Menschen als schön und harmonisch empfunden wird. Dieses wurde in der Vergangenheit sowohl unbewusst (Steinkeile) als auch bewusst (Parthenon) umgesetzt. Das subjektiv vom Menschen als schön empfundene Verhältnis kommt auch objektiv als durchgängiges Entwicklungsmuster in der Natur vor. Eine Ausdrucksweise dafür ist die Fibonacci-Reihe. Selbst innerhalb der von einer strengen Logik geprägten Mathematik demonstriert die Zahl Phi eine außergewöhnliche Stellung. Es fällt schwer, aus diesen Übereinstimmungen nicht die Schlussfolgerung zu ziehen, dass wir es hier mit einer der Urformen und –prinzipien natürlicher Prozesse zu tun haben.

Der Goldene Schnitt und sein In-Erscheinung-Treten sind stets mit sich scheinbar widersprechenden Gegensätzen verbunden, wie sie größer nicht sein könnten:

- Dazu zählen der Widerspruch von »Rationalität« und »Irrationalität«, die im Begriff des Schönen aufeinandertreffen. Wie uns der goldene Schnitt gezeigt hat, ist Schönheit nicht nur Ausdruck einer rationalen Ordnung, sondern ebenso zugleich Ausdruck einer Irrationalität. Das demonstriert uns die Tatsache, dass die irrationalste Zahl, die der Mensch kennt (Phi), uns im Gewand der Schönheit begegnet. Der Mensch glaubt mitunter durch seine Fähigkeit zur Rationalität, das Irrationale und ihn vermeintlich Bedrohende aus der Welt schaffen zu können. In Wirklichkeit entspringt auch dem Irrationalen Harmonie und Schönheit.
- Jene für den Menschen maximal erscheinenden Widersprüche verbildlicht der goldene Schnitt in einem weiteren Gegensatz, nämlich im mathematischen Modell von »Symmetrie« und »Asymmetrie«. Während die Symmetrie offenkundig eine große Nähe zum sogenannten Schönen hat, erweist sich auch die Asymmetrie des goldenen Schnitts als eine Darstellungsseite des Schönen.
- Hinzu kommt schließlich der Gegensatz von »Subjektivismus« und »Objektivismus«, welche in der Proportio divina eine Gemeinsamkeit finden: Das subjektive Schönheitsempfinden des Menschen, welches in der Kunst und in der Architektonik klassischer Bauten zum Ausdruck kommt, bringt genauso die Proportionen des goldenen Schnittes zum Vorschein, wie das objektive Entwicklungsmuster der Natur in Form der Fibonacci-Reihe.

Wie die Beispiele zeigen, nimmt der goldene Schnitt eine zwischen zahlreichen Dualismen vermittelnde Position ein. Über diesen die Gegensätze verbindenden Charakter des goldenen Schnittes können wir uns dem Geheimnis der Schönheit folgendermaßen annähern:

Die Symbiose der Gegensätze, wie sie der goldene Schnitt verwirklicht, erzeugt den Ausdruck vollendeter Harmonie und Schönheit. Der Grund ist eine allem zugrundeliegende Ganzheit. Diese erhebt sich über den maximalen Widerspruch der verschiedenartigen Gegensätze zur Komplementarität. Der Bezug jedes einzelnen Teiles (Minor und Major) zum Ganzen schafft im Betrachter ein Bild der Einheit und Vollkommenheit. Schönheit ist demnach im Sinne des goldenen Schnittes das Erkennen des unauflöslichen Zusammenhangs vom Ganzen und seiner Teile. Schönheit ist ein Ausdruck des Ganzen durch die Integration zweier scheinbar unvereinbarer Gegensätze. Da sind wir wieder bei Pythagoras: »Das Gleichnis dessen, der die höchste Vernunft besitzt, ist und

kann nur die Fähigkeit sein, die Beziehungen zu erkennen, die auch Dinge einen, die scheinbar keinerlei Verbindungen zueinander haben.« (Pythagoras) Der verbindende Charakter des goldenen Schnittes ist ein Entwicklungsideal und Muster der Natur, dass in allen ihren Erscheinungen zum Vorschein kommt. Im Sinne des Additions- und Bezugsgesetzes, welches unter anderem in der Fibonacci-Reihe zum Ausdruck kommt, geht kein Element verloren, sondern ist stets Teil eines Ganzen. Damit stößt der goldene Schnitt das Tor zu einer übergeordneten Problematik auf, die alle Lebensbereiche umfasst. Es stellt sich doch die Frage nach dem Verhältnis des Teiles zum Ganzen oder nach der Vereinbarung von Gegensätzen in allen Bereichen des Lebens. Im Sinne des goldenen Schnittes könnte es zu einer Art Handlungsmaxime werden, das Andersartige, den Gegensatz nicht aus der Welt zu schaffen, sondern unter einem übergeordneten Blickwinkel, in Bezug zum Ganzen, mit einzubeziehen. In diesem Zusammenhang wird auch aus heutiger Sicht neu verständlich, weshalb für die alten Griechen alles Existierende, eben der gesamte Kosmos dem »Schönen« angehörte.

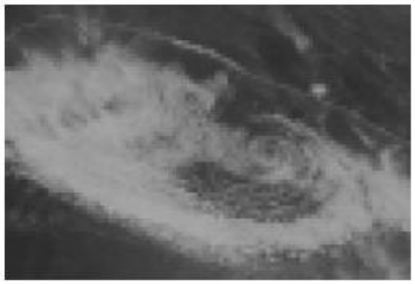
Der goldene Schnitt lehrt uns, dass das Irrationale und das Nichtrechenbare Bestandteil der Natur sind, nicht jedoch im Sinne des Unharmonischen und Hässlichen, sondern als Teil des Schönen und Wunderbaren. Wir können die Prinzipien der Natur erfassen und sogar das Schöne als »eine Manifestation geheimer Naturgesetze« verstehen. Als Teil des Ganzen können wir aber nicht die Natur der Ganzheit entzaubern, denn » ... sie schafft ewig neue Gestalten; was da ist, war noch nie; was war, kommt nicht wieder – alles ist neu und doch immer das Alte.« Auch dies stammt aus den Werken desselben Dichterfürsten (Goethes Werke 1893).“[679]

Die Präsenz der Schönheit der Zahlen[680], sofern die Betrachtung zulässig sei, geht also quer durch den Gemüsegarten[681] und durchzieht den gesamten Kosmos[682].

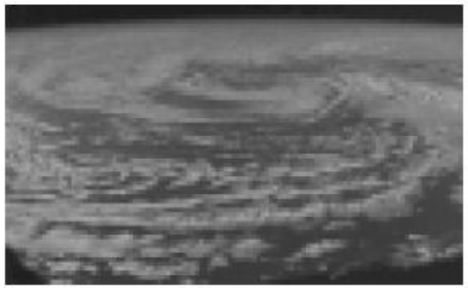
[679] Stelzner, Der Goldene Schnitt, in: < URL > S. 21 ff.
[680] Schönhacker, Die Zahl e, S. 39 ff, in: < URL >.
[681] Lohnstein, Einführungs-Vorlesung, Strukturen sprachliche und andere, in: < URL >.
[682] Nemiroff/Bonnell, Astronomy Picture of the Day, 2008 May 17, NASA Official: Phillip Newman, in: < URL >.

Fibonacci-Zahlen im Makrokosmos:

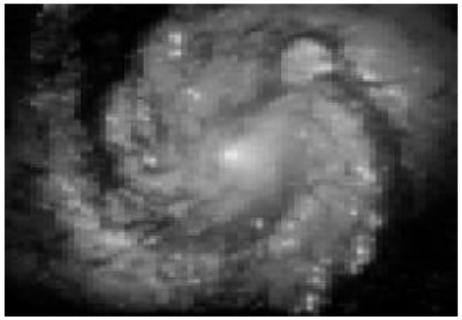
Tornado:



Wolkenbildung:



Galaxie:

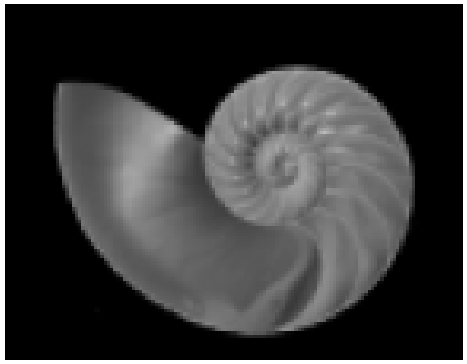


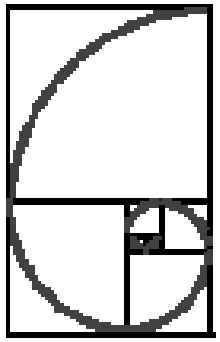
Wir finden sie aber auch im Makrokosmos.
So bilden sich Wirbelstürme und Tornados nach den Prinzipien der Fibonacci-Folge.
Tiefdruckgebiete weisen ebenfalls solche Strukturen auf.
Und selbst unsere Galaxie ist nach den Prinzipien der Fibonacci-Zahlen organisiert.

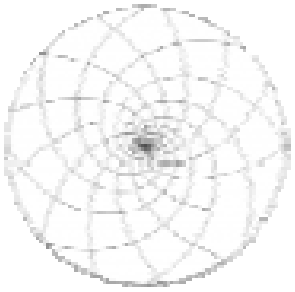
Man fragt sich an dieser Stelle, welcher Art diese Baupläne der Evolution sind. Und auf welche Weise diese Konstruktionsprinzipien in unserer Welt vorliegen[683].

[683] Lohnstein, Einführungs-Vorlesung, Strukturen sprachliche und andere, in: < URL >.

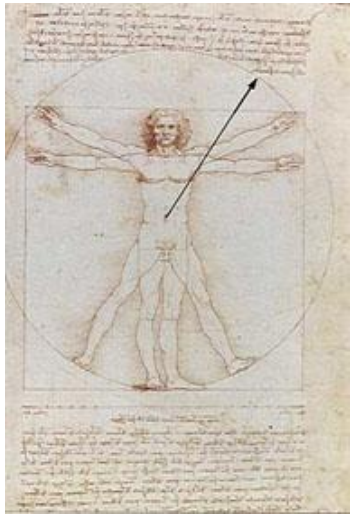
Fibonacci-Zahlen im Mikrokosmos:







Wir finden die logarithmische Spirale im Mikrokosmos, etwa bei Schneckenhäusern, Nautilus-Muscheln und der Anordnung der Kerne von Sonnenblumen.



Natur:

Die Objekte sind – obwohl oberflächlich sehr verschieden – hinsichtlich bestimmter struktureller Eigenschaften gleich.

Diese strukturelle Gleichheit findet sich sowohl beim Wachstum von Rosenblättern, bei der Tigerung von Katzen, dem Pfauenauge, der Körperstruktur von Insekten, bei Sonnenblumen und Stiefmütterchen,

Und auch das famose Bild von Leonardo da Vinci über die Proportionen des menschlichen Körpers drückt gerade diese Struktureigenschaft aus.

Die Gleichheit zwischen diesen scheinbar so sehr verschiedenen Objekten, besteht in dem Größenverhältnis, in dem die jeweiligen Objektteile jeweils zueinander stehen.

Diese Gleichheit ist durch den Goldenen Schnitt gegeben.

Die Folge $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

Einiges war bei Leemann unter < http://www.simonleemann.ch/work/vp/franck-hertz.pdf >.

„**1. Zusammenfassung**

Mit dem Versuch von J. Franck und G. Hertz ist es möglich auf nichtspektroskopischem Weg die Quantisierung der Bahnenergien eines Elektrons im Kernpotential und damit die Bohr‘schen Postulate zu verifizieren. Der Versuch und seine Interpretation markieren den Anfang einer neuen Vorstellung des Atoms und damit einer der grundlegendsten Veränderungen der Physik seit Newton.

Der Versuch zeigt, dass Elektronen im Atom Energie nur in diskreten Mengen aufnehmen oder abgeben können und ermöglicht sogar die Bestimmung der Grösse dieser Energie anhand der Stösse zwischen Quecksilberatomen und Elektronen. Dies geschieht aber interessanterweise durch Beobachtung der stossenden Elektronen und nicht der Atome selber!

Die Interpretation des Versuchs ist allerdings nicht simpel. Einige Erschwernisse im Aufbau und bei der Deutung müssen in Kauf genommen werden. Dieser Bericht soll die zugrundeliegende Theorie, das Experiment, den Aufbau und die Interpretation erläutern.

- 2 -

2. Problemstellung

Der berühmte Versuch von J. Franck und G. Hertz (durchgeführt 1914, Nobelpreis 1925) ist die wohl bekannteste (nicht spektroskopische) Methode um die Postulate des Bohr'schen Atommodells zu verifizieren. Franck und Hertz wollten mit ihrem Versuch folgende drei Punkte belegen[684]:

- Es ist möglich Atome durch Beschuss mit nieder-energetischen Elektronen anzuregen.
- Die Energie, die dabei vom Elektron an das Atom abgegeben wird, nimmt stets nur diskrete Werte an.
- Die so erhaltenen Energiewerte stimmen überein mit den spektroskopischen Resultaten.

In diesem Bericht sollen das Experiment und die erhaltenen Resultate wiedergegeben werden um die obigen Vermutungen nach der Methode von Franck und Hertz zu verifizieren.

Im Anschluss werden gewisse Ergebnisse diskutiert und zuletzt Überlegungen zum Bau einer 'Franck-Hertz-Röhre' (FH-Röhre) gemacht.

3. Theorie

Im klassischen Atommodell läuft das Elektron infolge des Coulombpotentials auf einer Kreisbahn um den Atomkern. Es sind Bahnen mit beliebigen Radien und damit eine kontinuierliche Folge von Energien des Elektrons im Feld des Kerns zugelassen. Betrachtet man die in den Spekralserien auftretenden Energieniveaus jedoch als Werte für die Energie des Elektrons so müsste man annehmen, dass nur diskrete Energiewerte möglich sind (Spektrallinien). Des weiteren sind Elektronen auf Kreisbahnen beschleunigte Ladungen und geben als Hertz'sche Oszillatoren elektromagnetische Strahlung ihrer Umlauffrequenz ab. Dadurch würden sie Energie verlieren, was zu einer Instabilität ihrer Bahnen und

[684] A. C. Melissinos: "Experiments in modern Physics", Academic Press Inc., 1966.

zum Kollaps des Atoms und damit der ganzen Materie führen würde (Synchrotronkatastrophe). Dies ist jedoch nicht beobachtet worden.

Um die eklatanten Widersprüche zwischen der klassische Theorie (v.a. der Elektrodynamik) und den experimentellen Beobachtungen zu überwinden, stellte N. Bohr 1913 drei Postulate auf, die das sog. 'Bohr'sche Atommodell' umschreiben:

- Die klassischen Bewegungsgleichungen gelten zwar für Elektronen in Atomen aber es sollen nur ganz bestimmte, diskrete Bahnen mit Energien En erlaubt sein. Diese nennt man die Energieterme des Atoms.

- Die Bewegung der Elektronen auf diesen gequantelten Bahnen erfolgt ohne Emission von Strahlung. Ein Elektron kann aber von einer Bahn mit geringerer negativen Bindungsenergie Ein (größerer Radius) unter Emission von Strahlung auf eine Bahn mit größerer negativen Bindungsenergie Em (kleinerem Radius r) übergehen. Die Frequenz der dabei emittierten Strahlung ist:

  $$h\nu = E_n - E_m = \Delta E \qquad (3.1)$$

  Bei Absorption von Strahlung einer solchen Frequenz kann der Prozess umgekehrt ablaufen, allerdings muss die Frequenz genau der benötigten Energiedifferenz gemäß (3.1) entsprechen.

- Das Korrespondenzprinzip: Für große Radien gehen die Gesetze der quantisierten Atomphysik in diejenigen der klassischen Physik über.

Die in (3.1) eingeführten Energiestufen En entsprechen den Energieeigenwerten der Schrödingergleichung:

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\Psi = 0 \qquad (3.2)$$

Für das Wasserstoffatom beispielsweise erhält man folgenden Energieterme für das Elektron:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 me^2}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, ... \qquad (3.3)$$

Der Zustand der kleinsten Energie heißt Grundzustand und ist stabil. Ist das Elektron in einem Zustand mit höherer Energie dann ist das Atom in einem angeregten Zustand. Normalerweise sind angeregte Zustände instabil, sodass das

Atom spontan wieder in seinen Grundzustand zurückfällt indem es, wie in (3.1) formuliert, die Energiedifferenz in Form eines Quants der Frequenz ν abstrahlt. Die Energiebedingung ist ein notwendiges aber noch nicht hinreichendes Kriterium für Quantensprünge: Man benötigt dazu noch die Auswahlregeln, welche festlegen unter welchen Umständen ein gewisser Sprung möglich ist.

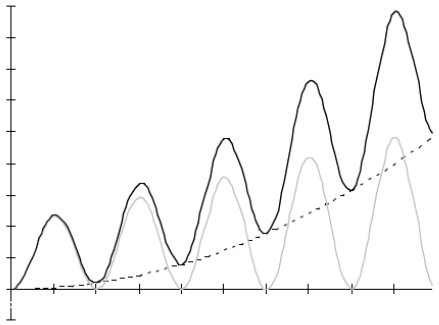
Zur Anregung von Atomen kann man verschiedene Methoden benutzen: Absorption von elektromagnetischer Strahlung, Molekülstösse aufgrund der thermischen Bewegung sowie Zusammenstöße zwischen einem Elektron und einem Atom, wobei das Atom die Energie des stoßenden Elektrons aufnimmt und das Elektron somit Energie verliert. Diese letzte Methode wurde von Franck und Hertz verwendet um nachzuweisen, dass die Bohr‘schen Postulate den experimentellen Kenntnissen entsprechen.

[…]

Man bemerkt, dass der Anodenstrom zwischen den Resonanzen nicht auf null zurück geht, sondern mit zunehmender Beschleunigungsspannung immer höher wird. Offensichtlich ist die erhaltene Resonanzkurve einem nichtlinearen, monoton wachsenden Untergrund überlagert. Eine Erklärung dafür liefert folgende einfache Idealisierung: Ein Minimum des A n o d e n s t r o m s t r i t t a u f , w e n n g e r a d e b e i d e r e n t s p r e c h e n d e n Beschleunigungsspannung

eine Anregung der Hg-Atome stattfinden kann. Dieses Minimum wird aber nur null wenn tatsächlich alle Elektronen inelastisch mit einem Hg-Atom stossen, was natürlich nicht der Fall ist. Dazu kommt eine Elektron- Elektron-Wechselwirkung, welche beim elastischen Verlauf dazu führt, dass die Energieverteilung der Elektronen nicht unabhängig ist von der der anderen in der Röhre sich befindenden Elektronen. Man könnte sich vorstellen, dass zwei Elektronen (mit ca. 5V Beschleunigungsspannung) stossen und das erste seine Energie vollständig an das zweite übergibt. Das zweite Elektron kann nun zwei Stöße verursachen, erreicht dabei die Anode genau so wenig wie das erste. Sie könnten aber später von anderen Elektronen wieder gestoßen werden und würden danach vielleicht die Anode erreichen. Es ist aber klar, dass bei zunehmender B e s c h l e u n i g u n g s s p a n n u n g i m m e r m e h r E l e k t r o n - E l e k t r o n - W e c h s e l w i r k u n g auftreten kann und damit einige Elektronen, die tatsächlich gestoßen haben die Anode doch erreichen werden. Dies führt also dazu, dass der Anodenstrom nicht mehr auf null zurück geht.

Mit einer qualitativen Untersuchung möchte ich aber zeigen, dass dieser Umstand meine Messung nur innerhalb der Messgenauigkeit beeinflusst. In Fig. 6.1 ist eine schematische Resonanzkurve eingetragen.



Figur 6.1: Analyse des nichtlinearen Untergrunds anhand eines schematischen Graphs. Die tatsächlich gemessene Kurve f(x) ist schwarz, die graue Kurve ist die korrigierte Kurve f0(x) und gestrichelt eingezeichnet ist der nicht-lineare Untergrund g(x).

Ich nehme an, dass die Resonanzkurve folgende Form hat:

$$f(x) = f_0(x) + g(x) \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i \qquad (6.2)$$

Dabei ist $f_0(x)$ die korrigierte Resonanzkurve und g(x) ein beliebiger nichtlinearer Untergrund. Ich habe mittels der Minima die Kurve g(x) von Hand bestimmt und anschließend die korrigierte Resonanzkurve berechnet. Es stellte sich erwartungsgemäß heraus, dass die horizontale Verschiebung der Maxima null ist. Macht man für den Untergrund kompliziertere Fits, dann stellt sich dasselbe heraus — innerhalb der Messgenauigkeit. Man kann also die Werte für die Energiedifferenzen getrost als korrekt ansehen, wenn man sich bewusst ist, was der nichtlinear Untergrund wirklich ist. Würde man den Anodenstrom aber ablesen wollen, dann wäre man gezwungen den Untergrund sorgfältig nach dieser Methode herauszufiltern.

7. Gedanken zum Bau einer Franck-Hertz-Röhre

Seit den Streuversuchen zwischen Elektronen und Atomen (Lenard, 1890) wissen wir, dass nur schnelle Elektronen am Atomkern streuen; die langsamen hingegen an der Hülle. Dies ist bei diesem Versuch natürlich der Fall. Wir können annehmen, dass die Elektronen — zu gegebener Beschleunigungsspannung — im Mittel eine konstante Driftgeschwindigkeit (ähnlich dem Drudemodell bei Leitern) haben. Für langsame Elektronen mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit ist die Dichte des Gases direkt proportional zum Absorptionskoeffizient. Dies möchte ich veranschaulichen:

Beschiesst man ein Gas mit einem Elektronenstrahl so kann man die Intensitätsverteilung der Elektronen beobachten:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\alpha x} \qquad (7.1)$$

Wobei I_0 die einfallende und I(x) die durchgelassene Intensität der Elektronen in einer bestimmten Richtung x bezeichnen. Der Absorptionskoeffizient α ist folgendermaßen definiert:

$$\alpha = \sigma \cdot n \qquad (7.2)$$

Wobei σ der Wirkungsquerschnitt und n die Teilchendichte des Gases ist. Also ist der Absorptionskoeffizient direkt proportional zur Gasdichte:

$$\frac{\alpha}{\rho} = const \qquad (7.3)$$

Welche Länge sollte eine FH-Röhre also aufweisen? Dazu betrachtet man die mittlere freie Weglänge χ:

$$I(\chi) = \frac{I_0}{e^1} \Rightarrow \chi = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sigma \cdot n} \qquad (7.1)$$

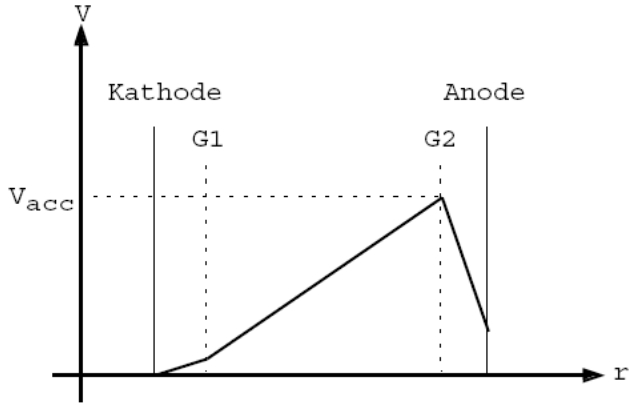
Das heißt, nach Durchqueren der freien Weglänge ist nur noch der e-te Teil der ursprünglich vorhandenen Elektronen vorhanden. Die Relation (7.4) zeigt, dass je größer der Dampfdruck in der FH-Röhre, desto kleiner die freie Weglänge. Dies ist an den Messkurven bei verschiedenen Temperaturen klar ersichtlich.“

Leemann[685] zeigt dem ähnlichen Potenzialverlauf der Strahlung wie ein Soliton[686], und die Gegenüberstellung der linearen Berechnung der nichtlinearen Messungsergebnisse[687]. Das ergibt unter den einleitend aufgezeigten Bedingungen[688] Sinn. Dabei gäbe es mehrere mathematische Komplexe.

- Auszugehen wäre bei dem einen (1), wenn man einer eigenen Berechnung Raum böte, von der Berechnung der Wellenzahl[689] und von der Halbwertszeit 10/7 = 0,7/δ ($e^{-0,7}$ $e^{-10/7}$ ≈ ½ = 0,496585304 ~ $e^{-0,6931472}$ = 0,5), von wo aus zunächst einerseits die Zahl 7 der Wellen[690] aufzusuchen ist, wo aus dem nämlichen G
- runde auf die Berechnung der Wellenzahl[691] verwiesen wird. Der Punkt ist dabei, dass während der Emissionszeit der nämlichen gezählten 7 Wellen die Feldstärke auf 1/10 sinkt[692] einerseits. Anderseits sollte

---

[685] Leemann, Versuch von Frank-Hertz, Anregung von Quantensprüngen durch Stösse, in: < URL > S. 9 Figur 4.3:



[686] Apolin 41 f.
[687] Leemann, Versuch von Frank-Hertz, Anregung von Quantensprüngen durch Stösse, in: < URL > S. 13 Figur 6.1.
[688] Leemann, Versuch von Frank-Hertz, Anregung von Quantensprüngen durch Stösse, in: < URL > S. 2 ff.
[689] Bergmann/Schäfer (1971) II 319.
[690] Bergmann/Schäfer (1971) II 370.
[691] Bergmann/Schäfer (1971) II 319.
[692] Bergmann/Schäfer (1971) II 370.

von der nämlichen Stelle aus über die Berechnung der Wellenzahl[693] zu der Gegenüberstellung der gedämpften Schwindung in der mechanischen Form der elektrischen Form in einer Tabelle[694]. Bereits bei der Berechnung der Wellenzahl[695] wird auf die Entsprechung in der Mechanik verwiesen, und das wird dann bei der direkten Gegenüberstellung expliziert[696].

- Beim anderen (2) wäre von der Gleichung $x_{n+1} = rx_n(1 – x_n)$ von Verhulst[697] (1804-1849) auszugehen, die von Großmann und Thomae (1977) aufgegriffen und von Feigenbaum 1978 „universell“ verallgemeinert wurde. Der Forschung scheint bisher entgangen, zu sein, dass der Hauptbestandteil oder „Hauptmotiv“ der Formel $x_{n+1} = rx_n(1 – x_n)$, nämlich $x_n(1 – x_n)$, der vereinfachten Form der Schrödingergleichung, x(x – 1), verblüffend ähnlich sieht[698].
- Eine (3) dritte Möglichkeit wäre eine Variante dieser Gleichung $x_\infty = (1 – 1/r)$ mit der Eulerschen Zahl[699] und deren Berechnung in Zusammenhang zu bringen

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Denn schon in meiner Dissertation weise ich darauf hin, dass die vereinfachte Form der Schrödingergleichung x(x – 1) oder x(x + 1) auch eine Variante in der Form (1 – 1/x) bzw. allenfalls [1/(1 – 1/x)] und ähnlich sei. Das heißt, dass die Eulersche Zahl

[693] Bergmann/Schäfer (1971) II 319.
[694] Bergmann/Schäfer (1971) II 321.
[695] Bergmann/Schäfer (1971) II 319: Band I Gl. (VI, 34).
[696] Bergmann/Schäfer (1971) II 321.
[697] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 583 ff.
[698] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 584.
[699] Schönhacker, Die Zahl e, S. 8 ff, in: < URL >.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

und Ansätze vergegenwärtigt werden sollten, und man auf die Quelle zurückgehen sollte, und sich nicht damit begnügen, dass man e^{-X} einfach übernimmt und als „erledigt“ behandelt.

- Die mathematische Fragestellung (4) wäre, ob und wie weit die „Zahl der Welle“ mit Hilfe der Eulerschen Zahl beschriebenen Welle und man analog den Quanten der Elektronenbahnen n = 1 bis 7 oder n = 1 bis 6 beschränken könne, so ähnlich wie die Zahl der Bahnen des Elektrons beschränkt sei, oder eben die Zahl der Wellen in der Wellengruppe, wenn man einen Stein ins Wasser wirft, auf 6/7 beschränkt sei.

Man müsste also einerseits die Berechnung der Eulerschen Zahl, die bisher – im Hinblick auf die Glieder – gegen Unendlich geht, mit n = 6 oder 7 limitieren, und bei der Berechnung der Wellenzahl[700] von der gegebenen Zahl von 6 oder 7 ausgehen, und zurück verfolgen, bzw. berechnen, welche Voraussetzungen man dazu braucht, um die Zahl der Wellen auf 6 oder 7 festzulegen.

[700] Bergmann/Schäfer (1971) II 319.

Die Folge $m_r = m_1/2 \pm m_n/2$

Die diskrete Werte der Wellenzahl ist auf jeden Fall ein Ansatz zur Erschließung der Turbulenzen aber auch Solitonen[701]. Nimmt man ein Wellenpaket mit 6 Wellen als Idealfall der Dispersion und ein Soliton[702] als „Sägezahn-Gleichung“ als Idealfalls von der Absorption (Interferenz) von 6 Wellen[703], könnte und müsste man von trukturen sprechen, also dem Chaos Konkurrenz machen, auch wenn man im Detail nicht weiter käme.

Insofern die bisherigen Vorarbeiten aufzeigen, dass Maxwell auf van der Waals[704] zurückgehe, Planck[705] und Wien auf Maxwell[706], sowie Schrödinger, Planck und Maxwell, der auch van der Waals ergänzend berichtigte[707], mit der

---

[701] Kneubühl 288 Figur 8.2 – 1.
[702] Apolin 41 f.
[703] Bergmann/Schäfer II (1971) 173 Abb 228, 176 f; Bergmann/Schäfer I (1975) 329 Abb VI 91.
[704] Dorfmüller, Teil III Thermodynamik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 1108 Abb 35.24.
[705] Krystek, Optische Strahlung und ihre Messung, in: Bergmann/Schäfer III (1993) 631: „Ein weiterer Versuch, das Energieverteilungsgesetz des schwarzen Strahlers zu bestimmen, wurde von W. Wien gemacht. Er ließ sich von der Ähnlichkeit leiten, die die Kurven der Abb. 5.5 mit denen der Maxwellschen Geschwindigkeitsgesetzes (s. Bd. 1) besitzen. Das Wiensche Gesetz lautet, wenn c1 und c2 zwei empirisch zu bestimmende Konstanten sind:

$$u_{\lambda,S}(\lambda,T) = \frac{4}{c} c_1 \lambda^{-5} e^{c_3/\lambda T} \qquad (5.62)$$

und entsprechend

$$L_{\lambda,S}(\lambda,T) = \frac{c_1}{\pi} \lambda^{-5} e^{-c_3/\lambda T} \qquad (5.63)$$

Diese Wiensche Gleichung gehorcht offenbar ebenfalls dem Verschiebungsgesetz (5.46).“
[706] Krystek, Optische Strahlung und ihre Messung, in: Bergmann/Schäfer III (1993) 633: „Man sieht leicht ein, dass die Beziehung (5.72) für kleine Werte von λT in das Wiensche Strahlungsgesetz (5.62) übergeht, da dann die Eins im Nenner von Gl. (5.72) gegen die Exponentialfunktion vernachlässigt werden kann. Für große Werte von λT kann man die Exponentialfunktion dagegen entwickeln

Formel für gedämpfte Schwingungen (schematisch grob angenähert) e^{-n} beschreibt[708], so dürfte es eine Rolle spielen, dass die Van-der-Waals-Kraft mit der sechsten Potenz (x^6) abnimmt[709], zumindest für eine entsprechende Arbeitshypothese, auch wenn diese dann widerlegt wäre.

Wenn nämlich ein ähnlicher mathematischer Zusammenhang die Berechnung der Zahl der Wellen ermöglicht, und man bei Euler die vormals unendliche Reihe[710]

$$e^{c_2/\lambda T} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \ldots, \qquad (5.75)$$

so dass der Nenner einfach den Wert $c_2/(\lambda T)$ annimmt, und man erhält:

$$L_{\lambda,S}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\pi c_2}\lambda^{-4}T \qquad (5.76)$$

was durch Einsetzen von c_1 und c_2 zum Rayleigh-Jeansche Gesetz (5.59) führt."

[707] Bergmann/Schäfer I (1975) 703; Dorfmüller, Teil III Thermodynamik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 1108 Abb 35.24.

[708] Bergmann/Schäfer I (1975) 189 f: „In Abb. IV, 93 ist der zeitliche Verlauf einer gedämpften, harmonischen Schwingung dargestellt. Mathematisch wird ein solcher Schwingungsverlauf durch folgende Gleichung dargestellt:

(IV, 34) $y = be^{-\delta t}\sin \omega t.$

Die im Exponenten auftretende Größe δ nennt man Abklingkonstante (auch Dämpfungsfaktor). Es ergibt sich die folgende Beziehung für die Abklingkonstante δ, wenn der Reibungskoeffizient f und die schwingende Masse m ist:

$\delta = f/2m.$

[...] Die Frequenz einer gedämpften Schwingung ist gegenüber einer gleichen ungedämpften Schwingung verlangsamt. Die Rechnung liefert, wenn ω_d die Kreisfrequenz im Fall der Dämpfung und ω_0 die Kreisfrequenz ohne Dämpfung bedeuten:

(IV, 34a) $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$

Bildet man das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden Amplituden b_t und b_{t+Td}, deren zeitlicher Abstand gleich der Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung T_a ist, so ergibt dieses Verhältnis nach Gl. (IV, 34) den Wert

(IV, 35) $$\frac{b_t}{b_{t+T_d}} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+\delta T_d)}} = e^{\delta T_d}.$$

Dieses Amplitudenverhältnis ist also konstant."

[709] Eidenberger, Chemieseiten, in: < URL >, Basismodul Chemie, in: < URL >, S. 23 ff, in: < URL >.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

als Grenzwert einer Folge und als Reihe

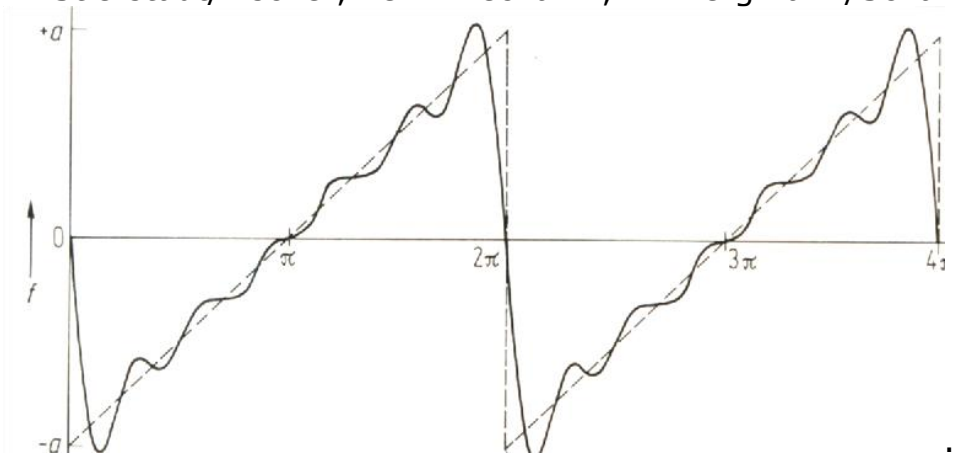
$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

bei 6 Gliedern abbrechen möchte, so ist das eine Arbeitshypothese wohl wert. Nämlich um die Frage auszuloten, wie und warum die Zahl der Wellen im Paket mit 6 limitiert sei. Die Arbeitshypothese stützt sich auf die sog. Sägezahnfunktion[711], die auch der Funktion der Solitonen[712] als nachweisliche Umkehrung der

---

[710] Schönhacker, Die Zahl e, S. 8, in: < URL >.

[711] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 670 Abb 22.12:

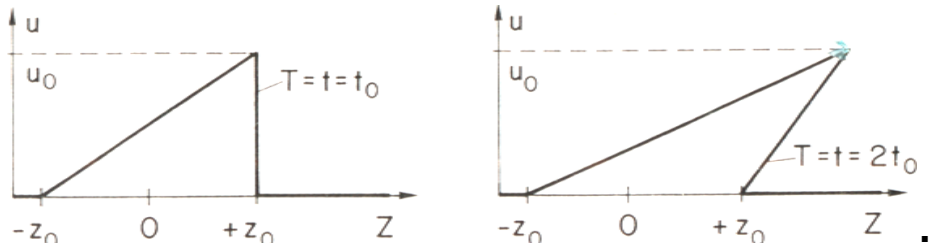


[712] Apolin 41 f.

Dispersion (beim Stehenbleiben des Schiffes schließen sich die zuvor dispergierenden 6 Wellen der Wellengruppe zu einem Soliton zusammen) entsprechen[713].

Die Sägezahnfunktion[714] ist, wenn man so will, der mathematische Durchbruch, denn es zeigt sich, dass nicht unendlich viele Elemente oder Überlagerungen von Wellen bedarf, wie das bei der klassischen Annahme der Kontinuität der Fall wäre, sondern nur gezählte 6, um die Reihen bzw. die Lücken zu schließen[715]. Es gibt in der Naturbeobachtung Phänomene wie die Solitonen[716] und das Huyghens- Fresnelsche Prinzip[717],

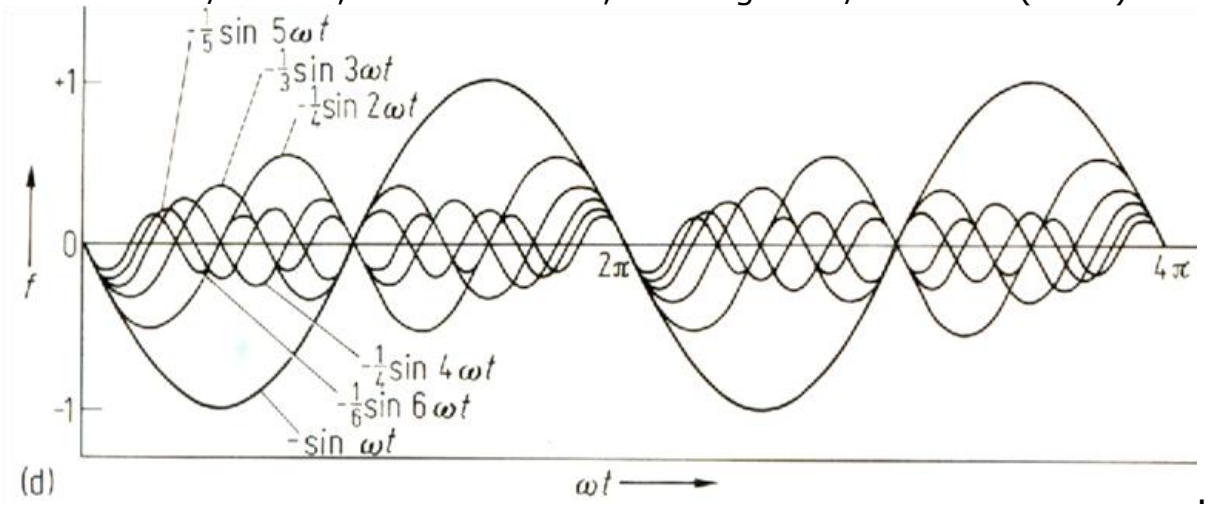
---



[713] Kneubühl 288 Figur 8.2 – 1: .

[714] Bergmann/Schäfer II (1971) 173 Abb 228, 176 f; Bergmann/Schäfer I (1975) 329 Abb VI 91.

[715] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 670 Abb 22.12:



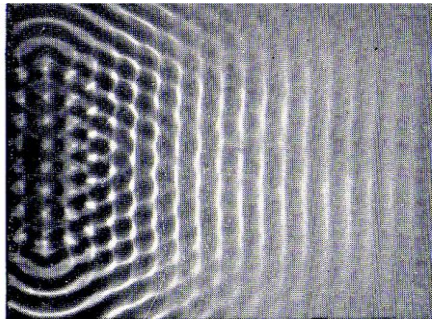
.

[716] Apolin 41 f.

- Die Solitonen Bilden sich bei der Unterbrechung der Bildung einer Wellengruppe durch Dispersion der Bugwelle eines Schiffes, und schließen sich die 6/7 Teile der Wellengruppe wieder zu einer einzigen Welle zusammen, nachdem das Schiff stehen geblieben ist, dessen Bewegung ursächlich für die Dispersion und Bildung der Wellengruppe aus einer Bugwelle war[718], Dabei ist zu beobachten, dass die einzelnen Wellen der Gruppe nahtlos in der neuen Welle aufgehen, und es ist an dem sich nun bildenden Soliton nicht erkennbar, dass die verbliebene eine Welle aus mehreren Teilwellen besteht.
- Analog besteht die Sägezahnfunktion[719] aus 6 Teilwellen und diese 6 Teilwellen schließen sich als Gruppe durch Interferenz so zu einer einzigen Welle zusammen, dass sodann nur mehr die eine einzige Welle sichtbar ist, ohne dass noch Spuren der Teilwellen sichtbar wären.
- Beim Huyghens-Fresnelschen Prinzip bilden sich analog zunächst Teilwellen[720], zB wenn bei einer geraden Wellenfront ein Gitter mit mehreren Spalten in der Fortpflanzungsrichtung im Weg steht, und an den Spaltöffnungen sich Teilwellen bilden; und dann schließen sich diese sich an den Spaltöffnungen bildenden

---

[717] Bergmann/Schäfer I (1975) 471 Abb VIII 29; Lüders/Oppen 507 Abb 13.24.



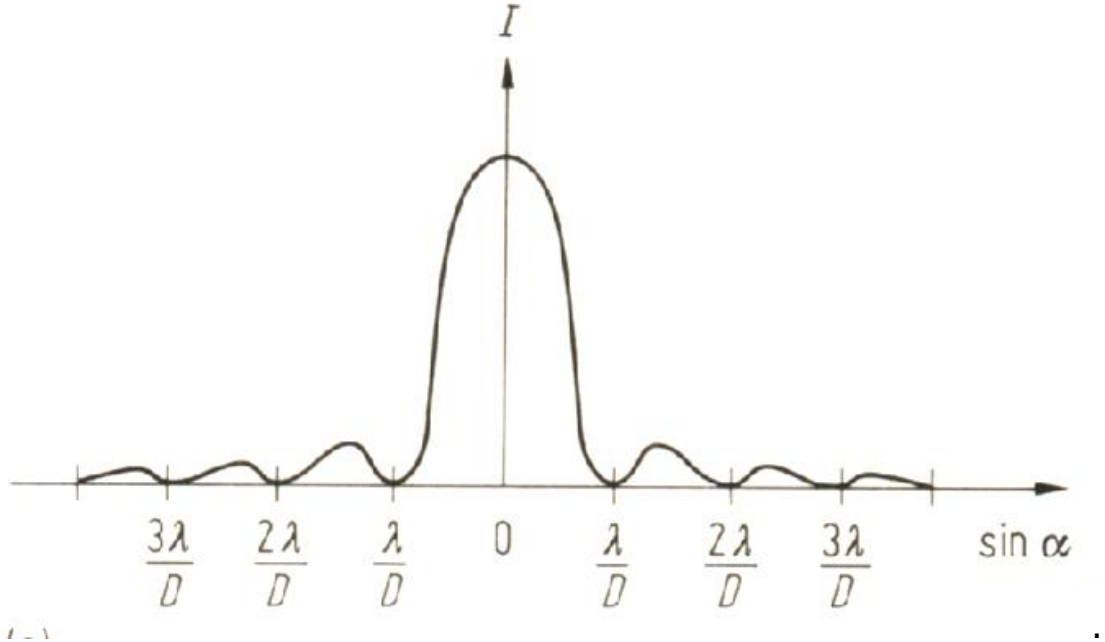
[718] Apolin 41 f.
[719] Bergmann/Schäfer II (1971) 173 Abb 228, 176 f; Bergmann/Schäfer I (1975) 329 Abb VI 91.
[720] Bergmann/Schäfer I (1975) 470 ff.

Teilwellen durch Interferenz wieder zu einer einheitlichen Wellenfront zusammen, ohne dass schließlich noch irgendwelche Spuren von Teilwellen erkennbar wären.

- Bezeichnend ist, dass bei einem einzigen größeren Spalt sich – analog der diskreten Wellengruppe der Bugwelle eines Schiffes mit 6/7 Teilwellen – ebenfalls durch Dispersion genau 7 Teilwellen bilden, die sich dann in einigem Abstand vom Spalt von einer Wellengruppe zu einer einheitlichen Wellenfront zusammen schließen[721].

Unter der Bedingung der Kontinuität dürfte mit 6 Überlagerungen rechnerisch noch kein Sägezahn entstehen, tut aber doch im Sinne der Interferenz im Huyghens-Fresnelschen Prinzip. In der schon zitierten Literatur befinden sich auch einige Varianten als Beispiele, aus denen anschaulich hervorgeht, dass bereits der diskrete Wert von 6 sich überlagernden Wellen eine Sägezahnfunktion, also einen Soliton so ergibt, dass die Überlagerungen nicht bis

[721] Raith, Elektromagnetismus, in: Bergmann/Schäfer II (1999) 405 Abb 6.39b:

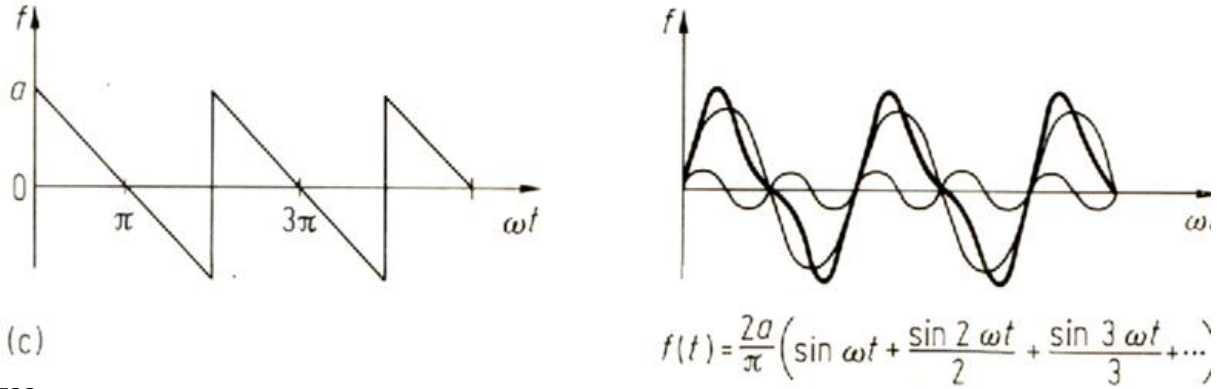


ins Unendliche fortgesetzt werden müssen, um die vollkommene Geschlossenheit zu erreichen[722], sondern der diskrete Wert von 6/7 Wellen nunmehr ein begrenztes zwar, aber eine Art begrenztes Kontinuum, in der Form einer einzigen Welle als 6/7 Teilwellen einer Gruppe, bilden[723].

Das Huyghensche Prinzip[724] berücksichtigt die Interferenz bei der Ausbildung einer Kugelwelle aus Elementarwellen in der Form, dass von einem Punkt Null ausgehend jeder in die eine Richtung angeregte Punkt sodann wie ein eigener Nullpunkt sich gleichsam verselbstständige als sog. Elementarwelle einerseits, aber als Welle zum Ursprung rückgekoppelt ist in der Wellen innewohnenden Gegenbewegung andererseits, und die Amplitude in die eine Richtung interferiert mit der Rückschwingung der vorangehenden Wellenlänge λ. Nach Fresnel folgen die einzelnen Wellen im Wellenzug im Abstand einer halben Wellenlänge und man sagt, dass die Phasendifferenz jeweils ½ λ betrage. Die als m_1, m_2, m_3, … bis m_n bezeichneten Amplituden der Elementarwellen zeigen eine resultierende Verrückung m_r nach dem Interferenzprinzip: $m_r = m_1 - m_2 + m_3 + m_4 \ldots \pm m_n$. Allerdings nimmt die Amplitude der Schwingung jeder Elementarwelle mit wachsender Entfernung vom Erregungszentrum ab. Es lässt sich zeigen, dass die Wirkung jeder Zone mit je ½ λ sehr nahe gleich dem arithmetischen Mittel aus der vorhergehenden und der nachfolgender Zone ist:

---

[722] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 670 Abb 22.12:



[723] Apolin 41 f.

[724] Bergmann/Schäfer I (1975) 472 ff.

$$m_2 \approx \frac{m_1 + m_3}{2}, \qquad m_4 \approx \frac{m_3 + m_5}{2}, \ldots$$

„Es bleibt also für die resultierende Amplitude nur

$$m_r = \frac{m_1}{2} \pm \frac{m_n}{2}$$

d. h. nur die Hälfte der ersten und letzten Zone übrig, während die sich alle anderen gegenseitig durch Interferenz aufheben. Macht man schließlich, wie es zuerst Fresnel tat, die weitere Annahme, dass in tangentialer Richtung von einer Wellenfläche keine Elementarwellen ausgehen, so bleibt in unserem Beispiel für die in *B* hervorgerufene Verrückung nur die Hälfte der Wirkung der ersten Zone, d. h. der Kugelkalotte mit dem Radius A_0C übrig. Das Ergebnis ist nicht auf kugelförmige Wellenflächen beschränkt, sondern gilt allgemein, wie man sich durch Ausführung der obigen Konstruktion leicht überzeugt. Man kann daher den Satz aussprechen: Alle Elementarwellen, die nach dem Huyghens-Fresnelschen Prinzip[725] von allen Punkten einer Wellenfläche ausgehen, wirken auf einen vor der

[725] Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 4 f < URL >: „Das Fundamentalproblem des Übergangs von der klassischen Physik zur Quantenphysik war natürlich schon den Vätern der Quantenphysik bekannt, allen voran E. Schrödinger [2]. Es wurde nur im Laufe der Zeit immer mehr verdrängt, weil die Erfolge der Quantenphysik (insbesondere der QED) derart überwältigend sind, dass man leicht vergessen kann, über ihr Fundament nachzudenken. Aber gerade danach stellt jeder mitdenkende Schüler viele Fragen. Es sind oft die gleichen Fragen, die auch die moderne Forschung (z. B. die Quantenoptik) nun wieder nachdrücklich stellt. Und es gibt nur *einen* Ansatz zu ihrer Beantwortung, nur eine Brücke führt von der klassischen Physik zur Quantenphysik: ‚die Mechanisierung eines Problems'. Das bedeutet die Beschreibung der (universellen) Physik in der Sprache der theoretischen Mechanik. Wir haben *keinen* anderen Zugang. Wir *müssen* jede grundlegende Gleichung in der Sprache der Mechanik aufstellen. Wir *können* allerdings bei der Interpretation versuchen, dieses Fundament zu verlassen. Doch bevor wir bedingungslos (grundlos, bodenlos) ‚axiomatische Quantenphysik' betreiben, sollten wir uns Rechenschaft darüber ablegen, dass es nur zwei Pfeiler gibt, die die gesamte Physik tragen: das *Wirkungsprinzip* und das *Huygenssche Prinzip*. Wer diese beiden Pfeiler ignoriert oder gar einreißt, landet unweigerlich im Welle-Teilchen-Dualismus. Er schreibt zwar $\psi =$

Welle liegenden Punkt so, wie die Hälfte der ersten Elementarzone, die den Fußpunkt des von dem betroffenen Punkt auf die Wellenfläche gefällten Lotes umgibt; die Wirkung aller übrigen Zonen wird durch Interferenz aufgehoben.“[726]

Es könnte es dem Verständnis dienen, dass in Zusammenhang mit der versuchten Anwendung der Gleichung von Verhulst[727] $x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n)$ nach Feigenbaum auf die Taylor-Wirbel zwar angedeutet, aber dann mit dem Hinweis wieder relativiert wird, dass man angeblich im Zirkel deswegen so nichts besser verstand, weil man vielleicht mit dem Deterministischen Chaos einen besseren Ansatz hätte[728]. Das ist m. E. zumindest insofern ein Widerspruch in sich, als noch kurz davor offen zugegeben wurde, dass im Gegensatz zu dem hier angedeuteten Ansatz der Deterministische Chaos keine greifbaren Ergebnisse brachte[729]. Der hier angesprochene Übergang von der laminaren Strömung zur Turbulenz ist bereits vorraussagbar, und vor allem auch umgekehrt, denn bei bestimmten Reynoldzahlen hört ja die Turbulenz auf oder setzt sie wieder ein[730]. Noch anschaulicher ist die Bildung von Taylor-

---

$\sum_j e^{iS_j/\hbar}$, weiß aber nicht mehr, was es bedeutet. Schrödinger und Dirac [3] wussten es noch und R. P. F. – der Meister der Pfad- und Wirkungsintegrale – natürlich auch. Nur hat Meister Feynman das Wirkungsprinzip wohl so verinnerlicht, dass er es in seinen populärwissenschaftlichen Veröffentlichungen kaum noch erwähnt. Und so droht manchem Leser statt einer Elementarisierung eine Simplifizierung: das Huygenssche Prinzip kennt jeder (?), und das Wirkungsprinzip braucht man nicht. Der Brückenschlag von der klassischen Physik zur Quantenphysik ist aber nur mit *beiden* Prinzipien möglich.“

[726] Bergmann/Schäfer I (1975) 472 f.
[727] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 583 ff.
[728] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 585.
[729] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 582.
[730] Bergmann/Schäfer I (1975) 344 ff.

Wirbel[731], wo analog der Dispersion die Wirbelbildung erst mit 6 Taylor-Wirbel einsetzt[732], und dann mit dem diskreten Wert 12 = 2 x 6 Taylor-Wirbel aufhört[733].

Es war zu überprüfen, ob und wie weit die Kontinuität der Reihe in der Eulerschen Zahl[734]

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

periodisch sei[735]. Die einfachte Form als ansteigende Reihe ist allgemein bekannt

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Im Gegensatz zu der herkömmlichen Formel zeigt die Schreibweise als Kettenformel eine gewisse Periodik: e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, …]

---

[731] Stierstadt/Fischer, Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 573 ff.
[732] Braak 37 ff.
[733] Braak 39, 42; Röpcke 23, 27: Man nahm zunächst 11 Wirbel an, wurde aber später entdeckt, dass Taylor-Wirbel immer paarweise auftreten, und es existiert neben den elf großen Wirbel etwa gleicher Größe ein zwölfter Wirbel, der allerdings um einiges kleiner ist, aber stets zu finden.
[734] Schönhacker, Die Zahl e, S. 8 ff, in: < URL >.
[735] Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 103, 106 (117, 120) f < URL >: „Beachten Sie, dass die Testfunktion nicht periodisch ist, während eine Fourierreihe – also ein diskretes Spektrum – immer eine periodische Funktion liefert. […] Ein diskretes Spektrum bedeutet wie gesagt immer eine periodische Funktion.“

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cdots}}}}}}}}}}}}}}}}$$

Während also einerseits die Zahl 6/7 der Wellen in der Gruppe der elektromagnetischen Wellen des Hertzschen Dipols anhand der bekannten Parameter greifbar sei[736], wäre also zu hinterfragen, ob und wie weit die analoge Zahl der Taylor-Wirbel auf die gleiche oder ähnliche Parameter und deren Verhältnis zurück gehe, ist das Experiment zitiert, wonach erst bei einer Gruppe von 6 Taylor-Wirbel ein Grenzwert nach unten erreicht sei, und ein zweiter Grenzwert bei 11 Taylor-Wirbel nach oben so konstatiert werde[737], dass andere Experimente Zeigten, dass die Taylor-Wirbel immer paarweise auftreten und sozusagen im Schatten des 11. Taylor-Wirbels noch ein 12.

[736] Bergmann/Schäfer (1971) II 319, 370.
[737] Braak 37 ff.

Taylor-Wirbel stets zu finden sei, so dass man nach oben einen Grenzwert bei 12 Taylor Wirbeln habe[738]. Die Frage also wäre, ob und wie weit die Berechnung der Zahl der Wellen auf die Berechnung der Zahl der Taylor-Wirbel angewendet werden kann, wobei vorher noch bei den einfachen Wellen die Ursachen der diskreten Zahl 6 der Gruppe zu untersuchen wäre.

- Auszugehen wäre bei der Arbeitshypothese der Übertragung der Berechnung der Wellenzahl auf die Berechnung der Zahl der Taylor-Wirbel von der experimentellen Tatsache, dass die Wellen des Hertzschen Dipols (quellenfreie) Wirbel seien[739].
- Damit wäre also die Zahl 7 bzw. 6 mit Phasenverschiebung, der Wellen der Gruppe im Hertzschen Dipol[740] mit der 6er-Gruppe der Taylor-Wirbel vergleichbar.
- Die zitierte Stelle, wonach die elektromagnetische „Wellen“ des Hertzschen Dipols Wirbel seien[741], ist die in der Erforschung der Turbulenzen lange vergeblich gesuchte Stelle, die mit Hilfe der Taylor-Wirbel an die klassische Physik rückgekoppelt werden könne.

Das vermeintliche Geheimnis der Turbulenzen ist nichts anderes als die Überlagerung und Ineins von Welle einerseits und Strömung andererseits: Es geht bei der Annäherung der Fassbarkeit der Turbulenz um den Grenzfall zwischen laminaren und turbulenten Strömung, dessen einfachster

- geradliniger Fall für die Translation die Stoßwelle[742] und
- ungerader Fall für die Rotation der Wirbel[743] ist.

[738] Braak 39, 42; Röpcke 23, 27.
[739] Bergmann/Schäfer (1971) II 358.
[740] Bergmann/Schäfer (1971) II 370.
[741] Bergmann/Schäfer (1971) II 358.
[742] Bergmann/Schäfer I (1975) 493 ff.
[743] Bergmann/Schäfer I (1975) 297 ff.

Überall dort, wo die Amplitude der Welle nicht genug Zeit und oder Raum habe, um zurück zu schwingen, und der Stau von Wellen sich als Strömung im Medium auswirke. Das ist immer der Fall, wenn aufgrund eines Staues der Wellen das Medium von der Welle mitbewegt wird, oder die Schwingung so abgelenkt, gedämpft oder beschleunigt wird, dass dabei die Elastizitätsgrenze überschritten wird. In allein diesen Fällen kann nicht mehr von einer Welle allein gesprochen werden, sondern es tritt Strömung auf, oder im Falle der laminaren Strömung eine Sekundärströmung, die sich der Primärströmung überlagert und damit interferiert.

Bekanntlich nimmt die Geschwindigkeit der „Rotation“ in der dem Potenzialwirbel bzw. Zirkulation zu[744], und hat den nämlichen Grenzwert bei 2/3 des Impulses, wo sich die Welle überschlägt und sich gleichsam brechen möchte[745]. Der Wirbelkern ist also quasi eine rotierende Stoßwelle.

Das alles auf den Punkt gebracht bedeutet, dass die Wellenmechanik bei Schrödinger[746] eigentlich nur in der Strömungstechnik – also nur interdisziplinär – erklärt[747], bzw. in die Sprache der klassischen Mechanik "übersetzt" werden könne[748].

- Insofern dabei von einem Fehler, oder Wissenslücke gesprochen werden könne, so ist das der fehlende Übergang bei Maxwell, wo noch direkt die hydrodynamischen Gleichungen auf die elektromagnetischen Wellen übertragen wurden[749].

---

[744] Bergmann/Schäfer I (1975) 301.
[745] Bergmann/Schäfer I (1975) 301 f.
[746] Brandt, 75 Jahre Schrödingergleichung, Folie 1 ff, in: < URL >; Kleinpoppen, 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 2, 16, 20 ff, 27 Abb 11.1; Niedrig, VIII. Kapitel. Wellencharakter der Materie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 855 ff; Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 4 f < URL >.
[747] Kneubühl 253 f, 261 f, 280 ff, 305 ff, 325 ff; Dodd/Eilbeck/Gibbon/Morris 52 ff, 91 ff.
[748] Kleinpoppen, 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 2, 16; Niedrig, VIII. Kapitel. Wellencharakter der Materie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 855 ff; Bruckner 2 f.
[749] Bergmann/Schäfer (1971) II 173, 176 f, 358.

- Diese Übertragung der hydrodynamischen Gleichungen von Helmholtz[750] auf die Elektrodynamik ist in und mit dem Hertzschen Dipol glänzend bewiesen worden[751]. Und Wien und Planck gehen ausdrücklich und namentlich auf Maxwell zurück[752]. Boltzmann hat Maxwell beinahe religiös verehrt und auf jeden Fall dessen Ergebnisse als richtig verfochten und auch bewiesen[753].
- Dahingegen hatte die Relativitätstheorie Maxwell, der sich auf Newton stützt und diesen auch dann als richtig bestätigt, wenn etwas ergänzend berichtigt, ad absurdum geführt[754] und gründet die Relativitätstheorie, logisch unzulässig, in der angeblichen Unzulänglichkeit von Maxwell, der mit und in der Relativitätstheorie überwunden und angeblich obsolet wäre[755], außer vielleicht als Steinbruch für die Relativitätstheorie.

Stein des Anstoßes für den physikinternen Grabenkrieg[756] war die Wirbeltheorie von Lord Kelvin[757], der die Wirbeltheorie von Helmholtz mit einer Theorie der Zirkulation abrundete[758], die von den Experimenten von Hertz

---

[750] Bergmann/Schäfer I (1975) 298 ff, 329 ff.
[751] Bergmann/Schäfer (1971) II 177.
[752] Krystek, Optische Strahlung und ihre Messung, in: Bergmann/Schäfer III (1993) 631 ff.
[753] Dorfmüller, Teil III Thermodynamik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 1302.
[754] Kleinpoppen, 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 2: „Erst Mitte der Zwanziger Jahre dieses Jahrhunderts wurden die für die Struktur des Atoms grundlegendsten neuen Gesetze der Physik, die Gesetze der Quantenmechanik, entdeckt (Heisenberg, Schrödinger, Born, Dirac). Seit dieser Zeit ist klar geworden, dass die Gesetze der Newtonschen Mechanik für die Beschreibung der Atome und seiner Bausteine nicht ausreichen. Die neue Quantenmechanik und deren Erweiterung, die Quantenelektrodynamik, haben sich dagegen als richtige Theorien zur Beschreibung und Erklärung aller bisher experimentell beobachteten atomphysikalischen Phänomene als richtig erwiesen."
[755] Vgl. Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 4 f < URL >.
[756] Horgan, Teilchen-Metaphysik, in: Dosch 216 ff, 220 ff, 223; Schoenebeck, IX. Kapitel. Die Relativitätstheorie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 905: „Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes führte schon im 19. Jahrhundert auf ein Problem, dessen Lösung erst durch die Relativitätstheorie erfolgte. Die Problematik gipfelte in der Frage, wie sich die Ausbreitung des Lichtes relativ zu irgendwie bewegten Körpern verhält. Die – ebenfalls im 19. Jahrhundert durchgeführten – Experimente trugen zunächst nicht zu einer Klärung bei, vielmehr verschärften ihre Ergebnisse das Problem. Um so bedeutsamer wurden die Erkenntnisse der Relativitätstheorie, die zu einer end-

bestätigt wurden, obwohl von Hertz in den Nachschlagewerken eher heißt, dass er vor allem Maxwell und damit Helmholtz bestätigt hatte[759]. Der Punkt ist, dass Kelvin einerseits in der Strömungstechnik die Wirbeltheorie von Helmholtz weiter entfaltete, aber die nämliche Hydrodynamik von Helmholtz auf die Atomphysik übertrug. So wurde zwar zunächst Maxwell und Helmholtz von Hertz bestätigt, aber durch die Relativitätstheorie wurde vor allem Kelvin, zusammen mit Maxwell, angeblich widerlegt[760]. Dahingegen hatte Schrödinger einfach Hertz[761] übernommen und auf die Atomphysik angewandt[762], und damit über Hertz, denn er auf die Atomphysik übertrug,

---

gültigen Klärung dieser Fragen führten. In diesem Sinn stellt die Relativitätstheorie den Abschluss der klassischen Physik, insbesondere im Hinblick auf Elektrodynamik und Optik, dar. Die Auswirkungen dieser Theorie erstrecken sich allerdings auf weite Bereiche der Physik und der Astrophysik."

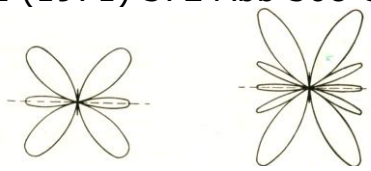
[757] Bickel, A.: Vortextheorie in: < http://www.wikiweise.de/wiki/Vortextheorie >: „**Vortextheorie** (v. lat.: *vortex*, Strudel), naturwissenschaftliche Hypothese auf Basis des Dynamismus, derzufolge die Atome nicht materielle Teilchen, sondern Wirbel im Äther sind. Dieses Konzept erlaubt eine Erklärung des Weltalls, die nicht völlig deterministisch ist, und wurde insbesondere von William Thomson (Lord Kelvin) und James Clerk Maxwell propagiert. Auch die Schwerkraft sollte damit erklärt werden können."

[758] Bergmann/Schäfer I (1975) 297 ff.

[759] Bergmann/Schäfer (1971) II 173, 176 f, 358.

[760] Kleinpoppen, 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 2; vgl Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 4 f < URL >.

[761] Bergmann/Schäfer II (1971) 372 Abb 508-509:



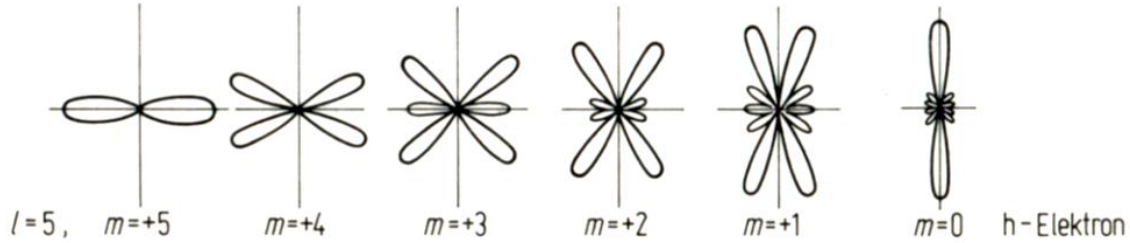
[762] Kleinpoppen, 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 27 Abb 11.1:

Kelvins Atomtheorie bestätigt. Schrödinger ist also der Beweis der Theorie von Kelvin. Der Knackpunkt ist die Identifizierung der elektromagnetischen Wellen als Wirbel[763], die mit Maxwell und Helmholtz den Bedingungen der klassischen Physik genügen[764]. Schrödinger hat gezeigt, dass auch die quantenmechanische Atomphysik im Sinne von Kelvin den Bedingungen der klassischen Physik genüge. Neuerdings wurde behauptet, dass die Riemannsche Zetafunktion den Bedingungen der Quantenmechanik genüge[765].

Die für die Wellenzahl[766] ursächlichen Parameter (6) stehen im Verhältnis zur Eulerschen Zahl[767] e, mit deren Hilfe die Wellenzahl berechnet, bzw. die Berechnung davon abgeleitet werde. Der nämlichen Eulerschen Zahl wohnt eine Periodizität inne[768]:

"**2.6.5 Periodizität**

Da sich die Definition der Exponentialfunktion im Komplexen nur durch die Schreibweise der Variablen vom reellen Fall unterscheidet, behalten sämtliche Rechenregeln ihre Gültigkeit, wie etwa $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.



[763] Bergmann/Schäfer (1971) II 358.
[764] Bergmann/Schäfer (1971) II 173, 176 f.
[765] Gaubitzer 74 f.
[766] Bergmann/Schäfer (1971) II 319.
[767] Schönhacker, Die Zahl e, S. 8 ff, in: < URL >.
[768] vgl. Schönhacker, Die Zahl e, S. 43 ff, in: < URL >

Aus der Eulerschen Formel erkennen wir, dass e^z eine Periodizität aufzuweisen hat, denn es gilt: $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.

e^z ist also periodisch mit der Periode $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$. Diese Periode ist uns nur bisher nicht 'aufgefallen', weil sie rein komplex ist und daher im Reellen gar nicht in Erscheinung treten *kann*.

Die Gleichung $e^z = a$ hat daher unendlich viele Lösungen für alle $a \neq 0$ (→ 2.7.3 Logarithmus im Komplexen).

2.6.6 $e^z = e^{x+iy}$

Betrachten wir die Exponentialfunktion e^z nun für allgemeines $x + iy = z \in \bullet$, so stellen wir fest, dass alle Eigenschaften, die wir bisher kennengelernt haben, auch hier analog gelten. So ist etwa auch die Ableitung der Funktion gleich der Funktion selbst:

Ist eine Funktion $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ im Punkt $z = x + iy$ differenzierbar, so ist ihre Ableitung dort gegeben durch

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \text{bzw. äquivalent durch } \frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

© 2000 Stefan Schönhacker | E-Mail: stefan@schoenhacker.at | Website: http://schoenhacker.at/

Handelt es sich bei der Funktion um die Exponentialfunktion, so gilt:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow u = e^x \cos y \text{ sowie } v = e^x \sin y$$

woraus sich wiederum die Ableitungen ergeben wie folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \text{ sowie } \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

Wir erhalten als Endergebnis:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

Anmerkung: Wie die Zwischenergebnisse zeigen, gilt die bereits oben hergeleitete Eulersche Formel also nicht nur für e^{iy} mit $y \in \bullet$, sondern für e^{iz} mit $z \in \bullet$.

Daraus folgen die Beziehungen:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ bzw. } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

Die Tatsache, dass e^z bei Differentiation unverändert bleibt, hätten wir auch auf einem anderen Weg zeigen können: die Potenzreihe für e^z ist ja absolut konvergent und daher erhält man ihre Ableitung auch durch gliedweises Differenzieren. Es ist offensichtlich, dass sich in diesem Fall dieselbe Potenzreihe wieder ergibt, sodass $(e^z)' = e^z$ gilt."[769]

[769] vgl. Schönhacker, Die Zahl e, S. 43 f, in: < URL >

Wie schon zur Schreibweise in der Kettenformel angedeutet, ist zwar nicht unmittelbar, aber in der Tiefenschicht eine Periodizität enthalten. Aus der Eulerschen Formel ist zu erkennen, dass e^z eine Periodizität aufweist: „$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$“. „$e^z$ ist also periodisch mit der Periode $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$.“ Daraus folgt auch noch die Beziehung „$e^{iz} = \cos z + i \sin z$“ und „$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$“. Das könnte andeuten, bzw. mehr oder minder beschreiben, dass e sich auf diskreten Bahnen bewegt.

„*2.5 e^q – die logarithmische Spirale*

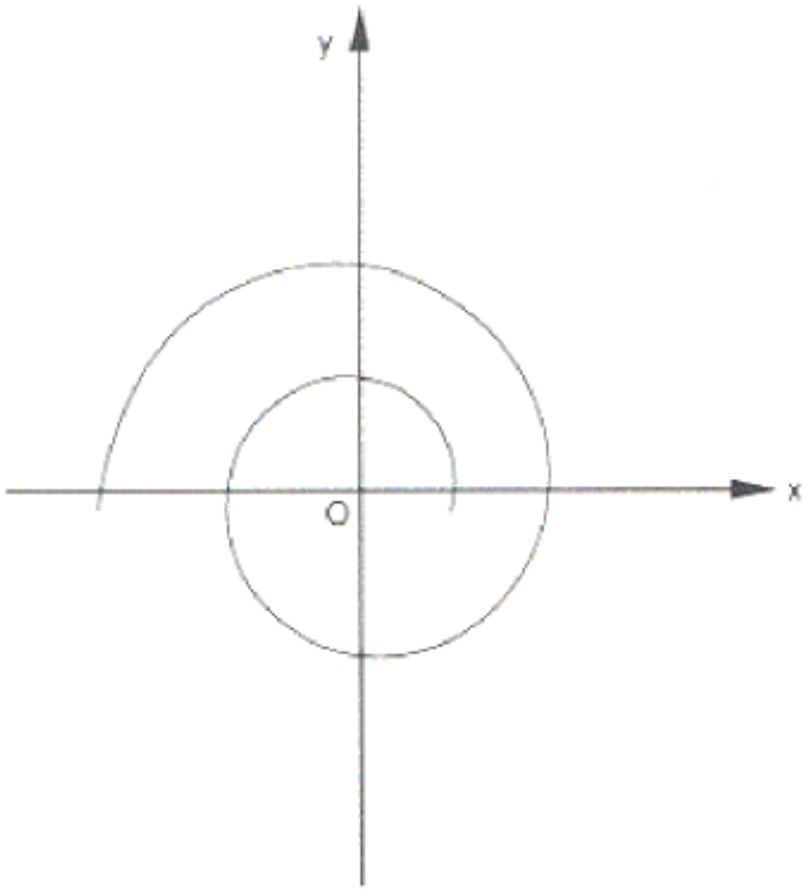
Eine besondere Kurve ist die logarithmische Spirale, die in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts von Descartes entdeckt (und 1638 in seinen Briefen an Mersenne besprochen) und vor allem von Jakob I. Bernoulli untersucht wurde. Sie wird beschrieben durch die Gleichungen

$$r = e^{a\theta} \, bzw. \ln r = a\theta.$$

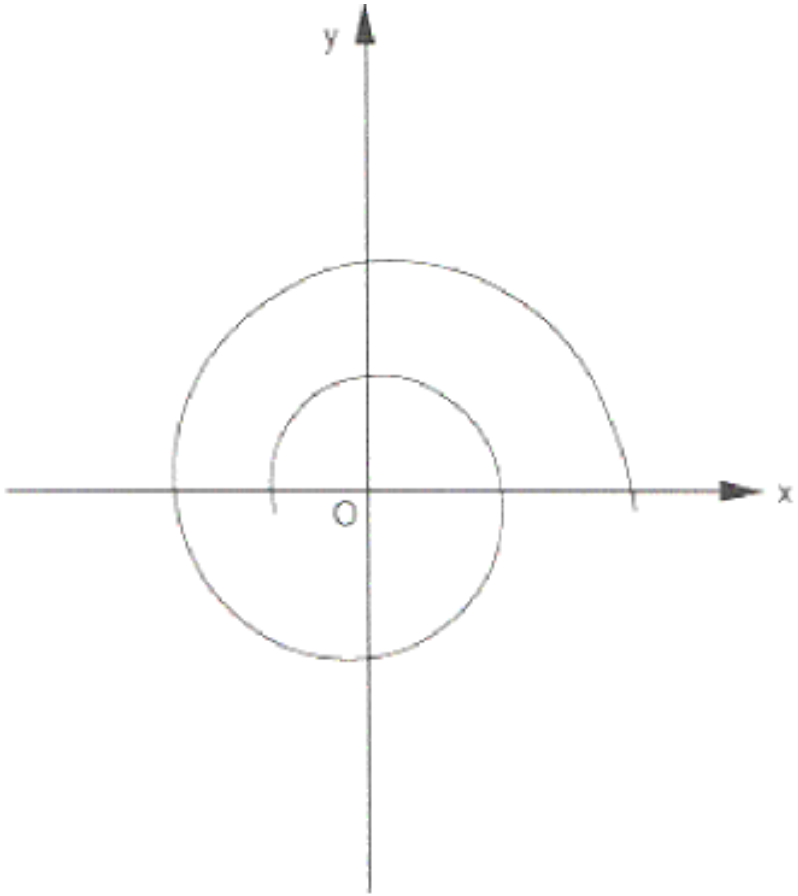
Heute gelten diese beiden Formulierungen selbstverständlich als äquivalent; zu Bernoullis Zeiten allerdings war die Exponentialfunktion noch nicht als eigenständige Funktion anerkannt, ja es gab noch nicht einmal ein eigenes Symbol für *e*. Daher war die zweitgenannte Gleichung diejenige, die Bernoulli verwendete (siehe [5], Seite 115).

Ist der Faktor *a* aus der obigen Gleichung *positiv*, so nimmt der Abstand *r* vom Mittelpunkt bei Bewegung entgegen des Uhrzeigersinns zu – man erhält eine *linksdrehende* Spirale. Ist *a* hingegen *negativ*, so nimmt der Abstand *r* ab – die Spirale ist *rechtsdrehend*. Die beiden Spiralen liegen spiegelbildlich[770] zueinander.

[770] Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht.“



linksdrehende Spirale $r = e^{a\theta}$



rechtsdrehende Spirale $r = e^{-a\theta}$

Auf den ersten Blick scheint es sich bei der logarithmischen Spirale um eine ‘ganz gewöhnliche’ Spirale zu handeln, derer es viele gibt. Dem ist allerdings nicht so, denn eine Eigenschaft hebt sie ganz besonders hervor (siehe [1],

Seite 598). Diese besteht darin, dass der Radiusvektor mit der Kurve selbst stets den gleichen Winkel bildet[23]. Daher nennt man die logarithmische Spirale manchmal auch die *gleichwinklige Spirale*.“[771]

Tatsächlich heißt es an der zitierten Stelle, dass *e* eine spezielle Spirale beschreibt $r = e^{a\theta} bzw. \ln r = a\theta$, die aufgrund gewisser Eigenschaften einzigartig, um nicht zu sagen eine Singularität ist. Grob angenähert[772] könnte man zusammenfassen, dass aufgrund der mit Hilfe von π beschriebenen Periodizität von e^z aus der Formel: „$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$“ zu ersehen wäre, dass die Periodizität von e^z zwar komplex, aber die Einheit ein diskreter Wert sei…

Die nämliche Periodizität von e^z mit π in der Formel: „$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$“ einerseits, und die Besonderheit andererseits, dass die logarithmische Spirale in der Form $r = e^{a\theta} bzw. \ln r = a\theta$ bei jeder Umdrehung – nicht wie die Archimedische Spirale – den Abstand vom Mittelpunkt um eine konstante Differenz, sondern um einen konstanten Quotienten, vergrößert[773], räumt ihr eine Sonderstellung ein, macht sie einzigartig, um nicht zu sagen universell. Sie ist keine „gewöhnliche“ Spirale, denn der Radiusvektor bildet mit der Kurve selbst stets den gleichen Winkel[774].

„Eine weitere Besonderheit soll hier ebenfalls noch Erwähnung finden. Während man unendlich viele Umdrehungen zurücklegen muss, wenn man sich auf einer logarithmischen Spirale von einem festen Punkt aus nach innen bis zum Mittelpunkt bewegen will, ist die dabei zurückgelegte Strecke dennoch endlich. Diese spannende Tatsache wurde 1645 von Evangelista Torricelli24 entdeckt. Nicht nur das, er ermittelte auch die exakte Länge der zurückgelegten Strecke.

---

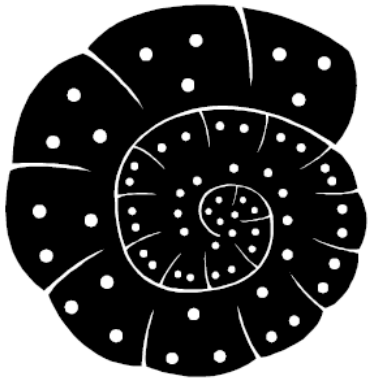
[771] vgl. Schönhacker, Die Zahl e, S. 37 f, in: < URL >.
[772] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.
[773] Schönhacker, Die Zahl e, S. 41, in: < URL >; Riesenhuber 127 ff, 152 ff.
[774] Schönhacker, Die Zahl e, S. 38, in: < URL >.

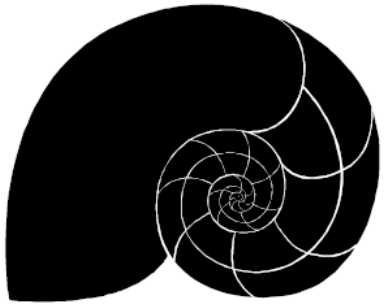
2.5.1 Vorkommen

Einen Sonderfall der logarithmischen Spirale stellt der *Kreis* dar, für den die Wachstumsgeschwindigkeit $a = 0$ beträgt. Es ergibt sich:

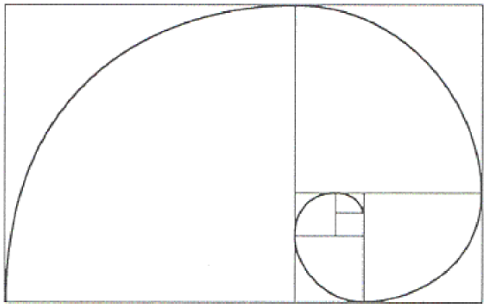
$$r = e^0 = 1.$$

Häufig tritt die logarithmische Spirale in der Natur auf, so etwa bei Schneckengehäusen und Sonnenblumen.





Aber auch in der Kunst findet die logarithmische Spirale Verwendung. Sie ist eng verwandt mit dem Goldenen Schnitt, wie die folgende Grafik mit ‘Goldenen Rechtecken’ zeigt, die eine logarithmische Spirale umschreiben. Bei jedem Rechteck verhält sich die Länge zur Breite wie 1,61803... zu 1.



Goldene Rechtecke umschreiben eine logarithmische Spirale“[775]

Im alten Bergmann/Schäfer I (1975) S. 650 f ist es Einstein[776], der zitiert wird, wonach er die Gitterschwingungen zunächst mit $E = (3hv)/(e^{hv/kT}—1)$ beschreibt, und dann nach der Formel e^x eine Reihe entwickelt, die wir schon kennen. Es wird behauptet, dass für den Fall, wenn $T > hv/k$ sei, so kann man die Reihe nach dem zweiten Summanden abbrechen und man erhält $E=3kT$. Das erweckt den Eindruck, dass hier die Temperatur aperiodisch wird. Denn die Mathematiker, vor allem die meisten Bücher für die Mittelschule, wiederholen monoton, dass e nie periodisch sein könne, während einige, insbesondere die Liebhaber der logarithmischen Spirale[777], von der Periodizität von e^x wissen. Die Überlegung wurde dann von Debye mit einer Alternative abgelöst[778], allerdings tauschte er nur $hv_g/k=\Theta_D$ und behielt sonst die Formel in der Form $E = (hv)/(e^{hv/kT}—1)$. Das heißt, dass Debye die Formel zwar abgeändert d. h. korrigiert hatte, aber das Prinzip behielt, und damit bestätigte, dass die Reihe bei e^x sehr wohl begrenzt sein könne. Debye spricht dann von $v_g=c/2d$ als Grenzfrequenz.

[775] Schönhacker, Die Zahl e, S. 39, in: < URL >.
[776] Bergmann/Schäfer I (1975) S. 650.
[777] Riesenhuber 127 ff, 152 ff.
[778] Bergmann/Schäfer I (1975) S. 650 f.

Die Folge y(n + 2) + py(n + 1) + qy(n)

Die Folge y(n + 2) + p·y(n + 1) + q·y(n) = 0 hat für q die abgeleitete form Form q = [–(1/2)p + (1/2)(–4q + p²)$^{1/2}$]·[q = –(1/2)p – (1/2)(–4q + p²)$^{1/2}$].

„Differenzengleichung

Wir wollen nun – wie schon bei der DG 1.Ordng. – die Differentialgleichung mit der Differenzengleichung vergleichen. Das ist diesmal die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung:

```
gl:= y(n + 2) + p·y(n + 1) + q·y(n)=0;
```

Mit der Lösung

```
> sol:=rsolve(gl,y;
```

$$sol := \frac{-\left(\sqrt{-4q+p^2}py(0)+\sqrt{-4q+p^2}y(1)-p^2y(0)-py(1)+2qy(0)\right)\left(2\frac{q}{-p+\sqrt{-4q+p^2}}\right)^n}{\left(\sqrt{-4q+p^2}\left(-p+\sqrt{-4q+p^2}\right)\right)+\left(p^2y(0)+py(1)+\sqrt{-4q+p^2}py(0)+\sqrt{-4q+p^2}y(1)-2qy(0)\right)\left(-2\frac{q}{p+\sqrt{-4q+p^2}}\right)^n}{\left(\sqrt{-4q+p^2}\left(p+\sqrt{-4q+p^2}\right)\right)}$$

also einer Linearkombination zweier geometrischer Folgen mit den Eigenwerten als Basen. So sieht man es besser:

```
> y(0):=0: y(1):=1:
> simplify(sol);
```

$$\frac{-2^n\left(\frac{q}{-p+\sqrt{-4q+p^2}}\right)^n+\left(-2\frac{q}{p+\sqrt{-4q+p^2}}\right)^n}{\sqrt{-4q+p^2}}$$

Und nach Vieta gilt:

```
> ew[1]·ew[2] = expand (ew[1]·ew[2]);
```

$$\left(-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{-4q+p^2}\right)\left(-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{-4q+p^2}\right)=q$$

Wie sieht die Lösung der Fibonacci-Gleichung aus? Im Worksheet können Sie es erfahren und damit experimentieren.

```
> isol:=evalc(Im(sol)): rsol:=evalc(Re(sol)):
> asol:=evalc(abs(sol)):
> q:=-2: p:=-0.1: plot(asol,n=0..20);
```

Das ist eine Anregung, die Fibonacci-Gleichung mit Maple ein wenig zu erforschen... man kann sich schlecht gegen die Eigendynamik dieses CAS wehren. Der 3D-Plot liefert je nach dem Wert von p wieder gedämpfte Schwingungen unterschiedlicher Frequenz.

```
> q:=1/2: p:='p': plot3d(asol,n=0..10,p=-1..1,axes=boxed);
```

Im Unterschied zur Differentialgleichung steht aber in der Lösung der Differenzengleichung der Logarithmus der Eigenwerte in der Exponentialfunktion (wenn man zur Basis e übergeht), und das hat beträchtliche Auswirkungen auf die Bewegung (Lösung):

```
> p:='p': q:=2:
> plot({Im(ln(ew[1])),Im(ln(ew[2])),Re(ln(ew[1])),
> Re(ln(ew[2]))},p=-5..5);
```

Für $-2\sqrt{q}<p<2\sqrt{q}$, bekommt man wieder Schwingungen, aber mit einer Frequenz, die π nicht überschreitet, und die ”Dämpfung” ist ln(abs(q)) (wieder mit Vieta ist mit den konjugiert komplexen Eigenwerten das Betragsquadrat eines Eigenwertes q). Dort, wo bei der DG der aperiodische Grenzfall lag, beginnt nun ein Gebiet, in dem mit wachsendem p eine ”gedämpfte’ Schwingung mit der festen Freqenz π stattfindet. Nur für $p<-2\sqrt{q}$ stimmt der Charakter der Lösungen von DG

und Differenzengleichung insofern überein, als keine Schwingung möglich ist, aber bei der Differenzengleichung ist immer noch exponentielle Abnahme möglich (Abb. A.9).

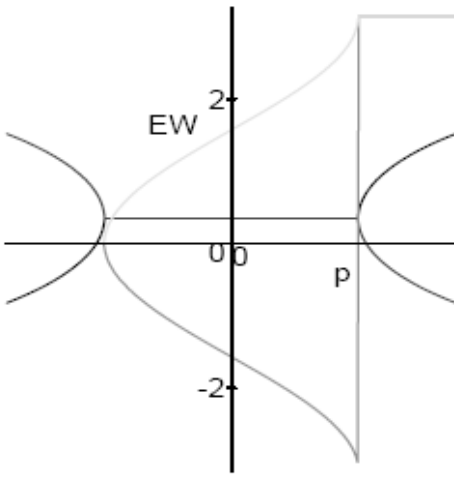


Abb A.9: Die Eigenwerte der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung zeigen charakteristische Unterschiede zu denen der DG 2. Ordnung. Die Diskretisierung der Bewegung hat u. a. zur Folge, dass bei starker Dämpfung nicht etwa Aperiodizität eintritt, sondern die Frequenz von der Dämpfung unabhängig wird.

ImWorksheet folgen weitere Plots, mit denen Sie diese Zusammenhänge untersuchen können. Dabei handelt es sich um Zusammenhänge, die auf fundamentale Fragestellungen führen: Wie läßt sich die Diskretisierung in das Kontinuum einbetten? Laufen natürliche Vorgänge überhaupt kontinuierlich ab? Gibt es gar eine Theorie hinter der Chaostheorie und der Quantentheorie?"[779]

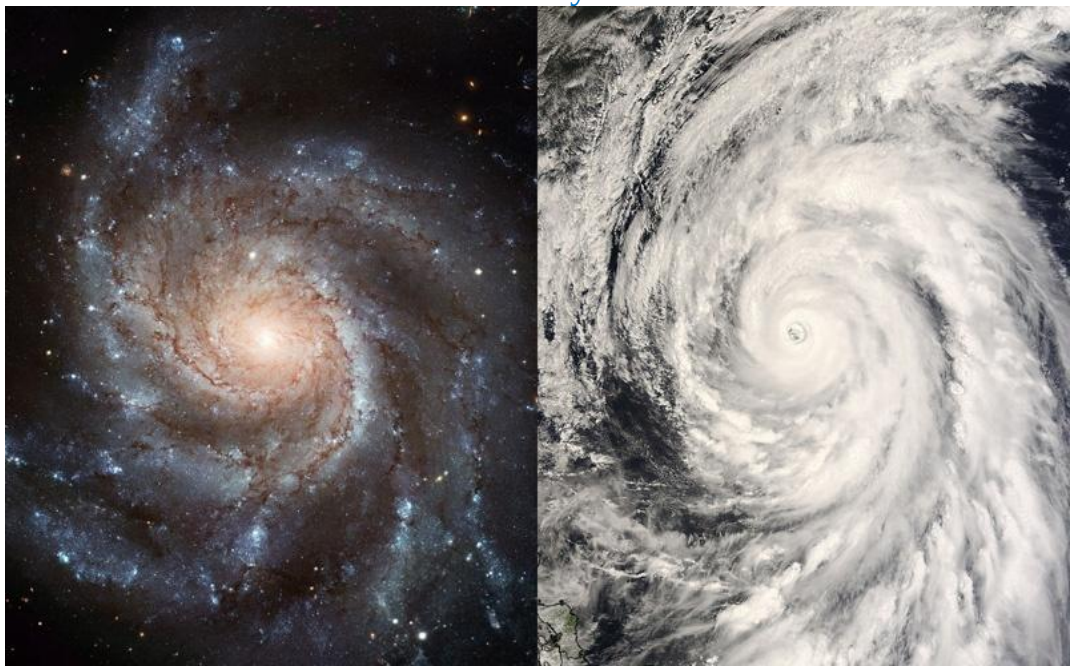
Aus der kosmischen Perspektive sieht die Form um einiges anschaulicher aus:

„Astronomy Picture of the Day

Discover the cosmos! Each day a different image or photograph of our fascinating universe is featured, along with a brief explanation written by a professional astronomer.

[779] Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 272 (286) f < URL >.

2008 May 17



Logarithmic Spirals

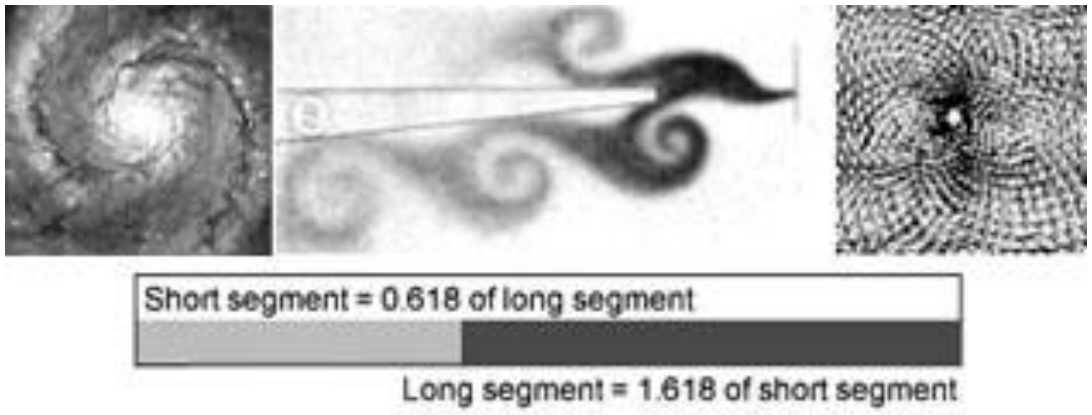
Image Credit: M101 - NASA, ESA, CFHT, NOAO; Typhoon Rammasun - MODIS, NASA
Comparison: Lawrence Anderson-Huang (Ritter Astrophysical Obs., Univ. Toledo)

Explanation: Uncomfortably close Typhoon Rammasun (right) and 25 million light-year distant galaxy M101 don't seem to have much in common. For starters, Rammasun was only a thousand kilometers or so across while M101 (aka the Pinwheel Galaxy) spans about 170,000 light-years, making them vastly dissimilar in scale, not to mention the different physical environments that control their formation and development. But they do look amazingly alike: each with arms exhibiting the shape of a simple and beautiful mathematical curve known as a logarithmic spiral, a spiral whose separation grows in a geometric way with increasing distance from the center. Also known as the equiangular spiral, growth spiral, and Bernoulli's spiral or spira mirabilis, this curve's rich properties have fascinated mathematicians since its discovery by 17th century

philosopher Descartes. Intriguingly, this abstract shape is much more abundant in nature than suggested by the striking visual comparison above. For example, logarithmic spirals can also describe the tracks of subatomic particles in a bubble chamber, the arrangement of sunflower seeds and, of course, cauliflower."[780]

„Fechner's experiment has been repeated with variations in methodology many times and occasionally his results have been supported. In general, the rectangle with the ratio of 21:34 was preferred, with the rectangles adjacent to this one in the picture being rated highly also. The ratio of 21:34 is the so called 'golden rectangle' because it's based on the golden ratio or 'divine proportion.' It's rectangle *D* above. Euclid defines the golden proportion as

A straight line is said to have been cut in extreme and mean ratio when, as the whole line is to the greater segment, so is the greater to the lesser.



Golden Section, Whirlpool Galaxy; Air Currents from Flue Organ, and Sunflower"[781]

[780] Nemiroff/Bonnell, Astronomy Picture of the Day, 2008 May 17, NASA Official: Phillip Newman, in: < URL >.
[781] Archie/Archie, Reading for Philosophical Inquiry: in: < URL >, Calandra, Chapter 3. The Nature of Philosophical Inquiry, in: < URL >.

„PART IV. SPIRA SOLARIS ARCHYTAS-MIRABILIS

A. THE FIBONACCI SERIES, PHI-SERIES AND SYNODIC MEAN

That the attested, ubiquitous, and long-revered constant ***Phi = 1.6180339887*5...** - ***The Golden Mean*** provides the underlying foundations for these exponential planetary functions should surprise no one. The value is known to occur in many diverse contexts that range from the structure of quasi-crystals,[3] Penrose Tiles,[4] the closely related Phi and Fibonacci series, growth functions, and even the structure of galaxies, our own barred-spiral galaxy, the Milky Way included, it would seem:

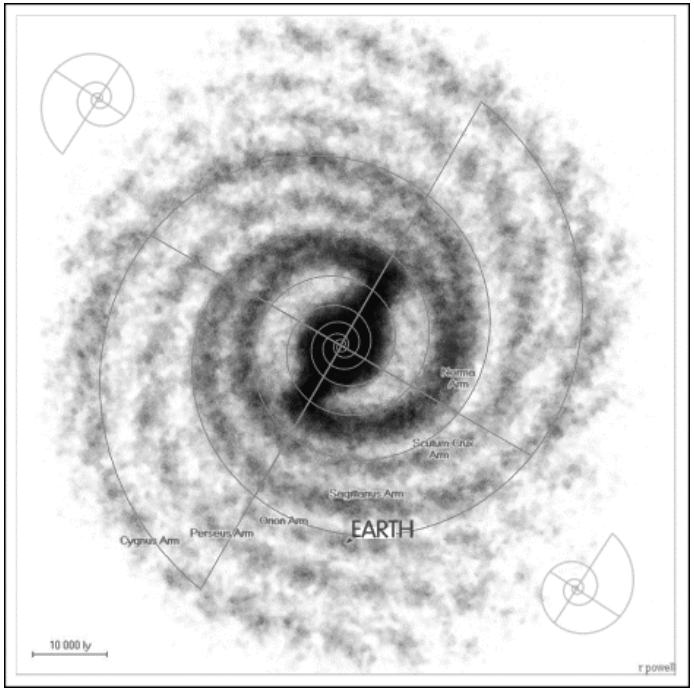


Figure 12. Double-formed* Spira Solaris and the plan-view of the Milky Way
[Milky Way Plan-view from: *www.anzwers.org*]

* **Double-formed** In a simplistic sense, the transition from two to three dimensions, i.e., the rotation of two-dimensional Spira Solaris through 180 degrees in both vertical and horizontal planes; the fourth dimension is time itself:-- TIME:- *'Eternal, Infinite, Young and Old, and of a Spiral Form.'* See *Part 4d2b*: 'Spira Solaris and the Three-Fold Number', and a *similar process* for 'Whirlpool' galaxy M51. For an 'explanation' concerning the 'first motions' and the 'first weights' attributed to the Milky Way in antiquity, see the above with accompanying text. Make of it what you will ...

In fact, in 1988, Timothy Ferris pointed out in ***Coming of Age in the Milky Way*** that:

The spiral patterns found inside the chambered nautilus,... are approximated by the Fibonacci Series, an arithmetic operation in which each succeeding unit is equal to the total of the preceding two (1,1,2,3,5,8,...). The ratio created by dividing any number in such a series by the number that follows it approached the value 0.618*. This, not incidentally, is the formula of the 'golden section,' a geometrical proportion that shows up in the Parthenon, the *Mona Lisa*, and Botticelli's *The Birth of Venus*, and is the basis of the octave employed in Western music since the time of Bach. All the fecund diversity of this particular symmetry, expressed in myriad ways from seashells and pine cones to the *Well-Tempered Clavier*, therefore derives from a single invariance, that of the Fibonacci Series. The realization that one abstract symmetry could have such diverse and fruitful manifestations occasioned delight among Renaissance scholars, who cited it as evidence of the efficacy of mathematics and of the subtlety of God's design. Yet it was only the beginning. Many other abstract symmetries have since been identified in nature - some intact and some 'broken,' or 'flawed,' - and their effects appear to extend to the very bedrock foundations of matter and energy.
(For an up-to-date, in-depth treatment of this complex topic see: *THE GOLDEN RATIO: The Story of Phi, the World's Most astonishing Number*, by Mario Livio (Broadway Books, New York, 2002)[6]
The last sentence is especially germane in the present astronomical context, but Ferris touches on an additional point of relevance when he cites the relationship between the historical Golden Section, growth functions, and the Fibonacci Series. Expressed in its simplest theoretical form, the exponential planetary framework is essentially the ***phi-series*** itself, employing incremental multipliers that are dual additive combinations of the Fibonacci series, i.e.,

PLANETS Synodics	Periods (Actual)	Periods (Mt2)	Periods (Mt3)	Periods (Phi)	Exp (Ø)	X Factors	Phi-Series Decomposition
MERCURY	**0.240843**	**0.240843**	**0.239564**	**0.236068**	**-3**	1	$Ø^0 = -1Ø + 1Ø^2$
Synodic	0.395794	0.389692	0.387623	0.381966	**-2**	**1.618034**	$Ø^1 = 1Ø + 0Ø^2$
VENUS	0.615186	0.630534	0.627187	0.618034	**-1**	2.618034	$Ø^2 = 0Ø + 1Ø^2$
Earth/Synodic	0.914226	1.020226	1.014810	1.000000	**0**	4.236068	$Ø^3 = 1Ø + 1Ø^2$
MARS	1.880751	1.650760	1.641996	1.618034	**1**	6.854102	$Ø^4 = 1Ø + 2Ø^2$
Synodic	3.124532	2.670986	2.656806	2.618034	**2**	11.090170	$Ø^5 = 2Ø + 3Ø^2$
AST. MEAN	4.724682	4.321746	4.298802	4.236068	**3**	17.944272	$Ø^6 = 3Ø + 5Ø^2$
Synodic	7.849214	6.992732	6.955608	6.854102	**4**	29.034442	$Ø^7 = 5Ø + 8Ø^2$
JUPITER	11.86899	11.31448	11.25441	11.09017	**5**	46.978714	$Ø^8 = 8Ø + 13Ø^2$
Synodic	19.92533	18.30721	18.21002	17.94427	**6**	76.013156	$Ø^9 = 13Ø + 21Ø^2$
SATURN	29.35497	29.62168	29.46443	29.03444	**7**	122.991869	$Ø^{10} = 21Ø + 34Ø^2$
Synodic	45.16339	47.92889	47.67445	46.97871	**8**	199.005024	$Ø^{11} = 34Ø + 55Ø^2$
URANUS	83.86479	77.55058	77.13888	76.01315	**9**	321.996894	$Ø^{12} = 55Ø + 89Ø^2$
Synodic	126.6410	125.4794	124.8133	122.9918	**10**	521.001919	$Ø^{13} = 89Ø + 144Ø^2$
NEP/PLUTO	248.2858	203.0301	201.9522	199.0050	**11**	842.998814	$Ø^{14} = 144Ø + 377Ø^2$

Table 3a. The Solar System Exponential Periods and the Phi-Series Multipliers

PLANETS Synodics	Periods (Actual)	Periods (Mt2)	Periods (Mt3)	Periods (Phi)	Exp (Ø)	X Factors	Phi-Series Decomposition
MARS	**1.880751**	1.650760	1.641996	1.618034	**1**	6.854102	$Ø^4 = 1Ø + 2Ø^2$
Synodic	2.234889	2.670986	2.656806	**1.894427**	**'4/3'**	8.024921	**($Ø^{4/3}$ = 1.899457)**
JUPITER	11.86899	11.31448	11.25441	11.09017	**5**	46.978714	$Ø^8 = 8Ø + 13Ø^2$

Table 3b. The Solar system, Exponential Periods and the Mars-Jupiter Gap

Table 3b. The Solar System, Exponential Periods and the Mars-Jupiter Gap

As seen in ***Table 3b,*** the geometric mean of the exponents '**1**' and '**5**' is the square root of ***5*** = ***2.23606278***, whereas the synodic period between Mars and Jupiter is ***2.23488994***, i.e., a difference of 0.053 percent, but then there is far more to the ***phi-series*** in the present astronomical context in any case, as will be demonstrated in the following sections."[782]

Schon früher widmete man Aufmerksamkeit der Frage, dass die Planeten bzw. das Planetensystem ein Ausdruck des Goldenen Schnitts sei[783]. Es erscheint daher folgerichtig, wenn nun auch andere Rotationskörper im Raum einem analogen oder dem gleichen Gesetz folgen.

[782] Harris, John N.: A. THE FIBONACCI SERIES, PHI-SERIES AND SYNODIC MEAN, in: < URL >.
[783] Pfeifer 76 ff.

Die Folge $p^n - 1$

Auch höhere Potentenzen lassen sich auf $p^2 - 1 = 24n$ analog anwenden: Die Folge $p^3 = p(24n + 1)$

$P^3 = 24np + p$
$P^3 - p = 24pn$

Wenn p eine Primzahl und und $p \equiv 2$ (mod. 3) ist, ist jede nicht durch p teilbare Zahl kubischer Rest und mod. P^3. Zu jeder Zahl a gibt es ein γ derart, das $a - \gamma^3$ modulo 96 einen der Reste 6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 66, 78, 84 lässt[784].

Schon im 15. Jahrhundert gab es in Indien die Folge[785]

$$\pi = 3 + \frac{4}{3^3 - 3} - \frac{4}{5^3 - 5} + \frac{4}{7^3 - 7} - \frac{4}{9^3 - 9} + \cdots$$

die analog ist der Folge[786]

$$\pi \approx 2 + \frac{4}{2^2 - 1} - \frac{4}{4^2 - 1} + \frac{4}{6^2 - 1} - \frac{4}{8^2 - 1} + \cdots \mp \frac{4}{p^2 - 1} \mp \frac{4}{2(p+1)^2 + 4}$$

$n = (p^2 - p)/24p = p(p - 1)/24p = (p - 1)/24 = (p - 1)/4 \cdot 6 = (1/4)(p - 1)/6$

[784] Landau I 555 f.
[785] Arndt/Haenel 179.
[786] Arndt/Haenel 214.

$5^3 = 125 = 120 + 5 = 5 \cdot 24 + 5 = 5(24 + 1)$
$7^3 = 343 = 336 + 7 = 2 \cdot 24 \cdot 7 + 7 = 7(24 \cdot 2 + 1)$
$11^3 = 1331 = 1320 + 11 = 5 \cdot 24 \cdot 11 + 11 = 11(24 \cdot 5 + 1)$
$13^3 = 2197 = 2184 + 13 = 7 \cdot 24 \cdot 13 + 13 = 13(24 \cdot 7 + 1)$
$17^3 = 4913 = 4896 + 17 = 12 \cdot 24 \cdot 17 + 17 = 17(24 \cdot 12 + 1)$
$19^3 = 6859 = 6840 + 19 = 15 \cdot 24 \cdot 19 + 19 = 19(24 \cdot 15 + 1)$
$23^3 = 12167 = 12144 + 23 = 22 \cdot 24 \cdot 23 + 23 = 23(24 \cdot 22 + 1)$
$29^3 = 24389 = 24360 + 29 = 35 \cdot 24 \cdot 29 + 29 = 29(24 \cdot 35 + 1)$
$31^3 = 29791 = 29760 + 31 = 40 \cdot 24 \cdot 31 + 31 = 31(24 \cdot 40 + 1)$
$37^3 = 50653 = 50616 + 37 = 57 \cdot 24 \cdot 37 + 37 = 37(24 \cdot 57 + 1)$
$41^3 = 68921 = 68880 + 41 = 70 \cdot 24 \cdot 41 + 41 = 41(24 \cdot 70 + 1)$
$43^3 = 79507 = 79464 + 43 = 77 \cdot 24 \cdot 43 + 43 = 43(24 \cdot 77 + 1)$
$47^3 = 103823 = 103776 + 47 = 92 \cdot 24 \cdot 47 + 47 = 47(24 \cdot 92 + 1)$
$53^3 = 148877 = 1488824 + 53 = 117 \cdot 24 \cdot 53 + 53 = 53(24 \cdot 117 + 1)$
$59^3 = 205379 = 205320 + 59 = 145 \cdot 24 \cdot 59 + 59 = 59(24 \cdot 145 + 1)$
$61^3 = 226981 = 226920 = 155 \cdot 24 \cdot 61 + 61 = 61(24 \cdot 155 + 1)$
…

$P^5 = p(24n + 1)$

$P^5 = (240np) + p$
$11^5 = 161051 - 11 + 11 = 161040 + 11 = 671 \cdot 240 + 11 = 61 \cdot 11 \cdot 240 + 11$
13^5
17^5
19^5
23^5

…

$P^7 = p(24n + 1)$

$11^7 = 19487171 - 11 + 11 = 19487160 + 11 = 120 \cdot 162393 + 11 = 120 \cdot 11 \cdot 14763 + 11 =$
…

$P^9 = p(24n + 1)$

$11^9 = 235794680 + 11 = 240 \cdot 9824782 + 11 = 240 \cdot 11 \cdot 893162 + 11 =$
…

Bei den Primzahlpotenzen gibt es gewisse Fortschritte:

„Eine Primzahl $p > 2$ lässt sich genau dann in der Form $a^2 + b^2$ mit ganzen Zahlen a,b schreiben, wenn p die Form $4k + 1$ hat. In diesem Fall ist die Darstellung im Wesentlichen eindeutig, d.h. bis auf Reihenfolge und Vorzeichen von a,b. Diese Darstellung entspricht der Primfaktorzerlegung

$$p = (a + bi)(a - bi)$$

im Ring der ganzen gaußschen Zahlen.

Die Zahl −1 ist ein quadratischer Rest modulo jeder Primzahl der Form $4k + 1$ und quadratischer Nichtrest modulo jeder Primzahl der Form $4k + 3$.

Der kleine Satz von Fermat

Es sei p eine Primzahl. Für jede ganze Zahl a, die nicht durch p teilbar ist, gilt (für die Notation *siehe* Kongruenz):

$$a^{p-1} \equiv a \bmod p.$$

Eine äquivalente Formulierung lautet: Für jede ganze Zahl a gilt

$$a^{p} \equiv a \bmod p.$$

Es gibt Zahlen, die keine Primzahlen sind, sich aber dennoch zu einem Teil der Basen a wie Primzahlen verhalten und somit den kleinen Satz von Fermat erfüllen. Solche Nichtprimzahlen nennt man fermatsche Pseudoprimzahlen. Pseudoprimzahlen, die pseudoprim zu allen Basen a sind, welche nicht Teiler dieser Pseudoprimzahlen sind, nennt man Carmichael-Zahlen.

Besonders in diesem Zusammenhang zeigt sich die Problematik von Pseudoprimzahlen: Sie werden von Algorithmen, die den kleinen Satz von Fermat nutzen, um festzustellen, ob eine bestimmte Zahl prim ist, fälschlicherweise für Primzahlen gehalten. Wenn allerdings ein Verschlüsselungsverfahren wie RSA eine zusammengesetzte Zahl statt einer Primzahl verwendet, ist die Verschlüsselung nicht mehr sicher. Deshalb müssen bei solchen Verfahren Primzahltests verwendet werden, die mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit Primzahlen von zusammengesetzten Zahlen unterscheiden können. Diese Wahrscheinlichkeit ist bei Verwendung des kleinen Satzes von Fermat als Basis allein nicht hoch genug, es gibt aber sicherere Primzahltests.

Euler und das Legendre-Symbol

Eine einfache Folge aus dem kleinen Satz von Fermat ist die folgende Aussage: Für jede ungerade Primzahl p und jede ganze Zahl a, die nicht durch p teilbar ist, gilt entweder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$$

oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$$

Man kann zeigen, dass der erste Fall genau dann eintritt, wenn es eine Quadratzahl m^2 gibt, die kongruent zu *a* modulo *p* ist, *siehe* Legendre-Symbol.

Binomialkoeffizient

Für Primzahlen *p* und $1 \leq k \leq -1$ gilt

$$p \left| \binom{p}{k} \right.;$$

zusammen mit dem binomischen Satz folgt daraus

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \; mod \; p$$

Für ganze Zahlen *a*,*b* folgt diese Aussage auch direkt aus dem kleinen fermatschen Satz, aber sie ist beispielsweise auch für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten anwendbar; im allgemeinen Kontext entspricht sie der Tatsache, dass die Abbildung $x \longmapsto x^p$ in Ringen der Charakteristik *p* ein Homomorphismus ist, der so genannte Frobenius-Homomorphismus.

Aus dem Satz von Wilson (*p* ist genau dann eine Primzahl, wenn $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ ist) folgt, dass für jede Primzahl *p* und jede natürliche Zahl *n* die Kongruenz

$$\binom{np-1}{p-1} \equiv 1 \; (mod \; p)$$

erfüllt ist.

Charles Babbage bewies 1819, dass für jede Primzahl $p > 2$ diese Kongruenz gilt:

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \; (mod \; p^2)$$

Der Mathematiker Joseph Wolstenholme (1829–1891) bewies dann 1862, dass für jede Primzahl $p > 3$ die folgende Kongruenz gilt:

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p^3)$$

Giuga

Aus dem kleinen Satz von Fermat folgt, dass für eine Primzahl p gilt:

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots (p-1)^{p-1} \equiv -1 \ (mod\ p)$$

Beispiel $p = 5$:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 1 + 16 + 81 + 256 = 354 = 71 \cdot 5 - 1 \equiv -1 \ (mod\ 5)$$

Giuseppe Giuga vermutete, dass auch die umgekehrte Schlussrichtung gilt, dass also eine Zahl mit dieser Eigenschaft stets prim ist. Es ist nicht geklärt, ob diese Vermutung richtig ist. Bekannt ist aber, dass ein Gegenbeispiel mehr als 10.000 Dezimalstellen haben müsste. Im Zusammenhang mit Giugas Vermutung werden die Giuga-Zahlen untersucht.

Lineare Rekursionen

Den kleinen fermatschen Satz kann man auch in der Form lesen: In der Folge $a^n - a$ ist das p-te Folgenglied für eine Primzahl p stets durch p teilbar. Ähnliche Eigenschaften besitzen auch andere Folgen von exponentiellem Charakter, wie die Lucas-Folge $\left(p|L_p - 1\right)$ und die Perrin-Folge $\left(p|P_p\right)$. Für andere lineare Rekursionen gelten analoge, aber kompliziertere Aussagen, beispielsweise für die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n=0,1,2\ldots} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$: Ist p eine Primzahl, so ist $f_p - \left(\frac{p}{5}\right)$ durch p teilbar; dabei ist

$$\left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1,4 \quad mod\ 5 \\ -1 & p \equiv 2,3 \quad mod\ 5 \\ 0 & p \equiv 5 \end{cases}$$

das Legendre-Symbol.

Divergenz der Summe der Kehrwerte

Die Folge der Summe der Kehrwerte der Primzahlen bis hin zu einer bestimmten Primzahl p_n $\left(a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}\right)$ hat keinen Grenzwert. Das bedeutet, für ein genügend großes *n* lässt sich jede erdenkliche reelle Zahl übertreffen. Dies ist zunächst einmal verblüffend, da die Primzahllücken im Schnitt immer weiter zunehmen.

Weiteres

Zwei natürliche Zahlen, deren Summe eine Primzahl ergibt, sind immer teilerfremd. Umgekehrt zeigt jedoch das einfache Gegenbeispiel 3 + 5 = 8, dass die Summe zweier teilerfremder Zahlen nicht zwingend eine Primzahl ergibt.

Primzahltests

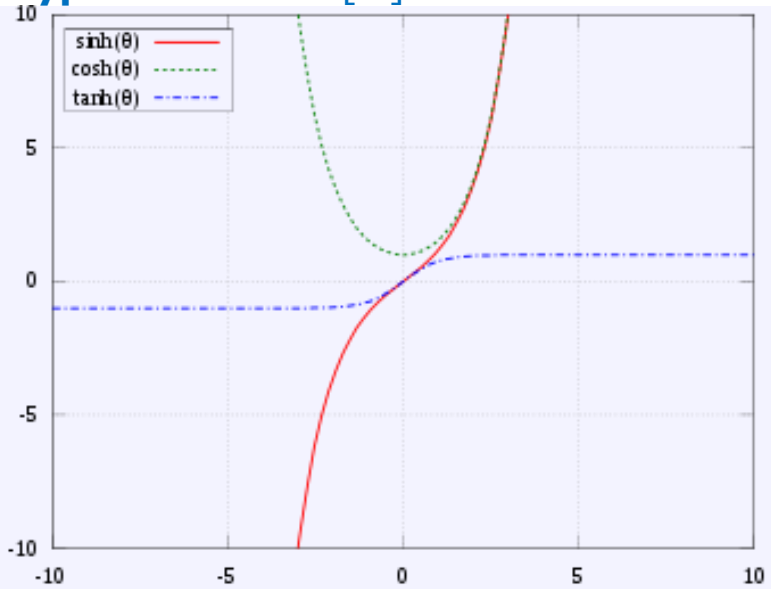
→ *Hauptartikel:* Primzahltest

Ob eine Zahl eine Primzahl ist, kann man mit einem Primzahltest entscheiden. Es gibt mehrere solcher Verfahren, deren Grundlagen meist besondere Eigenschaften von Primzahlen sind. In der Praxis wird der Miller-Rabin-Test am häufigsten verwendet, der eine extrem kurze Laufzeit hat, allerdings mit kleiner Wahrscheinlichkeit falsch-positive Ergebnisse liefert. Mit dem AKS-Primzahltest ist es möglich, Zahlen in polynomialer Laufzeit zu testen. Allerdings ist er in der Praxis deutlich langsamer als der Miller-Rabin-Test."[787]

[787] Wikipedia, Primzahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 58156822, Bearbeitungsstand: 21. März 2009 < URL >.

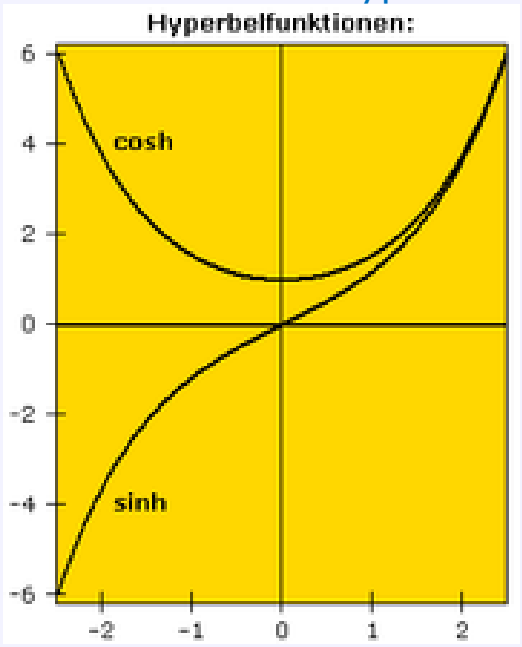
Die Folge $(e^n \pm e^{-n})/2$

Mit höheren Potenzen kann die Fibonacci-Folge rechnen[788]. Es kommt daher die Überleitung der negativen Form der Primzahlformel von Euler $x^2 - x - 1 = 0$ in die Fibonacci-Folge zentrale Bedeutung zu[789]. Der nämliche Übergang zeigt sich nicht nur in der Rechnung, sondern auch in der mathematischen Funktion: Der „**Sekans Hyperbolicus**[790] […]



[788] Ostermann 93 ff.
[789] Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f.
[790] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.

… und Kosekans Hyperbolicus (rot)“[791] …



bilden mit Tangens Hyperbolicus (blau) exakt die Funktion der Fibonacci-Folge nach[792], bzw. deren „Dämpfungskurve“[793]. Noch auffälliger ist die Ähnlichkeit zur Lucas-Folge:

„Fibonacci and Lucas numbers are determined from the symmetric Fibonacci and Lucas functions (18)-(21) by the following substitutions:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n), for\ n = 2k \\ \\ cFn(n), for\ n = 2k+1; \end{cases} \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n), for\ n = 2k \\ \\ sLs(n), for\ n = 2k+1. \end{cases} \quad (22)$$

[791] Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >.
[792] Wikipedia, Hyperbelfunktion, in: < URL >; Lang/Pucker 600 Abb. B.7.
[793] Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 31 Abbildung 14.1.

The authors refer to the functions defined by (18)-(21), as the *symmetrical representation*.

It is easy to construct graphs of the symmetrical Fibonacci and Lucas functions (Fig. 1, 2).

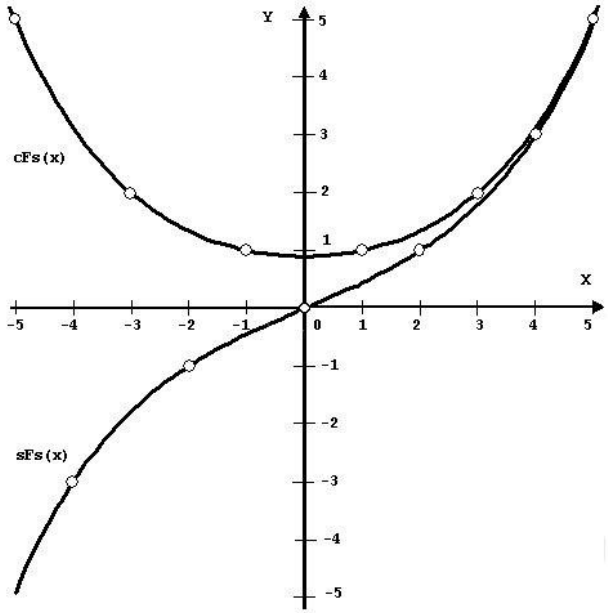


Figure 1. The symmetric Fibonacci functions

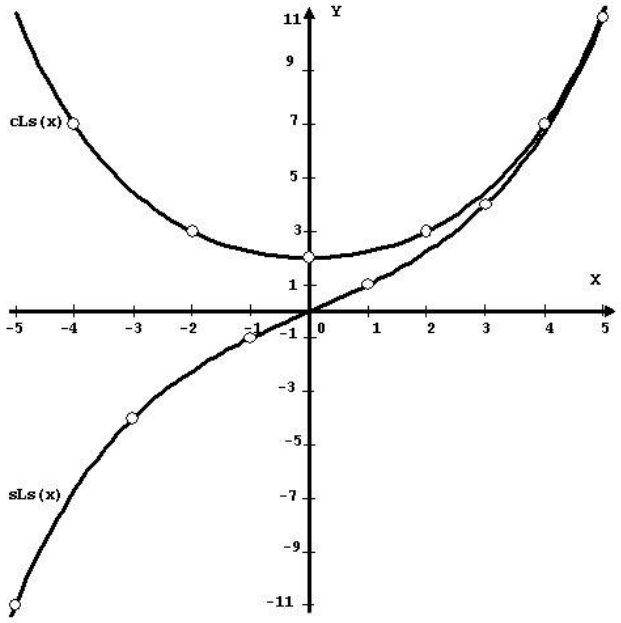


Figure 2. The symmetric Lucas functions

Their graphs have a symmetric form and are similar to the graphs of the classical hyperbolic functions. However, at the point x=0, the symmetric Fibonacci cosine $cFs(x)$ takes the value

$$cFs(0) = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

while the symmetric Lucas cosine $cLs(x)$ takes the value $cLs(0) = 2$. It is also important tonote that the Fibonacci numbers $F_{n,}$ with even indices, are values of the symmetric Fibonacci sine, $sFs(x)$, at even integer values of x and the Fibonacci numbers, with odd indices, are values of the symmetric Fibonacci cosine, $cFs(x)$, at odd integer values of x. On the other hand, Lucas numbers with the even indices, are values of the symmetric Lucas cosine $cLs(x)$ at the even integers, and the Lucas numbers, with the odd indices, are values of the symmetric Lucas cosine $sLs(x)$ at the odd integers."[794]

Dort findet sich auch einleitend in diesem Zusammenhang die Formel $x^2 = x + 1$, die man in $x^2 - x - 1 = 0$ umschreiben kann[795], und die zwei Wurzel hat: „Equation (1) has two roots. Its positive root

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

is called *golden proportion, golden mean, or golden ratio.*"[796] Von hier aus wird die Berechnung der Fibonacci-Folge[797] als Kurve anhand der Gegenüberstellung mit der Lucas-Folge[798] abgeleitet:

„Hyperbolic Fibonacci and Lucas functions

3.1. Stakhov and Tkachenko's approach

[794] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[795] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[796] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[797] Wikipedia, Primzahl, In: Wikipedia, Versions-ID: 58156822, Bearbeitungsstand: 21. März 2009 < URL >: „Den kleinen fermatschen Satz kann man auch in der Form lesen: In der Folge $a^n - a$ ist das p-te Folgenglied für eine Primzahl p stets durch p teilbar. Ähnliche Eigenschaften besitzen auch andere Folgen von exponentiellem Charakter, wie die Lucas-Folge $(p|L_p - 1)$ und die Perrin-Folge $(p|P_p)$. Für andere lineare Rekursionen gelten analoge, aber kompliziertere Aussagen, beispielsweise für die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n=0,1,2\ldots} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$"
[798] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.

If we compare Binet formulas (9) and (10) to the classical hyperbolic functions

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (11)$$

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (12)$$

wwe notice a similarity.

In [4], the discrete variable *k* in formulas (9) and (10) was replaced with the continuous variable *x* that takes its values from the set of real numbers. Consequently, the following continuous functions, which are called *the hyperbolic Fibonacci and the Lucas functions*, were introduced:

The hyperbolic Fibonacci sine

$$sF(x) = \frac{\tau^{2x} - \tau^{-2x}}{\sqrt{5}} \quad (13)$$

The hyperbolic Fibonacci cosine

$$cF(x) = \frac{\tau^{2x+1} - \tau^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}} \quad (14)$$

The hyperbolic Lucas sine

$$aL(x) = \tau^{2x+1} - \tau^{-(2x+1)} \quad (15)$$

The hyperbolic Lucas cosine

$$cL(x) = \tau^{2x} + \tau^{-2x} \quad (16)$$

The connection between Fibonacci (F_n) and Lucas (L_n) numbers and the hyperbolic Fibonacci and the Lucas functions (13)-(16) is given by the following identities:

$$sF(k) = F_{2k};\ cF(k) = F_{2k+1};\ sL(k) = L_{2k+1};\ cL(k) = L_{2k}\ , (17)$$

where k is an arbitrary integer."[799]

Der gleiche Zusammenhang, wie wir das bei der Riemannsche Zeta-Funktion[800] gesehen haben, wird nun für die Fibonacci-Funktion gezeigt:

„If we compare Binet formulas (9) and (10) to the classical hyperbolic functions

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, (11)$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. (12)$$

wwe notice a similarity."[801] Danach wird die Hyperbel als die Dämpfungskurve der Fibonacci-Folge gezeigt, als Überleitung zur Spirale: „The graph of the quasi-sine Fibonacci function passes through all points of the

[799] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[800] Trost 62 ff.

coordinate plane corresponding to the Fibonacci numbers (see Fig.3). The symmetric hyperbolic Fibonacci functions (19) and (20) (Fig. 1) are the envelopes of the quasi-sine Fibonacci function .

Also the quasi-sine Fibonacci function has recursive properties similar to Fibonacci numbers [7].

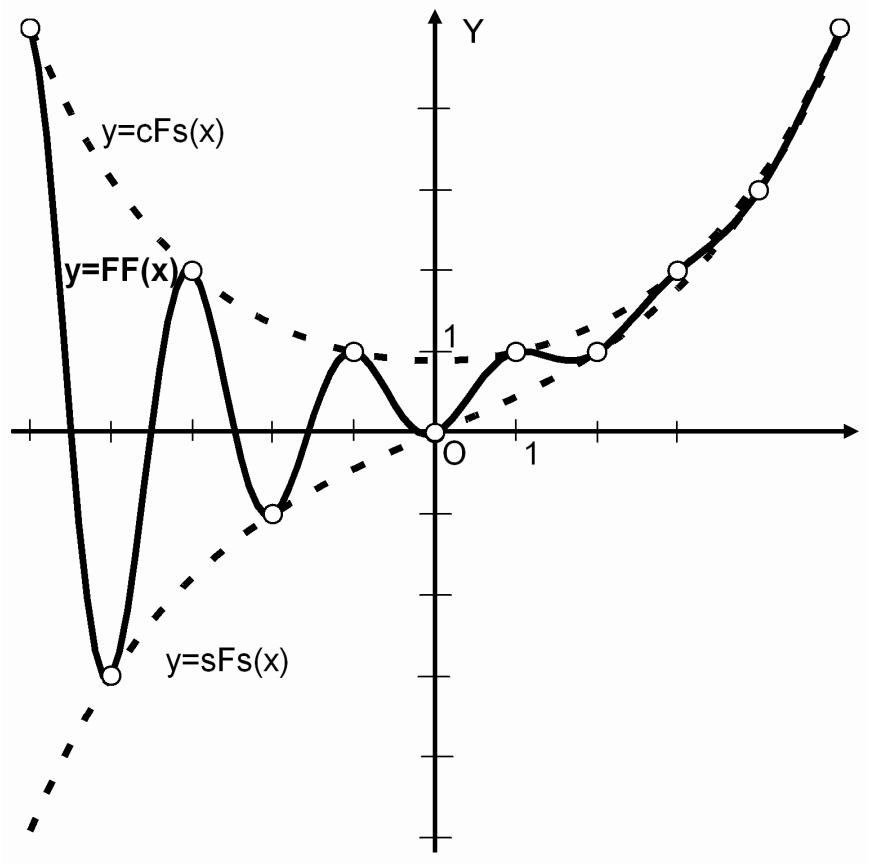


Figure 3. The graph of the quasi-sine Fibonacci function

[801] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.

4.2. The three-dimensional Fibonacci spiral

It is well known that the trigonometric sine and cosine can be defined as projection of the translational movement of a point on the surface of an infinite rotating cylinder with the radius 1, whose symmetry center coincides with *x*-axis. Such a three-dimensional spiral is projected into the sine function on a plane and described by the complex function

$$f(x) = \cos(x) + i\sin(x), \text{ where } i = \sqrt{-1}.$$

If we assume that the quasi-sine Fibonacci function (32) is a projection of a three-dimensional spiral on some funnel-shaped surface, then analogous to the trigonometric sine, it is possible to construct a *three-dimensional Fibonacci spiral.*"[802]

Die eher unübliche dreidimensionale Darstellung der Spirale[803] zeigt anschaulich, warum die dreidimensionale Darstellung gewählt wurde:

„*Definition 2.* The following function is a complex representation of *the three-dimensional Fibonacci spiral*:

$$CFF(x) = \frac{\tau^x - \cos(\pi x)\,\tau^{-x}}{\sqrt{5}} + i\frac{\sin(\pi x)\tau^{-x}}{\sqrt{5}}. \quad (34)$$

This function, by its shape, resembles a spiral that is drawn on the crater with a bent end (Fig. 4).

[802] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[803] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.

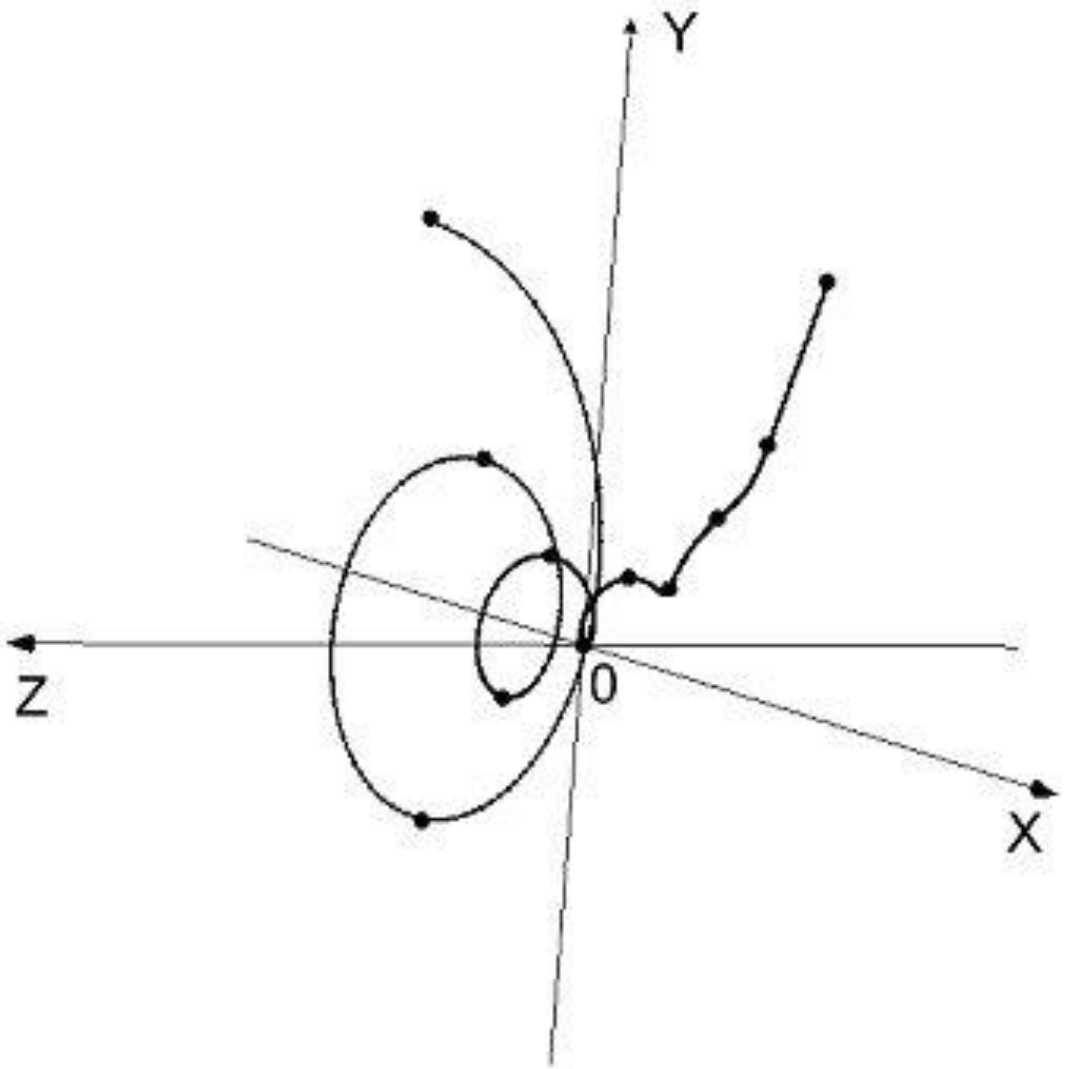


Figure 4. The three-dimensional Fibonacci spiral

4.3 The Golden Shofar

Consider real and imaginary parts in the complex Fibonacci spiral:

$$Re[CFF(x)] = \frac{\tau^x - \cos(\pi x)\ \tau^{-x}}{\sqrt{5}}; (35)$$

$$Im[CFF(x)] = \frac{\sin(\pi x)\,\tau^{-x}}{\sqrt{5}}. (36)$$

Designating the real part by $y(x)$ and the imaginary part by $z(x)$, we can get the following system of equations:

$$y(x) - \frac{\alpha^x}{\sqrt{5}} = -\frac{\cos(\pi x)\ \alpha^{-x}}{\sqrt{5}}, (37)$$

$$z(x) = \frac{\sin(\pi x)\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}.$$

Square both expressions of system (37) and add them, taking y and z as independent variables, to get the following curvilinear surface.

Definition 3. The three-dimensional curved surface given by,

$$\left(y - \frac{\tau^x}{\sqrt{5}}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{\tau^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2. (38)$$

is called *the Golden Shofar* and shown in Fig. 5.

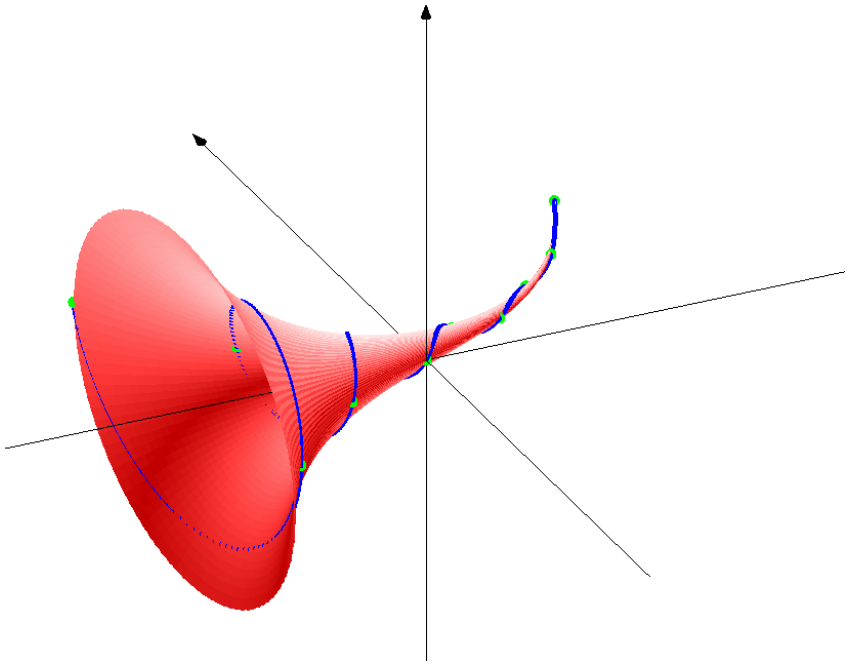


Figure 5. The Golden Shofar

The Golden Shofar looks like a horn or crater with its narrow end bent up. Translating from the Hebrew language, the word ‚Shofar' means a horn that is a symbol of power or might. The Shofar is blown on The Judgment Day (the Jewish New Year) and the Day of Atonement (the Yom Kippur).

Formula (38) for the Golden Shofar can also be represented in the form:

$$z^2 = [cFs(x) - y][sFs(x) + y], \quad (39)$$

where $sFs(x)$ and $cFs(x)$ are the symmetric hyperbolic Fibonacci functions (20) and (21) respectively.

4. A general model of the hyperbolic space with a ‘shofarable’ topology

Based on experimental data obtained in 2003 by the NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), a new hypothesis about the structure of the Universe was developed. According to [28], the geometry of the Universe is similar in shape to a horn or a pipe with an extended bell [27]. As a result of this disclosure we make the following claim:

The Universe has a ‘shofarable’ topology as shown in Fig.6.

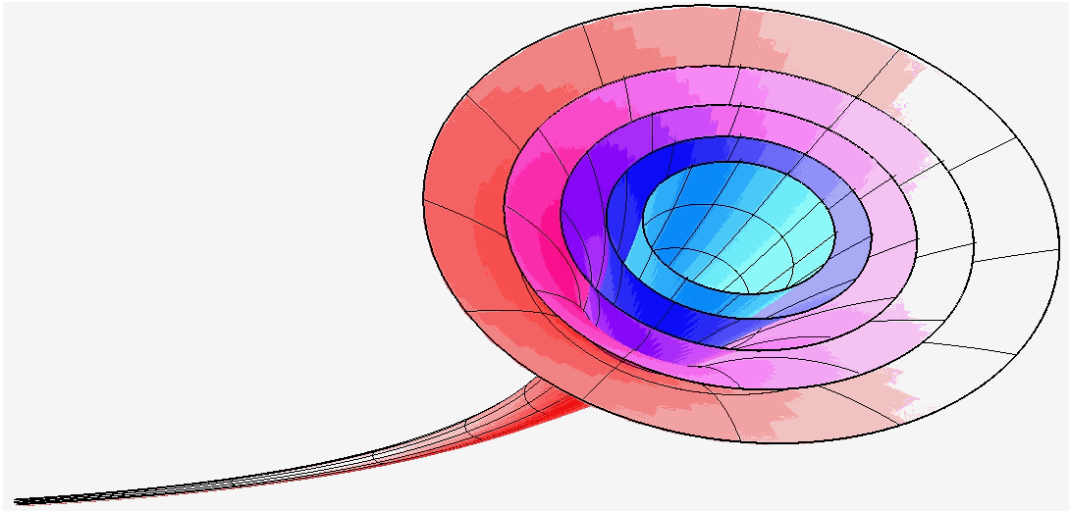


Figure 6. The ‘shofarable’ topology“[804]

Abgerundet wir die bildliche Darstellung mit der eingangs zitierten Formel $x = x + 1$ Potenzfolge $x^{p+1} = x^p + 1$:

[804] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.

„*6.2.The golden p-proportions and the 'golden' algebraic equations*

It is well known that the ratios of adjacent Fibonacci numbers F_n/F_{n-1} approach the golden mean in a limiting sense. We have also shown that the ratio of adjacent Fibonacci *p*-numbers $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ approaches in the limit some positive number τ_p that is a positive root of the polynomial equation [8]

$$x^{p+1} = x^p + 1, \quad (45)$$

where p=0, 1, 2, 3, … .

The numbers τ_p are referred to as *golden p-proportions* since for the case p=1 the number τ_p coincides with the classical Golden Proportion. We call Equation (45) the golden algebraic equation because for the case p=1 Equation (45) reduces to Equation (1) [9]"[805].

Damit wären wir in die Nähe der Riemannschen Zetafunktion[806] gerückt uns können statt $x^{p+1} = x^p + 1$ die negative Form $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ oder $x^{p+1} - x^p = 1$ schreiben.

Die Verbindung der Fibonacci-Folge mit der Hyperbelfunktion der Eulerschen Identität[807] über Analogie zur Lucas-Folge ist in unserem Zusammenhang von Bedeutung, weil die Lucas-Folge zum Thema Primzahlen gehört[808]:

„Die allgemeine Lucas-Folgen $U_n(P,Q)$, $V_n(P,Q)$ und die Primzahlen

[805] Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[806] Trost 62 ff.
[807] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[808] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.

Die Allgemeinen Lucas-Folgen *U(P,Q)* und *V(P,Q)* haben für ganzzahlige Parameter *P* und *Q* eine spezielle Eigenschaft hinsichtlich der Teilbarkeit durch Primzahlen. Diese Eigenschaft wurde bei bestimmten Verfahren zur Bestimmung der Primalität einer Zahl angewandt. Leider waren diese Verfahren für bestimmte Arten von Pseudoprimzahlen anfällig.

U(P,Q)

Für alle Lucas-Folgen $U_n(P,Q) = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ gilt:
Ist p eine Primzahl, so ist $U_n(P,Q) - \left(\frac{D}{p}\right)$ durch p teilbar.
Dabei ist $\left(\frac{D}{p}\right)$ das Legendre-Symbol.
Es existieren auch zusammengesetzte Zahlen, die diese Bedingung erfüllen. Diese Zahlen nennt man Lucas-Pseudoprimzahlen.

V(P,Q)

Für alle Lucas-Folgen $N_n(P,Q) = a^n + b^n$ gilt: wenn $n$eine Primzahl ist, dann ist ($V_n(P,Q) – P$) durch $n$teilbar. Oder, anders ausgedrückt:

$V_n(P,Q) \equiv P \bmod n$

für alle n, die Primzahlen sind. Zusammengesetzte Zahlen die diese Bedingung erfüllen, mit der Einschränkung das Ppositiv und Qentweder 1 oder -1 ist, nennt man Fibonacci-Pseudoprimzahlen.

Der kleine Fermatsche Satz

Besonders interessant ist dies für die Folge $V_n(3,2) = a^n + b^n = 2^n + 1$. Für diese Folge gilt nämlich:

Wenn *n* eine Primzahl ist, dann gilt: *n* teilt $2^n + 1 - 3 = 2^n - 2$.

Dies ist eine spezielle Form des kleinen Fermatschen Satz.

Analog zu $a^p \equiv a \bmod p$ gilt also $V_p(a + 1,a) \equiv V_1(a + 1,a) \bmod p$

Anwendungen der allgemeinen Lucas-Folgen

Die allgemeinen Lucas-Folgen spielen in der Zahlentheorie und der Kryptographie eine Rolle.
Siehe auch: Lucas-Lehmer-Test, Lucassche Pseudoprimzahl, Fibonacci-Folge, Jacobsthal-Folge, Pell-Folge

Die spezielle Lucas-Folge

Die allgemein als Lucas-Folge bekannte Folge L_n der Lucas-Zahlen 2 1 3 4 7 11 18 29 ... lässt sich auf unterschiedlichste Art und Weise erzeugen:

Über die Formel von Binet (nach Jacques Philippe Marie Binet):

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

die sich aus der allgemeinen Lucas-Folge $L_n = V_n(-1,1) = a^n + b^n$ mit $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ableiten lässt

Über die rekursive Formel, die der rekursiven Formel für die Fibonacci-Folge gleicht:

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ mit den Anfangswerten $L_0 = 2$ und $L_1 = 1$

Über eine Potenz des goldenen Schnitt:

$$L_n = \Phi^n + \Psi^n$$

Eine andere rekursive Formel:

$$L_{n+1} = \left[\frac{L_n\left(1+\sqrt{5}\right)+1}{2}\right]$$

Als Summe zweier Glieder der Fibonacci-Folge:

$$L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$$

Siehe auch

lineare Differenzengleichung

Literatur

Paulo Ribenboim: *The new Book of Primenumber Records*, ISBN 0-387-94457-5.
Paulo Ribenboim: *My Numbers, my Friends*, ISBN 0-387-98911-0. "[809]

Die Lucas-Folge kommt mit der allgemeinen Formel

$$U_n(P,Q) = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

in die Nähe der Riemannschen Zetafunktion[810]: Für die Folge $V_n(3,2) = a^n + b^n = 2^n + 1$ gilt: Wenn *n* eine Primzahl ist, dann teilt *n* die Formel $2^n + 1 - 3 = 2^n - 2$. Dies ist eine spezielle Form des kleinen

[809] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.

Fermatschen Satzes. Analog zu $a^p \equiv a \bmod p$ gilt also $V_p(a + 1,a) \equiv V_1(a + 1,a) \bmod p$. Die spezielle Form der Lucas-Folge ist wiederum ganz in der Nähe der Fibonacci-Folge:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

und lässt sich aus der allgemeinen Lucas-Folge $L_n = V_n(-1,1) = a^n + b^n$ mit

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; und \; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ableiten[811]. Bei der Riemannschen Zetafunktion[812] als vermuteter Lösungsansatz des Primzahlsatzes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

zeigt die Funktionen[813] des Sekans Hyperbolicus (sech) und Kosekans Hyperbolikus (csch) mit:

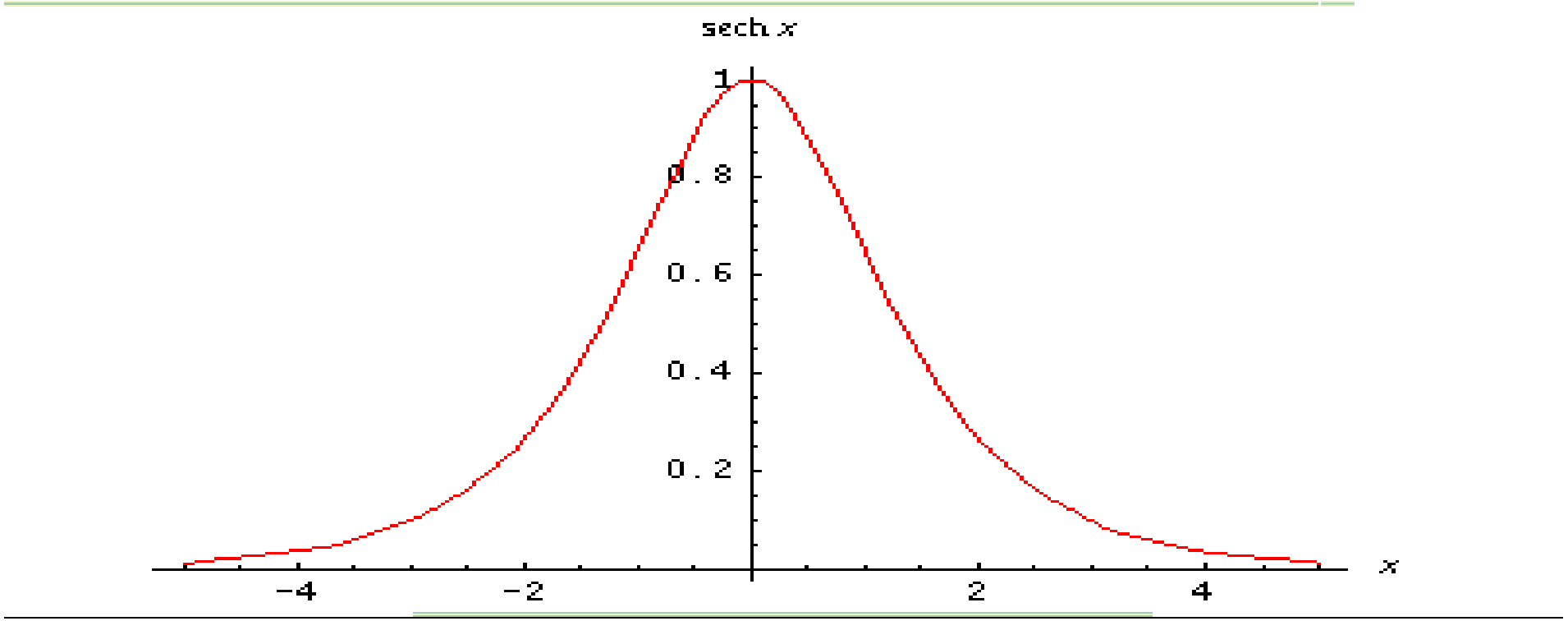
$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$$

---

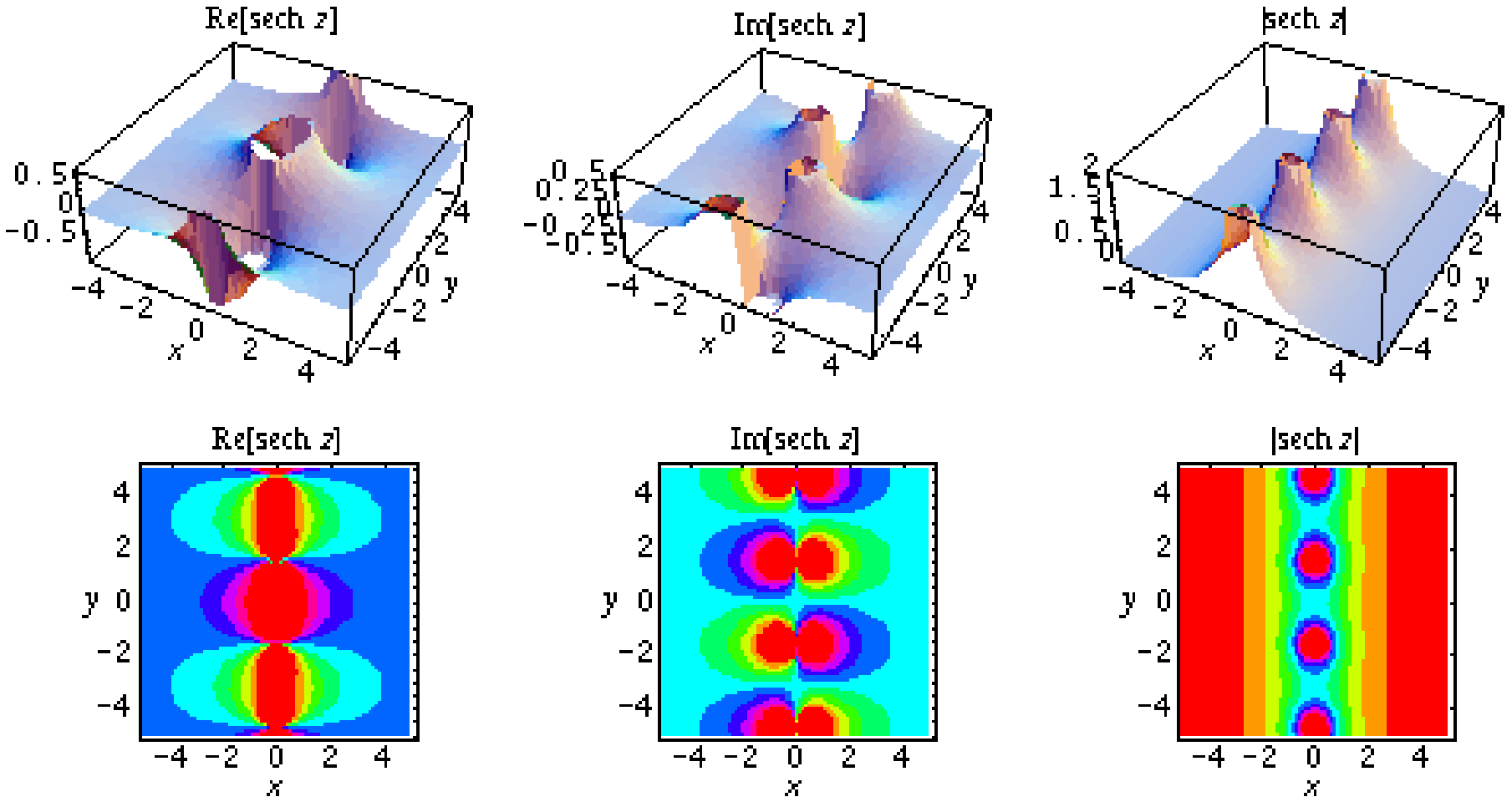
[810] Trost 62 ff; Landau I 30 f; Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.
[811] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.
[812] Trost 62 ff; Landau I 30 f.
[813] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >; Wikipedia, Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus, in: < URL >; Padberg 80.

Die schon gezeigte Umrechnung von *sech x* in *cosh x* und *csch x* in *sinh x* mit $e^{\pm z}$ zeigt also den gesuchten Zusammenhang[814].

„Hyperbolic Secant



[814] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.



The hyperbolic secant is defined as

$$\operatorname{sech} z \equiv \frac{1}{\cosh z} \tag{1}$$

$$= \frac{2}{e^z + e^{-z}} \tag{2}$$

where $\cosh z$ is the hyperbolic cosine. It is implemented in *Mathematica* as `Sech[z]`.

On the real line, it has a maximum at x = 0 and inflection points at $x = \pm \cosh^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = 0{,}8813735\ldots$ (Sloane's A091648). It has a fixed point at x = 0,76500995… (Sloane's A069814).

The derivative is given by

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \tag{3}$$

where $\tanh z$ is the hyperbolic tangent, and the indefinite integral by

$$\int \operatorname{sech} z \; dz = 2 \tan^{-1}\left[\tanh\left(\frac{1}{2}z\right)\right] + C \tag{4}$$

where C is a constant of integration.

$\operatorname{sech} z$ has the Taylor series

$$\operatorname{sech} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \tag{5}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 - \frac{61}{720}z^6 + \frac{277}{8064}z^8 - \cdots \tag{6}$$

(Sloane's A046976 and A046977), where E_n is an Euler number and n! is a factorial.

Equating coefficients of θ^0, θ^4, and θ^8 in the Ramanujan cos/cosh identity

$$\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\cosh(n\pi)}\right]^{-2} + \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\theta)}{\cosh(n\pi)}\right]^{-2} = \frac{2\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} \tag{7}$$

gives the amazing identities

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}(\pi n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} - 1\right\} \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{sech}(\pi n) = \frac{18\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sech}(\pi n)\right]^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^8 \operatorname{sech}(\pi n) = \frac{168\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sech}(\pi n)\right] \sum_{n=1}^{\infty} n^6 \operatorname{sech}(\pi n) - \frac{63000\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^6}{\pi^{3/2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sech}(\pi n)\right]^4$$“[815]

In grober Annäherung lautet der Lösungsansatz der Riemanschen Zetafunktion[816]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

nunmehr aufgrund

$$a^x = e^{x \ln a}$$

und[817]

$$e^{\gamma} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}},$$

die Eulersche Zahl *e* statt *n* gesetzt[818]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^s}$$

---

[815] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[816] Landau I 30 f; Trost 62 ff.
[817] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.
[818] Wikipedia, Exponentialfunktion, In: < URL >: „Als *die Exponentialfunktion* im engeren Sinne wird die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ mit der eulerschen Zahl e ≈ 2,718281828459 als Basis bezeichnet; hierfür ist auch die Notation $x \mapsto \exp(x)$ gebräuchlich. Unter Verwendung des Logarithmus lässt sich wegen der Identität $a^x = e^{x \ln a}$ jede Exponentialfunktion auf eine solche zur Basis *e* zurückführen, weshalb dieser Artikel im folgenden auf die Exponentialfunktion zur Basis *e* fokussiert.“

denn n^s hat bereits so die Bedeutung $e^{s \ln n}$ bei reellem ln n, und die Eulerschen Identität[819] zeigt die trigonometrische Funktion $e^{ix} = cos(x) + i\, sin(x)$ und $e^{-ix} = cos(x) - i\, sin(x)$ als Hyperbel und die Ableitung[820]

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ bzw. } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist eine Spezialform der Dirichletschen Reihe[821]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-s \ln n}$$

und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

sie kann allgemein als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s}$$

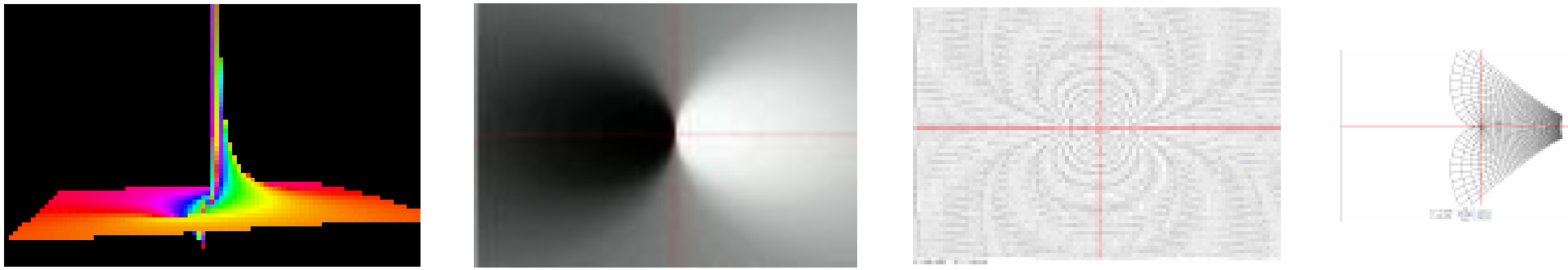
geschrieben werden[822].

---

[819] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[820] Vgl Schönhacker, Die Zahl e, S. 43 f, in: < URL >.
[821] Landau I 103 ff.
[822] Landau II 723 ff.

Insofern die Primzahlen rechtens als die Atome der Mathematik bezeichnet wurden[823], so wären sie gleichsam quantisiert: Es wird behauptet, dass die Riemannsche Zetafunktion[824] den Bedingungen der Quantenmechanik genüge[825].

„Staatsexamensarbeit: plotc - ein komplexer Funktionenplotter in Java

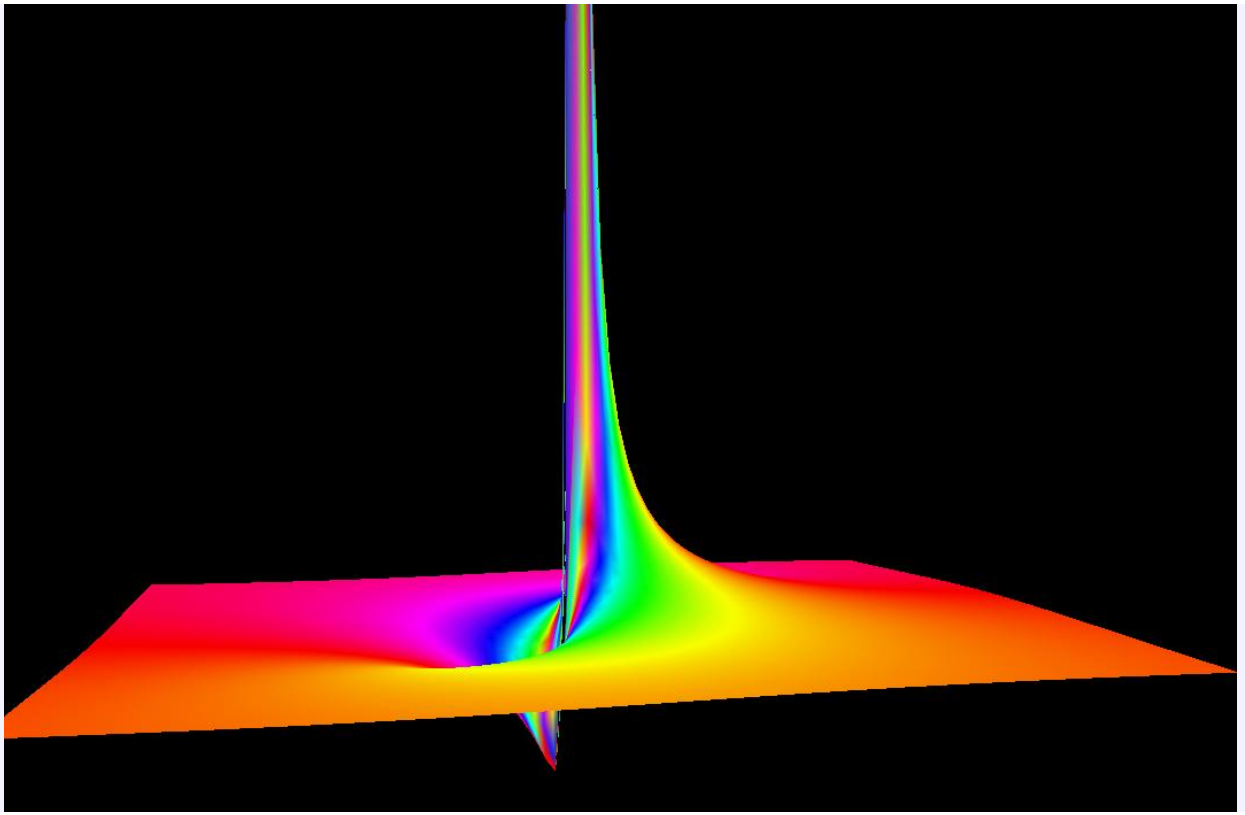


Die Abbildungen zeigen die Funktion $e^{1/z}$ in verschiedenen Darstellungen. Bei (0|0) jeweils die unterschiedlichen Sichten auf die wesentliche Singularität

Im Rahmen seines Studiums beschäftigt sich jeder Mathematik-Student mit der Theorie der komplexwertigen Funktionen. Dies nicht zuletzt deshalb, weil ihre Inhalte und Ergebnisse sich durch eine theoretische Schönheit und praktische Verwendbarkeit auszeichnen, die für die Mathematik als wegweisend gilt. Die Anschaulichkeit dieser wichtigen mathematischen Sachverhalte ist allerdings relativ gering, da die herkömmlichen Visualisierungsmedien

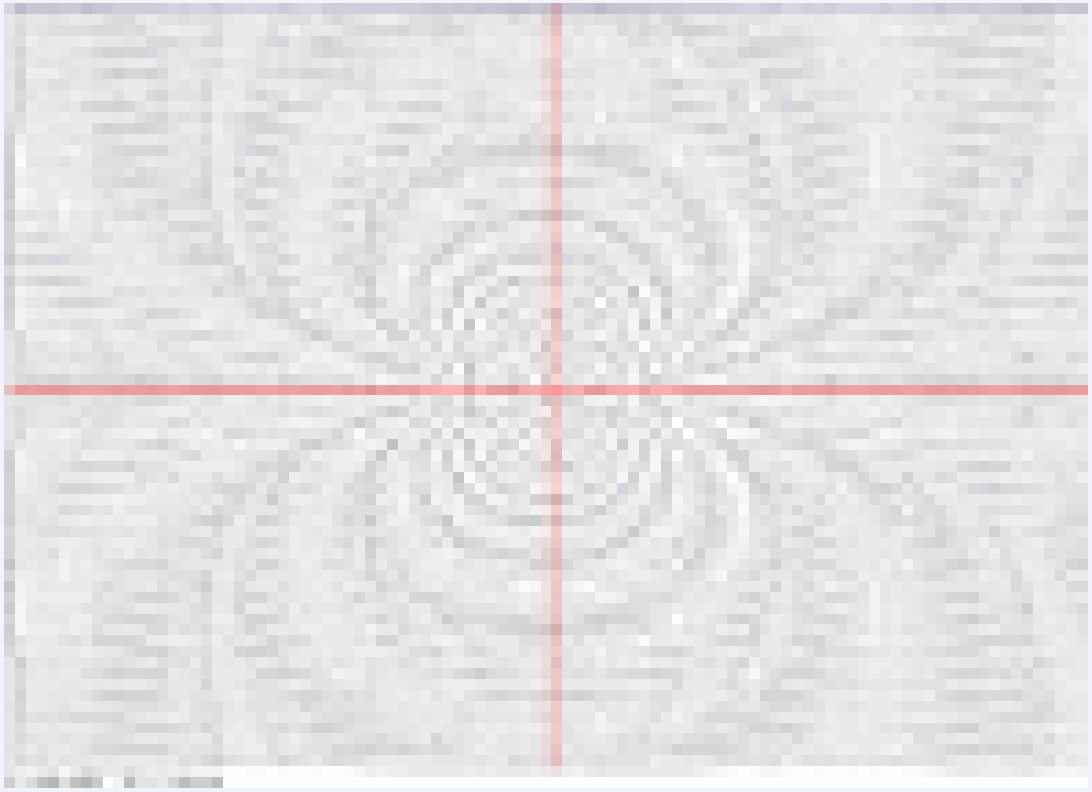
[823] Kuba/Götz 3; Sautoy 31 ff; (cr), Netzwelt, Lösung der Riemann-Hypothese steht bevor, Wie Mathematik die Internetsicherheit bedroht, in: < URL >: „Die Berechenbarkeit von Primzahlen erlaubt die Rekombination der ‚Atome der Mathematik'"
[824] Trost 62 ff.
[825] Gaubitzer 74 f.

(Buch, Tafel) nur unzureichend in der Lage sind, komplexwertige Funktionen darzustellen: Zum einen wären mindestens drei Dimensionen[826] nötig, um die wichtigsten Sachverhalte zu veranschaulichen, zum anderen bedarf es bei individuellen Fragestellungen einer Interaktion zwischen Betrachter und Graphen. Mit der allgemeinen Verfügbarkeit von Computern, die in der Lage sind, aufwendige dreidimensionale Graphiken in Echtzeit zu berechnen, gelten diese Beschränkungen nicht mehr. Mit ihnen bietet sich sogar die Möglichkeit einer neuen *phänomenologischen* Sichtweise auf komplexe mathematische Sachverhalte.



[826] Hainzl 14 f.

Die vorliegende Arbeit hat es sich zum Ziel gesetzt, eine solche Sichtweise durch Entwicklung eines webfähigen Visualisierungswerkzeuges zu befördern. Dabei stehen vor allem die Interaktivität und die Berücksichtigung verschiedener Darstellungsmöglichkeiten (s. Abb.) im Vordergrund. In einem ersten Schritt wurde ein Prototyp entworfen und in Java implementiert.



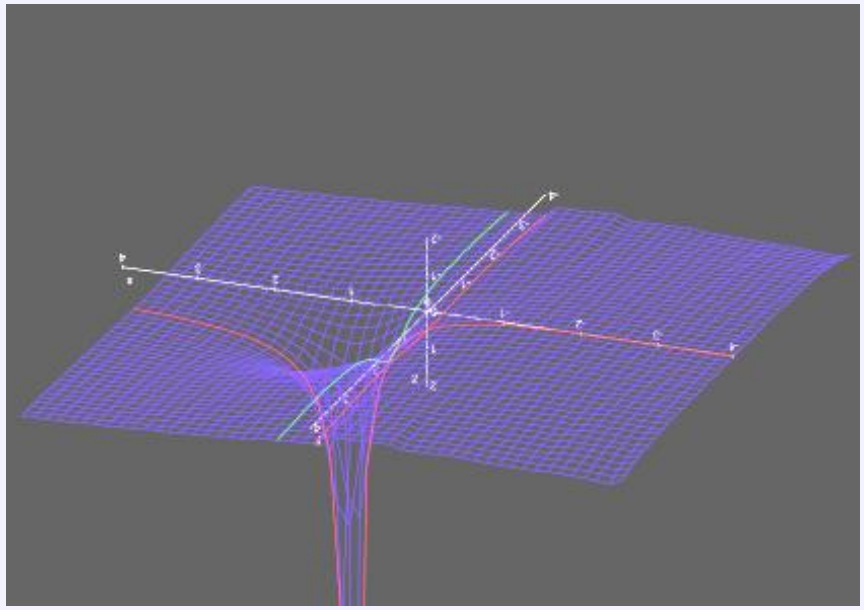
Beim Design der Objektklassen wurde nicht nur auf die Erweiterung um zusätzliche Interaktivität geachtet, sondern auch Schnittstellen für die Berechnung speziellerer Funktionen implementiert. Damit konnte in einem zweiten

exemplarischen Schritt unter geringem zusätzlichen Aufwand die Berechnung der Riemannschen Zetafunktion (einer für die Primzahlsuche wichtigen Funktion) vorgenommen werden. Die Objekt-Bibliothek ihrerseits ist ebenfalls weiter verwendbar, so wurden z.B. der komplette Parser und der (triviale) Codegenerator für ein Visualisierungswerkzeug im Bereich der Schulmathematik wiederverwendet.“[827]

[827] Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 24 ff.

Die Folge $n^{½ + ti}$

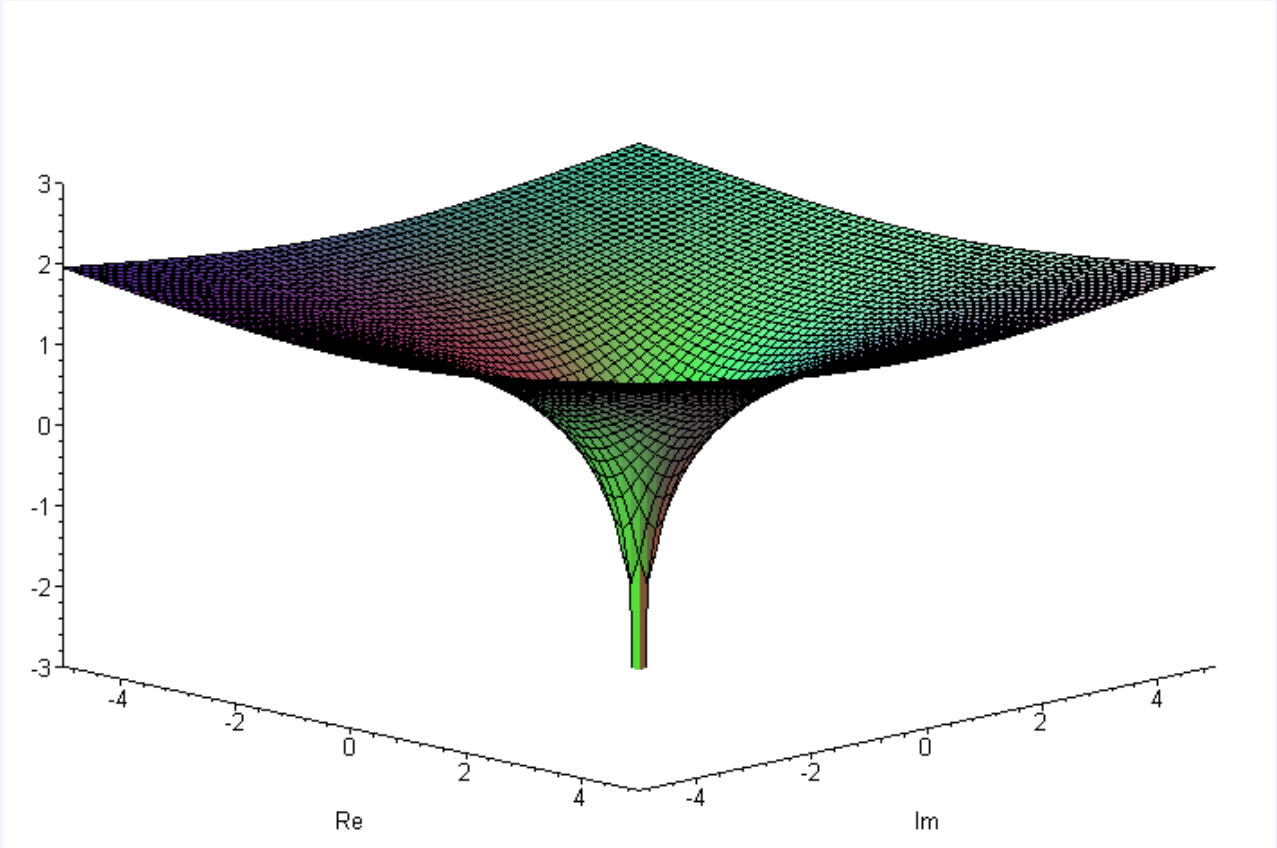
Der von Vries als Singularität bezeichnete Spitze, bzw. umgekehrter Trichter wird aus dem hier gezeigten Zusammenhang besser zugänglich:



Die Drehung[828] (Spiegelung) der Grafik von Vries um 180° zeigt ein anschaulicheres Bild, bzw. zeigt eine bessere Perspektive von dem Trichter im Bild. Sinus Hyperbolicus[829] sinh(θ) Kosinus Hyper-

[828] Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht."

bolicus cosh(θ) haben keine Pole auf der imaginären Achse[830], und entsprechen dem Absolutbetrag |ζ(z)| der Riemanschen Zetafunktion in der Grafik von Vries[831].



Die gegenüberstellung der Grafik des Logarithmus[832] zeigt wiederum ähnlichkeiten. Eine anschaulichere Darstellung bietet:

---

[829] Westermann 407 f; Knopp 431 ff; Hainzl 142 ff; Meschkowski 122 ff.
[830] Wikipedia, Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus, In: < URL >.
[831] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL > PDF-Version 2 Abbildung 3.

„Diskrete Logarithmen

→ *Hauptartikel:* Diskreter Logarithmus[833]

Diskrete Logarithmen sind Lösungen von Gleichungen der Form

$$a^x = \underbrace{a \circ a \circ \ldots}_{x\ mal} = b$$

über einer endlichen zyklischen Gruppe $(G, \mathrm{o}) = \langle a \rangle$. Der diskrete Logarithmus x von b zur Basis a ist modulo der Gruppenordnung von G eindeutig bestimmt und existiert – da a ein Erzeuger der Gruppe ist – für alle Elemente der Gruppe.

Diskrete Logarithmen sind im Sinne der Komplexitätstheorie für viele Gruppen aufwändig zu berechnen und finden Anwendung in der Kryptographie, etwa in auf elliptischen Kurven basierenden Kryptosystemen.

Beispiel:

$$2^x = 5 \bmod 11$$

hat als Lösung den Wert 4, denn es gilt $2^4 = 16$, und 16 lässt den Rest 5 bei Division mit Rest durch 11. Die Lösung ist eindeutig modulo 10, also modulo der Gruppenordnung von $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^x$. Dementsprechend ist mit x auch $x \pm 10$ eine Lösung der Kongruenz.“[834]

---

[832] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.

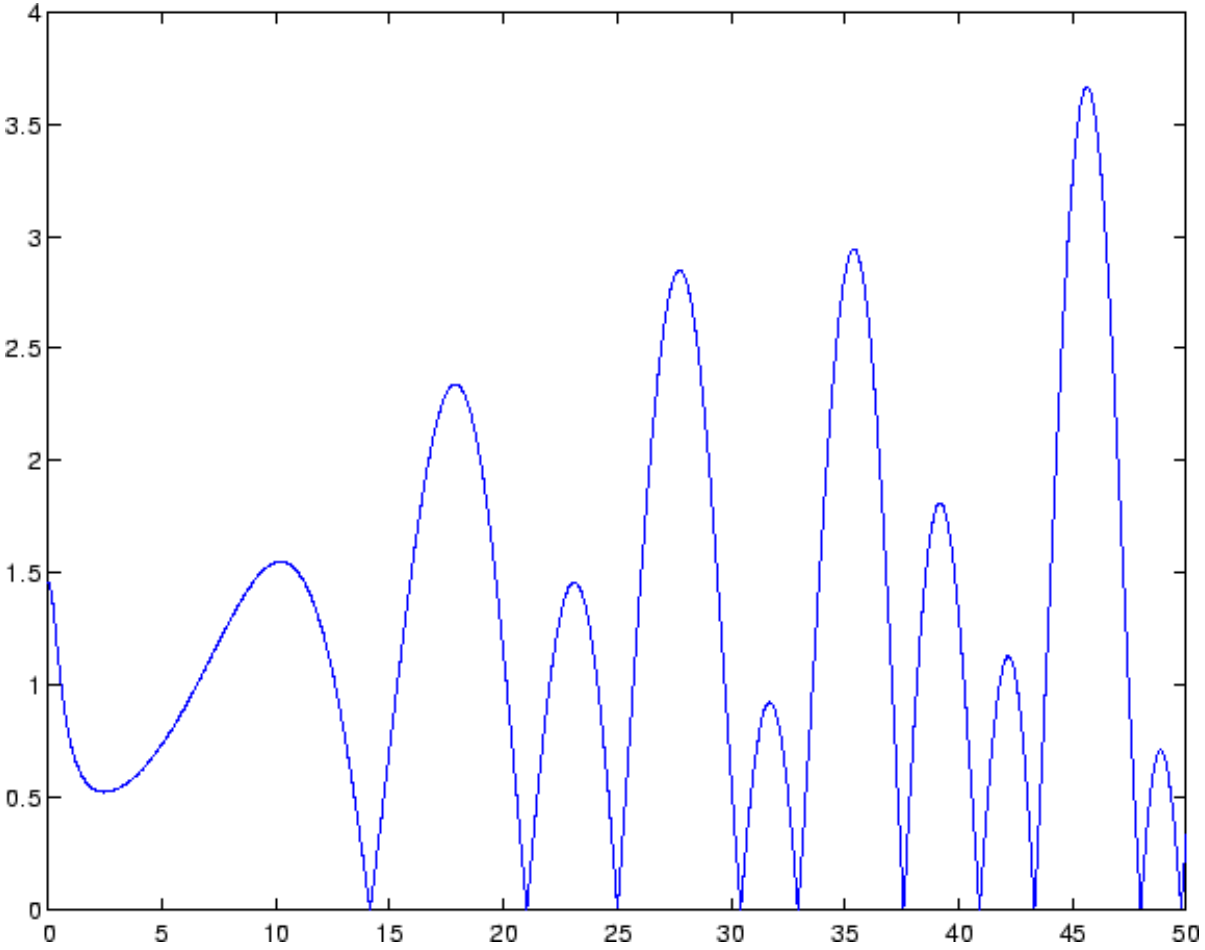
[833] Wikipedia, Diskreter Logarithmus, In: <URL >: „In der Gruppentheorie ist der **diskrete Logarithmus** das Analogon zum gewöhnlichen Logarithmus aus der Analysis; *diskret* kann in diesem Zusammenhang etwa wie *ganzzahlig* verstanden werden. Die diskrete Exponentiation in einer zyklischen Gruppe bildet eine Umkehrfunktion des diskreten Logarithmus. Als Vergleich: die stetige Exponentialfunktion ist eine Umkehrfunktion des gewöhnlichen Logarithmus.“

[834] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.

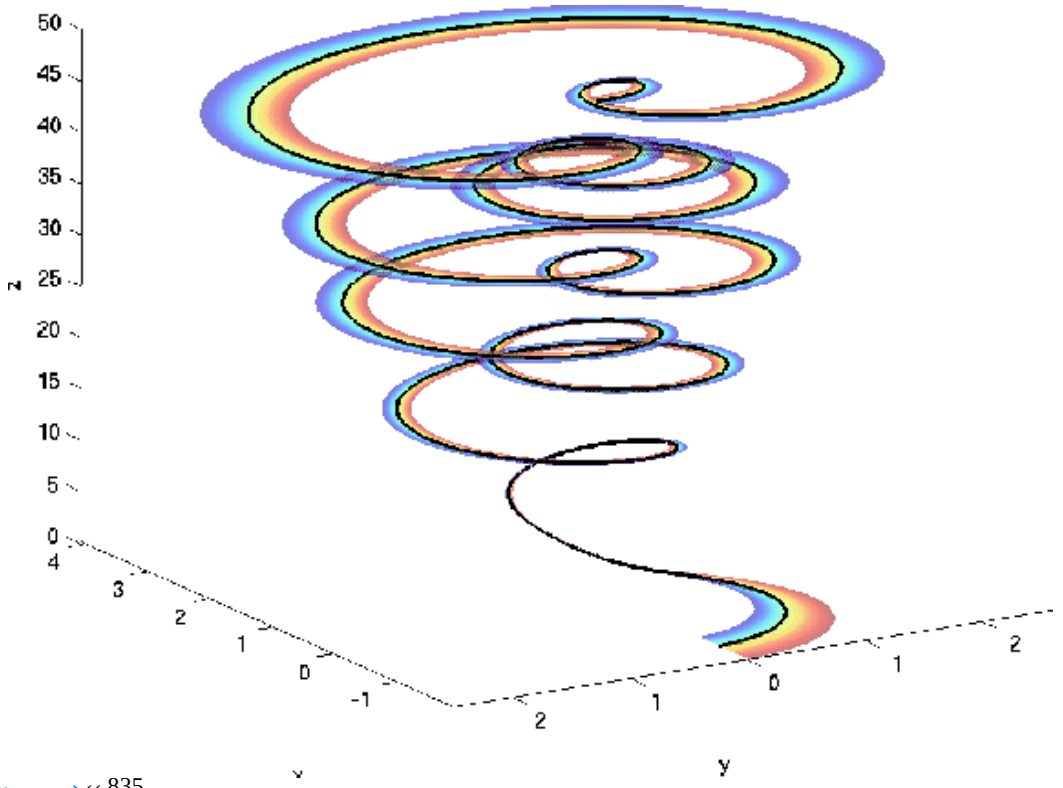
Noch deutlicher:

„Grafiken der Riemannschen Zeta-Funktion

[…] Die erste Grafik zeigt den Betrag der Zeta-Funktion auf der kritischen Geraden $\frac{1}{2} + t\sqrt{-1}, t \in [0,50]$:



Die zweite Grafik zeigt die Werte der Zeta-Funktion im Bereich [4,6]+[0,50]$\sqrt{-1}$. Die x- und die y-Achse entsprechen dem Real- und dem Imaginärteil der Funktionswerte. Die Färbung und die z-Achse geben Real- und Imaginärteil der Urbilder wieder. Die schwarze Kurve entspricht der kritischen Geraden $\frac{1}{2} + t\sqrt{-1}, t \in [0,50]$.



(Autoren: Brenner/Höllig/Hörner)“ [835]

Die komplexen Glieder[836] der Riemannschen Zetafunktion bilden die konvergente Reihe

[835] Brenner/Höllig/Hömer, Grafiken der Riemannschen Zetafunktion, in: < URL >
[836] Landau I 234 ff.

$$\sum_{p} \frac{1}{p^{1+ti}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Nach dem Stätigkeitssatz der Dirichletschen[837] Reihen ist die Gleichtung[838] $\zeta(s) = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ auch für festes s = 1 + ti, t ≷ 0 gültig[839].

[837] Landau II 723 ff: Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist eine Spezialform $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-s \ln n}$ der Dirichletschen Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ und kann allgemein als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s}$ geschrieben werden. Vgl Landau I 103 ff.
[838] Trost 62 ff.
[839] Trost 62 f; Landau I 30 f, 237 f.

Die Folge p^{1+ti}

Die etwa zwei Hauptgruppen in der Forschung, nämlich jene die eine Lösung auch dann annehmen, wenn diese vielleicht nicht exakt genug oder nicht simpel genug wäre, oder sonst nicht den gehobenen Ansprüchen genügen würde, einerseits, und jene, die mehr oder minder offen von einer Mangel als Lösung oder von unüberwindlichen Schwierigkeiten ausgehen, lässt sich technisch an dem nicht stichhaltig bewiesenem Postulat[840] der Unendlichkeit der Folge der Primzahlen messen[841].

Der Reihe[842] mit komplexen Gliedern

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+ti}}$$

die ohne Primzahlsatz lautet

$$\sum_p \frac{1}{p^s}$$

ist der Satz vorangestellt: Es ist, wenn die Abschätzung sich auf x bezieht[843], bei festem s = 1 + ti (t≷0)

---

[840] Schwarz, Werner 44 ff, 86 ff; Pieper 23; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; Schwarz, Wolfgang (1969) 135: „Euklids Beweis der Unendlichkeit von ***P*** ist – von wenigen Spezialfällen abgesehen – nicht geeignet, die Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Folgen zu zeigen."

[841] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f.

[842] Landau I 234 f.

[843] Trost 62 ff.

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathcal{O}(1)$$

worin enthalten ist, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

divergiert, aber in den endlichen Gliedern

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} = \mathcal{O}(1)$$

oszilliert[844]. Daraus folgt der Satz: Die unendliche Reihe

$$\sum_{p} \frac{1}{p^{1+ti}}$$

konvergiert für t⩾0, und es ist[845]

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p^{1+ti}} = \sum_{p} \frac{1}{p^{1+ti}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Selbst die Riemannsche Vermutung[846] also, das an Ansprüchen und an Komplexität kaum zu überbieten ist[847], lässt sich sogleich relativ leicht handhaben, sobald das nicht stichhaltig bewiesene Postulat der Unendlichkeit[848] als Voraussetzung der Berechnung aufgegeben wurde[849]. Neure Versuche

[844] Landau I 235.
[845] Landau I 237.
[846] Sautoy 109 ff; Trost 62 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.
[847] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[848] Schwarz, Werner 44 ff, 86 ff; Pieper 23; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.

greifen praktisch der nachhinkenden Entwicklung der Theorie vor, etwa mit der Formel $e^{2\pi i/p}$, die einerseits die Periodizität[850] mit Pi und andrerseits die Lösung mit der Eulerschen Zahl e zeigt[851].

Repräsentative Teile der Mathematik verrannten sich also in dem Apriori der Unendlichkeit[852] als Voraussetzung und Fundament der Berechnung[853], und bauen unerschütterlich auf eine Unendlichkeit, die in der vorausgesetzten Form gar nicht gibt[854]. Diese nun haben sozusagen beim Griff nach der Unendlichkeit einen größeren Anlauf genommen, und dabei die Mathematik als Landepiste bzw. Startrampe so weit für sich in Anspruch genommen, dass da für etwas anderes kaum mehr Platz wäre, denn die nämliche Unendlichkeit nimmt definitiv jeden verfügbaren Platz für sich so in Anspruch, wie das in der Natur der Sache liege.

Ganz im Gegensatz dazu kann der Rest der Mathematik[855], auch an den Rand der Existenz gedrängt und – sozusagen – mit dem Rücken zur Wand (der endlich geratenen Unendlichkeit) selbst mit mini-

---

[849] Landau I 234 ff.
[850] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[851] Simmel 69: „Dieser APR-Algorithmus – der Name ist aus den Anfangsbuchstaben der Autoren gebildet – verwendet Pseudoprimzahl-Tests, die Potenzrestsymbole in $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ für eine spezielle Menge P von Primzahlen p involvieren. […] Bereits 1984 modifizierten Cohen und Lenstra (siehe [8]) diesen Test, indem sie die Pseudoprimzahltests durch Gauß- und Jacobi-Summen ersetzten. […] Der große Durchbruch des APR-Tests besteht nach der Meinung Riesels darin, dass erstmals die Existenz eines schnellen Primzahltests bewiesen wurde, der total unabhängig von jeglicher Faktorisierung ist […].“ Vgl Arndt/Haenel 13.
[852] Meschkowski 11 ff.
[853] Russell 148 ff.
[854] Schwarz, Wolfgang (1969) 135: „Euklids Beweis der Unendlichkeit von ***P*** ist – von wenigen Spezialfällen abgesehen – nicht geeignet, die Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Folgen zu zeigen.“
[855] Russell 217 ff.

malen Räumen auch im Nanobereich – in einer Kreisbahn[856] – beliebige Unendlichkeiten absolvieren, wenn auch jeweils nur periodisch. Speziell die Primzahlproblematik lässt es an Perioden nicht fehlen[857], ja dieser Teil der Mathematik geht davon aus, dass die Zahl die Periode schlechthin sei[858], ja von und für die Periode da sei, und Nivellierung der Zahlen in der sog. reellen Ebene lediglich Projektion in einem Kunstgriff[859], bestenfalls ein Schatten, der Wirklichkeit der Zahlen sei.

Die Zahlen wären sonach zwar in mancher Hinsicht dimensionslos, aber in der räumlichen (sphärischen) Betrachtung dreidimensional[860], bzw. können sie sich in ihrer Wirklichkeit nur in der Dreidimensionalität behauptet und können außerhalb der räumlichen Dreidimensionalität weder begriffen noch begreifbar gemacht werden[861]. Die Projektion in zwei oder gar in eine Dimension ist in mancher Hinsicht so aussagekräftig wie ein Bild, oder wie eine technische Zeichnung, wo man mehrere zweidimensionale Ansichten aus unterschiedlichen Blickwinkeln anfertigt, um so die Dreidimensionalität zu simulieren[862], diese Bilder kommen aber über die Simulation nicht hinaus, und können für sich betrachtet die Wirklichkeit der Zahlen nicht fassen, sondern sind ein Manko. Wenn so ein Manko zum Selbstzweck wird, und seine eigene Ehre sucht, so geht das immer auf Kosten der Zahlen(theorie). Und zwar um so mehr, als diese Art der Mathematik sich selbst gerecht werde, oder gar sich selbst

---

[856] Riesenhuber 47 ff.
[857] Nickel/Pahl, Mathesis und die Musen: Mathematik in der Kunst — Kunst in der Mathematik, in: < URL > 64 ff.
[858] Russell 217 ff.
[859] Lang/Pucker 62.
[860] Vgl Stakhov/Rozin, The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < URL >.
[861] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: PDF-Version: < URL > 1 ff.
[862] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: PDF-Version: < URL > 1 f: „Irgendwo, weit hinter einer der unendlich vielen Dimensionen des Hilbert-Raums, befindet sich das Land Riemannien. Es wurde erst 1859 von Bernhard Riemann (1826–1866) entdeckt, daher trägt es seinen Namen. Riemann war Mathematiker, und auch die wenigen Pioniere, die bislang in dieses Land vorgedrungen sind, waren Mathematiker. Das wird wohl einige unter Ihnen abschrecken, lassen Sie mich dennoch einiges Wissenswerte über dieses Land erzählen."

genüge[863]. Man kann, ja muss in diesem Fall, die Unendlichkeit[864] zu der Geltung dieser Kunst postulieren, um auf diese Voraussetzung weiter zu bauen.

Schon das Sieb des Eratosthenes[865] zeigt, dass sobald die allfällige Unendlichkeit[866] nicht verfügbar gemacht werde, sondern man die Unendlichkeit unendlich sein lasse, dass in diesem Fall die Zahlen sich nicht nur von der verfügbaren bzw. berechenbaren Seite zeigen[867], sondern sich sogar – sozusagen – domestizieren[868] und vor den Karren der Mathematik spannen lassen. Gelingt es also gleichsam maßzuhalten, bieten sich die Zahlen gleichsam von selbst zum Zählen, Messen und Wiegen an[869]. Die Zahl ist sonach Maß des Ponderablen, respektive Primzahlen. Die, entgegen ihrer mythi-

---

[863] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: PDF-Version: < URL > 1: „Da man auf einem Foto leider nur drei Dimensionen darstellen kann, greifen Mathematiker zu einem Trick und stellen den Graphen (wir erinnern uns: die ”Landschaft“) in zwei Teilen dar, dem ”Realteil“ und dem ”Imaginärteil“. Um diese beiden Ansichten auf dieselbe Landschaft zu verbinden, betrachten manche Mathematiker den ”Absolutbetrag“, das ist die Entfernung eines Landschaftspunkts vom Nullpunkt, dem ”Ursprung“ der komplexen Ebene. Viele werden das als Länge des entsprechenden Vektors erkennen, und deren Quadrat ist nach dem Satz des Pythagoras gegeben als die Summe der Quadrate von Real- und Imaginärteil. Insgesamt ergibt damit das Foto des Absolutbetrags einen zwar etwas verzerrten, aber dennoch wichtigen Blick auf die Landschaft von Riemannien.“

[864] Meschkowski 11 ff.

[865] Vgl Kracher 43 f; Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < URL >.

[866] Meschkowski 11 ff.

[867] Reiss/Schmieder 102 ff; Bornstein u. a. 370; Paschinger 3 f; Pittner 98 f; Trost 9 f; Gonzalez, Zahlentheorie, Arithmetik und Algebra, in: < URL > 6; Wimmer 2; Lackner 75; Gaubitzer 26 f.

[868] Sautoy 109: „Die Riemannsche Vermutung ist eine mathematische Behauptung, wonach sich die Primzahlen in Musik zerlegen lassen. Dass die Primzahlen Musik enthalten, ist eine poetische Form, dieses mathematische Theorem zu beschreiben. Allerdings handelt es sich um hochgradig postmoderne Musik.

Michael Berry, University of Bristol“

[869] Lüders/Oppen 7 ff; Bergmann/Schäfer I (1975) 1 ff.

schen Verklärung als Atome der Zahlentheorie[870], bloß eine Periode sind, allerdings eine quantisierte, eine der (Periode der) Zahlen überlagerte, also eine Art Oberschwingung[871] sei, wenn man die vorgenannte Periode als Analogie zur (Grund)Schwingung begreifen wollte. Auf den nämlichen Kunstgriff scheint auch die Analysis insgesamt zu beruhen, indem über den Begriff eines Grenzwerts bzw. den der Konvergenz, wordurch gleichsam „neben" der Unendlichkeit und dazu parallel, als quasi Abbild, eine Endlichkeit entsteht, so als ließe sich die Unendlichkeit auf die Ebene der Endlichkeit herunter brwechen[872].

Wie schon Schrödinger für die Atome zeigte[873], verträgt die Berechnung der Oberschwindungen einige Kunstfertigkeit[874], zumal hier einerseits die Grundschwingung als tragendes Element mit berücksichtigt werden muss, aber nach den Regeln einer – rückgekoppelten – Überlagerung zu rechnen sind[875], doch im Wesentlichen sind die Primzahlen nur als eine (rück)gekoppelte Schwingung, oder eine Art Oberschwindung zu begreifen… nicht ganz unähnlich den Obertönen der Musik[876]. Bei gekoppelten Schwingungen freilich ist bis zu einem gewissen Grad die Frage berechtigt, welche die Grundschwingung und welche der Kopplungsschwingung sei, und speziell bei den Primzahlen und zwar im Hinblick auf manche Eigenschaften, wie Realteil, Imaginärteil oder Absolutbetrag , die für natürliche Zahlen auch umkehrbar eindeutig gelten, können die Primzahlen als die Grundschwingung

[870] Kuba/Götz 3 ff; Sautoy 31 ff; vgl (cr), Netzwelt, Lösung der Riemann-Hypothese steht bevor, Wie Mathematik die Internetsicherheit bedroht, in: < URL >.
[871] Bergmann/Schäfer I (1975) 505 ff; Bergmann/Schäfer II (1971) 372 Abb 508-509.
[872] Meschkowski 11 ff.
[873] Brandt, 75 Jahre Schrödingergleichung, Folie 1 ff, in: < URL >; Kleinpoppen, 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 2, 16, 20 ff, 27 Abb 11.1; Niedrig, VIII. Kapitel. Wellencharakter der Materie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 855 ff; Komma, Moderne Physik und Mapple, S. 4 f < URL >.
[874] Kleinpoppen, 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 27 Abb 11.1.
[875] Bergmann/Schäfer I (1975) 195 ff.
[876] Bergmann/Schäfer I (1975) 489 f.

und die Zahlen als die Koppelungsschwingung[877] angesehen werden. Es wurde behauptet, dass die Riemannsche Zetafunktion den Bedingungen der Quantenmechanik genüge[878].

Der bildliche Vergleich mit (gekoppelten) Schwindungen[879] dürfte um so mehr zulässig sein, als die gedämpften Schwindungen analog mit der Eulerschen Zahl berechnet werden[880], so ähnlich wie die Anzahl der Primzahlen – im Visier des Primzahlsatzes – im Abnehmen begriffen sei[881]. Auch die Periodizität der Eulerschen Zahl, so wie sich die Periode mit Pi in der Eulerschen Identität[882] zeigt, eignet sich, um die eingangs beschriebenen zwei Arten der Mathematik zu veranschaulichen. Denn die Schulbücher und die Werke dieser Teil der Mathematik beschrieben die Eulersche Zahl als Folge und streng monoton fallend, bzw. mit der Addition der immer kleiner werdenden Glieder gegen einen Limes monoton steigend, und schließen definitiv, allerdings unzutreffend, jegliche Periodizität aus[883]. Die Eulersche Identität hingegen beschreibt die Eulersche Zahl – in der trigonometrischen Funktion – als mit dem Kreisumfang Pi periodisch[884]. So kann sich zwar die Periode unendlich lang im Kreise drehen[885], nimmt aber einen endlichen Raum ein. Vor allem aber lässt sie sich anhand der Periodizität berechnen.

---

[877] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.
[878] Gaubitzer 74 f.
[879] Bergmann/Schäfer I (1975) 195 ff.
[880] Bergmann/Schäfer I (1975) 189 ff.
[881] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f.
[882] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Arndt/Haenel 13; Prachar 61 ff.
[883] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.
[884] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >; Arndt/Haenel 13.
[885] Vgl Riesenhuber 47 ff.

Die Folge $(24n + 1)^{1/2}$

Die Primzahlformel $(24n + 1)^{1/2} = p$ ist eine Abwandlung oder Ableitung der Primzahlformel im Satz von Wilson[886] $(n – 1)! + 1 \equiv 0 \pmod n$, wo dann Clement die gleiche Formel auf die Primzahlzwillinge $4[(n – 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n (n + 2)}$, $n > 1$ ausgeweitet hatte[887]: Da die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod p$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod p$ oder $a \equiv – 1 \pmod p$ zutrifft, kann man bei $p \geq 5$ die Menge der Zahlen 2, 3, …, p – 2 in ½(p – 3) Paare zueinander modulo p reziproker Partner zerlegen, so dass $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p – 2) \equiv 1 \pmod p$ gilt[888]. In n! sind die Perioden 6 ±1 und 24n + 1 implizit berücksichtigt[889], denn $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

So weit also der Satz von Wilson als bewiesen gilt[890], erübrigt sich hier ein – weiterer – Beweis, zumal der Satz auf einen arabischen Mathematiker aus dem 11. Jahrhundert zurückgeht und von

---

[886] Pieper 52 ff.
[887] Trost 25; vgl Schwarz, Werner 23 ff, 42; Ribenboim/Richstein/Keller 198 f.
[888] Bundschuh 102 f: „Satz von Wilson. Eine ganze Zahl $m > 1$ ist Primzahl genau dann, wenn die Kongruenz $(m – 1)! \equiv –1 \pmod m$ besteht. […] die Kongruenz $a^2 \equiv 1 \pmod p$ für ganzes a genau dann gilt, wenn entweder $a \equiv 1 \pmod p$ oder $a \equiv – 1 \pmod p$ zutrifft […] Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den Wilsonschen Satz bereits vor 1683 gekannt haben muss. Publiziert wurde das Resultat offenbar zuerst von E. Warig (Meditationes Algebraicae, Cambridge 1770), der es seinem Schüler J. Wilson zuschrieb. Erst J. L. Lagarange (Oeuvres III, 423-438) scheint dann 1771 wirklich einen Beweis für den Wilsonschen Satz gefunden zu haben. Der angegebene Beweis geht auf Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Art. 77) zurück."
[889] Weisstein, Factorial, in: < URL >: „So, for example, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. An older notation for the factorial is ⌊n (Mellin 1909; Lewin 1958, p. 19; Dudeney 1970; Gardner 1978; Conway and Guy 1996)."
[890] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.

Wilson lediglich wieder entdeckt wurde[891]. Die Manuskripte von Leibniz zeigen, dass dieser den sogenannten Satz von Wilson[892] bereits vor 1683 gekannt habe[893]. Die Folge $p^2 = 24n + 1$ ist eine Ableitung vom Satz von Wilson[894], bzw. ist dessen Beweis als $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ für ganzes a, und eine echte und vollständige Primzahlformel für Ergebnisse mit ganzen Zahlen[895]. So kann das Ergebnis der Forschung bestätigt werden, dass der Satz von Wilson eine Primzahl näher bestimmt[896], und der Kontrollbeweis vom Satz von Wilson in der quadratischen Form ebenfalls eine vollkommene und vollständige, also die Primzahlformel schlechthin, sei[897]. Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ in der Form $\Gamma(n) = (n - 1)!$ für ganze Zahlen dient als Ausgangsgröße[898] für Riemanns Zetafunktion und für seine Hypothese[899] und zeigte die Verbindung

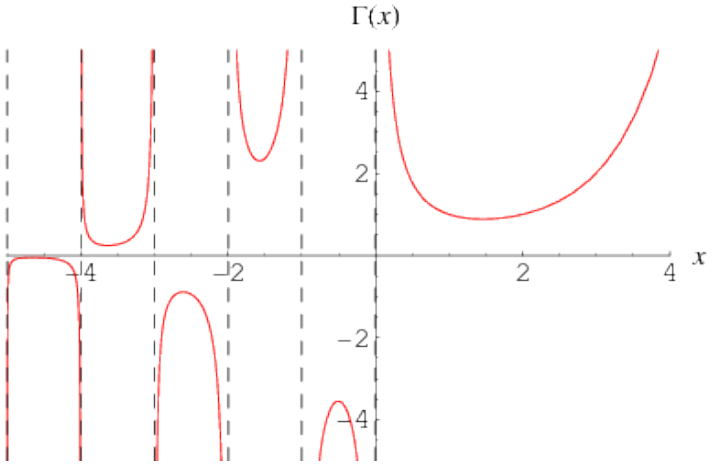
[891] Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >: „Das heute als Satz von Wilson bekannte Resultat wurde erstmals von Ibn al-Haytham entdeckt, aber schließlich nach John Wilson (einem Studenten des englischen Mathematikers Edward Waring) benannt, der es mehr als 700 Jahre später wiederentdeckte. Waring veröffentlichte diesen Satz im Jahr 1770, obwohl weder er noch Wilson einen Beweis erbringen konnten. Lagrange gab den ersten Beweis 1773. Es besteht Grund zur Annahme, dass Leibniz ein Jahrhundert zuvor von diesem Resultat wusste, es aber niemals publizierte."
[892] Pieper 52 ff.
[893] Bundschuh 102 f; Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.
[894] Pieper 52 ff.
[895] Bundschuh 103; vgl Waldal 81.
[896] Bundschuh 103.
[897] Bundschuh 102 f.
[898] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; Trost 62 ff.
[899] Landau I 30 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.

zum Satz von Wilson[900] $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, wo in der quadratischen Form $n^2 \equiv 1 \pmod{p}$ auch die Formel $(n-1)!$ angewendet werde[901] und für $p^2 = 24n + 1$ gelte.

„Gamma Function[902]

DOWNLOAD
Mathematica Notebook

EXPLORE THIS TOPIC IN
The MathWorld Classroom



The (complete) gamma function $\Gamma(n)$ is defined to be an extension of the factorial to complex and real number arguments. It is related to the factorial by

[900] Pieper 52 ff.
[901] Bundschuh 102 f; vgl Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.
[902] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >.

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{1}$$

a slightly unfortunate notation due to Legendre which is now universally used instead of Gauss's simpler $\prod(n) = n!$ (Gauss 1812; Edwards 2001, p. 8).[903]

It is analytic everywhere except at z = 0, –1 , –2, ..., and the residue at z = –k is

$$\mathrm{Res}_{z=-k}\,\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!} \tag{2}$$

There are no points z at which $\Gamma(z) = 0$.

The gamma function is implemented in *Mathematica* as `Gamma[z]`.
There are a number of notational conventions in common use for indication of a power of a gamma functions. While authors such as Watson (1939) use $\Gamma^n(z)$ (i.e., using a trigonometric function-like convention), it is also common to write $[\Gamma(z)]^n$.
The gamma function can be defined as a definite integral for R[z] > 0 Euler's integral form)

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \tag{3}$$

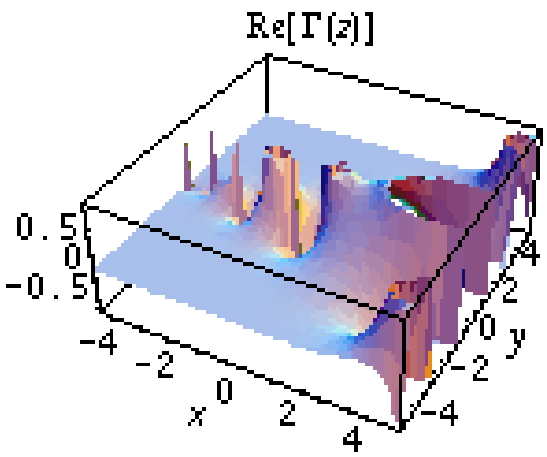
$$= 2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}dt, \tag{4}$$

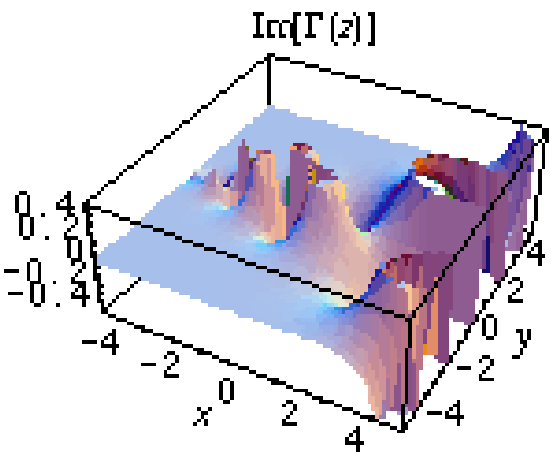
or

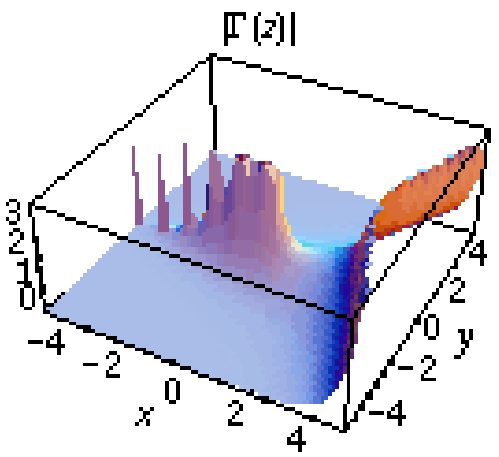
$$\Gamma(z) \equiv \int_0^1 \left[\ln\frac{1}{t}\right]^{z-1} dt. \tag{5}$$

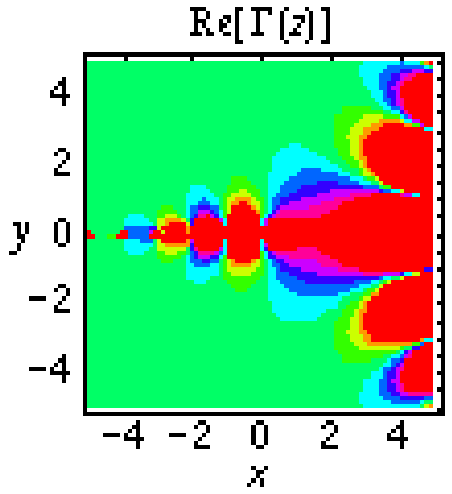
The complete gamma function Γ(x) can be generalized to the upper incomplete gamma function Γ(a,x) and lower incomplete gamma function $\gamma(a,x)$.

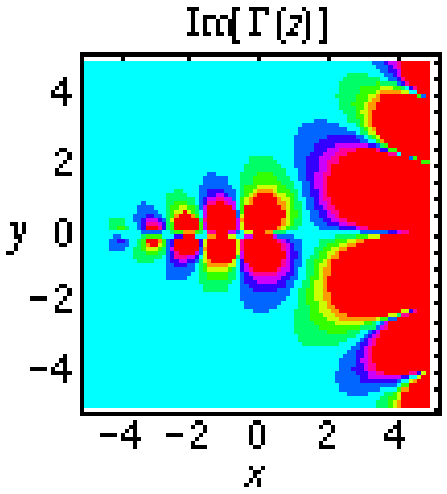
[903] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >.

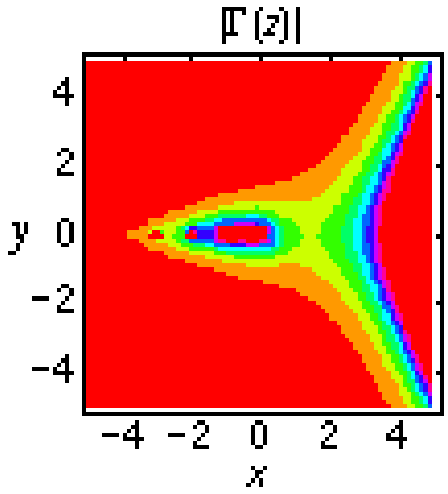












Min Max

Re -5 5

Register for Unlimited Interactive Examples >>

Plots of the real and imaginary parts of $\Gamma(z)$ in the complex plane are illustrated above.
Integrating equation (3) by parts for a real argument, it can be seen that

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (6)$$

$$= [-t^{x-1}e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty (x-1)t^{x-2}e^{-t}dt \quad (7)$$

$$= (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt \quad (8)$$

$$= (x-1)\Gamma(x-1) \quad (9)$$

If x is an integer n = 1, 2, 3, …, then

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad (10)$$

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \quad (11)$$

$$= (n-1)(n-2)\ldots 1 \quad (12)$$

$$= (n-1)!. \quad (13)$$

so the gamma function reduces to the factorial for a positive integer argument.
A beautiful relationship between $\Gamma(z)$ and the Riemann zeta function $\zeta(z)$ is given by

$$\zeta(z)\Gamma(z)\int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u-1}du \quad (14)$$

for $R(z) > 1$ (Havil 2003, p. 60).
The gamma function can also be defined by an infinite product form (Weierstrass form)

$$\Gamma(z) \equiv \left[ze^{\gamma z}\prod_{r=1}^\infty \left(1+\frac{r}{z}\right)e^{-z/r}\right]^{-1} \quad (15)$$

where γ is the Euler-Mascheroni constant[904] (Krantz 1999, p. 157; Havil 2003, p. 57). Taking the logarithm of both sides of (◇),

$$-\ln[\Gamma(z)] = \ln z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]. \tag{16}$$

Differentiating,

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{z}{n}}-\frac{1}{n}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{1}{z}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-z}-\frac{1}{n}\right) \tag{18}$$

$$\Gamma'(z) = -\Gamma(z)\left[\frac{1}{z}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n}\right)\right] \tag{19}$$

$$\equiv -\Gamma(z)\Psi(z) \tag{20}$$

$$= -\Gamma(z)\Psi_0(z) \tag{21}$$

$$\Gamma'(1) = -\Gamma'(1)\left\{1+\gamma+\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots\right]\right\} \tag{22}$$

$$= -(1+\gamma-1) \tag{23}$$

$$= -\gamma \tag{24}$$

$$\Gamma'(1) = -\Gamma(n)\left\{\frac{1}{n}+\gamma+\left[\left(\frac{1}{1+n}-1\right)+\left(\frac{1}{2+n}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3+n}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\right]\right\} \tag{25}$$

$$= -(n-1)!\left(\frac{1}{n}+\gamma-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right). \tag{26}$$

where $\Psi(z)$ is the digamma function and $\Psi_0(z)$ is the polygamma function. n-th derivatives are given in terms of the polygamma functions $\Psi_n, \Psi_{n-1}, \ldots \Psi_0$.

The minimum value x_0 of $\Gamma(x)$ for real positive $x = x_0$ is achieved when

$$\Gamma'(x_0) = \Gamma(x_0)\Psi_0(x_0) = 0 \tag{27}$$

$$\Psi_0(x_0) = 0. \tag{28}$$

[904] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.

This can be solved numerically to give $x_0 = 1{,}46163\ldots$ (Sloane's A030169; Wrench 1968), which has continued fraction [1, 2, 6, 63, 135, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 38, ...] (Sloane's A030170). At x_0, $\Gamma(x_0)$
achieves the value 0.8856031944... (Sloane's A030171), which has continued fraction [0, 1, 7, 1, 2, 1, 6, 1, 1, ...] (Sloane's A030172).
The Euler limit form is

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right], \tag{29}$$

so

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)} \tag{30}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^z n!}{z(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)} \tag{31}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(z)_{n+1}}(n+1)^z \tag{32}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(z)_{n+1}}n^z \tag{33}$$

(Krantz 1999, p. 156).
One over the gamma function $1/\Gamma(z)$ is an entire function and can be expressed as

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\exp\left[\gamma z - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\zeta(k)z^k}{k}\right] \tag{34}$$

where γ is the Euler-Mascheroni constant[905] and $\zeta(z)$ is the Riemann zeta function (Wrench 1968). An asymptotic series for $1/\Gamma(z)$ is given by

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \sim z + \gamma z^2 + \frac{1}{12}(6\gamma^2 - \pi^2)z^3 + \frac{1}{12}[2\gamma^3 - \gamma\pi^2 + 4\zeta(3)]z^4 + \cdots \tag{35}$$

Writing

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \tag{36}$$

the a_k satisfy

[905] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.

$$a_n = na_1a_n - a_2a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\zeta(\mathrm{k})a_{n-k} \quad (37)$$

(Bourguet 1883, Davis 1933, Isaacson and Salzer 1943, Wrench 1968). Wrench (1968) numerically computed the coefficients for the series expansion about 0 of

$$\frac{1}{\mathrm{z}(1+\mathrm{z})\Gamma(\mathrm{z})} = 1 + (\gamma - 1)z + \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 2)\gamma - \frac{1}{12}\pi^2\right]z^2 \quad (38)$$

The Lanczos approximation gives a series expansion for $\Gamma(\mathrm{z}+1)$ for $\mathrm{z} > 0$ in terms of an arbitrary constant σ such that $R[z + \sigma + 1/2] > 0$.

The gamma function satisfies the functional equations

$$\Gamma(1+\mathrm{z}) = z\Gamma(\mathrm{z}) \quad (39)$$

$$\Gamma(1-\mathrm{z}) = -z\Gamma(-\mathrm{z}). \quad (40)$$

Additional identities are

$$\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(-\mathrm{x}) = -\frac{\pi}{x\sin(\pi x)} \quad (41)$$

$$\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(1-\mathrm{x}) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (42)$$

$$|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \quad (43)$$

$$|(n+ix)!| = \sqrt{\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}}\prod_{s=1}^{n}\sqrt{s^2+x^2}. \quad (44)$$

Using (42), the gamma function $\Gamma(\mathrm{x})$ of a rational number r can be reduced to a constant times $\Gamma(\mathrm{frac(r)})$ or $1/\Gamma(\mathrm{frac(r)})$. For example,

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (45)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \quad (46)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)} \quad (47)$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{5}\right) = \sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}. \quad (48)$$

For $R[z] = -1/2$,

$$\left|\left(-\frac{1}{2}+iy\right)!\right|^2 = \frac{\pi}{\cos(\pi y)}. \quad (49)$$

Gamma functions of argument 2z can be expressed using the Legendre duplication formula

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2}2^{2z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \quad (50)$$

Gamma functions of argument 3z can be expressed using a triplication formula

$$\Gamma(3z) = (2\pi)^{-1}3^{3z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right). \quad (51)$$

The general result is the Gauss multiplication formula

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nz}\Gamma(nz). \quad (52)$$

The gamma function is also related to the Riemann zeta function $\zeta(z)$ by

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s). \quad (53)$$

For integer n = 1, 2, …, the first few values of $\Gamma(n)$ are 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, ... (Sloane's A000142). For half-integer arguments, $\Gamma(2/n)$ has the special form

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}}. \quad (54)$$

Where n!! is a double factorial. The first few values for n = 1, 3, 5, ... are therefore

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (55)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (56)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}. \quad (57)$$

$15\sqrt{\pi}/8$, $105\sqrt{\pi}/16$, ... (Sloane's A001147 and A000079; Wells 1986, p. 40). In general, for n a positive integer n = 1, 2, ...

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{n}\right) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\mathrm{n}-1)}{2^{\mathrm{n}}}\sqrt{\pi} \quad (58)$$

$$= \frac{(2\mathrm{n}-1)!!}{2^{\mathrm{n}}}\sqrt{\pi} \quad (59)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mathrm{n}\right) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}}2^{\mathrm{n}}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2\mathrm{n}-1)}\sqrt{\pi} \quad (60)$$

$$= \frac{(-1)^{\mathrm{n}}2^{\mathrm{n}}}{(2\mathrm{n}-1)!!}\sqrt{\pi}. \quad (61)$$

Simple closed-form expressions of this type do not appear to exist for $\Gamma(1/\mathrm{n})$ for n a positive integer n > 2. However, Borwein and Zucker (1992) give a variety of identities relating gamma functions to square roots and elliptic integral singular values k_n, i. e., elliptic moduli k_n such that

$$\frac{K'(k_n)}{K(k_n)} = \sqrt{\pi}. \quad (62)$$

where $K(k_n)$ is a complete elliptic integral of the first kind and $K'(k) = K(k') = K\sqrt{1-k^2}$ is the complementary integral. M. Trott (pers. comm.) has developed an algorithm for automatically generating hundreds of such identities.

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{7/9}3^{-1/12}\pi^{1/3}[K(k_3)]^{1/3} \quad (63)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2\pi^{1/4}[K(k_1)]^{1/2} \quad (64)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 2^{-1/3}3^{1/2}\pi^{-1/2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2 \quad (65)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)^{1/2}2^{13/4}\pi^{1/2}K(k_2) \quad (66)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)} = 2\left(\sqrt{2}+1\right)^{1/2}\pi^{-1/4}[K(k_1)]^{1/2} \quad (67)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right) = 2^{-1/4}3^{3/8}\left(\sqrt{3}+1\right)^{1/2}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (68)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{12}\right) = 2^{1/4}3^{-1/8}\left(\sqrt{3}-1\right)^{1/2}\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (69)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{24}\right)\Gamma\left(\frac{11}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{24}\right)\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)} = \sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}} \tag{70}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{24}\right)\Gamma\left(\frac{5}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)\Gamma\left(\frac{11}{24}\right)} = 4\cdot 3^{1/4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\pi^{-1/2}K(k_1) \tag{71}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{24}\right)\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{24}\right)\Gamma\left(\frac{11}{24}\right)} = 2^{25/18}3^{1/3}\left(\sqrt{2}+1\right)\pi^{-1/3}[K(k_3)]^{2/3} \tag{72}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{24}\right)\Gamma\left(\frac{5}{24}\right)\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)\Gamma\left(\frac{11}{24}\right) = 384\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)[K(k_6)]^2 \tag{73}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{10}\right) = 2^{-7/10}5^{1/4}\left(\sqrt{5}+1\right)^{1/2}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{2}{5}\right) \tag{74}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{10}\right) = 2^{-3/5}\left(\sqrt{5}-1\right)\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)} \tag{75}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)\Gamma\left(\frac{4}{15}\right)\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)} = 2\cdot 3^{1/2}5^{1/6}\sin\left(\frac{2}{15}\pi\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2 \tag{76}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{15}\right)} = 2^2\cdot 3^{2/5}\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)\sin\left(\frac{4}{15}\pi\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\right]^2 \tag{77}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)\Gamma\left(\frac{4}{15}\right)\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)} = \frac{2^{-3/2}3^{-1/5}5^{1/4}\left(\sqrt{5}-1\right)^{1/2}\left[\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\right]^2}{\sin\left(\frac{4}{15}\pi\right)} \tag{78}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)\Gamma\left(\frac{4}{15}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)} = 60\left(\sqrt{5}-1\right)\sin\left(\frac{7}{15}\pi\right)[K(k_{15})]^2 \tag{79}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{20}\right)\Gamma\left(\frac{9}{20}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{20}\right)\Gamma\left(\frac{7}{20}\right)} = 2^{-1}5^{1/4}\left(\sqrt{5}+1\right) \tag{80}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{20}\right)\Gamma\left(\frac{3}{20}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{20}\right)\Gamma\left(\frac{9}{20}\right)} = 2^{4/5}\left(10-2\sqrt{5}\right)^{1/2}\pi^{-1}\sin\left(\frac{7}{20}\pi\right)\sin\left(\frac{9}{20}\pi\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\right]^2 \tag{81}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{20}\right)\Gamma\left(\frac{7}{20}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{20}\right)\Gamma\left(\frac{9}{20}\right)} = 2^{3/5}\left(10+2\sqrt{5}\right)^{1/2}\pi^{-1}\sin\left(\frac{3}{20}\pi\right)\sin\left(\frac{9}{20}\pi\right)\left[\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\right]^2 \quad (82)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{20}\right)\Gamma\left(\frac{3}{20}\right)\Gamma\left(\frac{7}{20}\right)\Gamma\left(\frac{9}{20}\right) = 160\left(\sqrt{5}-2\right)^{1/2}\pi[K(k_5)]^2 \quad (83)$$

Several of these are also given in Campbell (1966, p. 31).

A few curious identities include

$$\prod_{n=1}^{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}n\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (84)$$

$$\prod_{n=1}^{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}n\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (85)$$

$$\prod_{n=1}^{4}\Gamma\left(\frac{1}{3}n\right) = \frac{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\sqrt{3}} \quad (86)$$

$$\prod_{n=1}^{5}\Gamma\left(\frac{1}{3}n\right) = \frac{8}{27}\pi^2 \quad (87)$$

$$\prod_{n=1}^{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}n\right) = \frac{8}{27}\pi^2 \quad (88)$$

$$\prod_{n=1}^{7}\Gamma\left(\frac{1}{3}n\right) = \frac{32}{243}\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (89)$$

$$\prod_{n=1}^{8}\Gamma\left(\frac{1}{3}n\right) = \frac{640\pi^3}{2187\sqrt{3}} \quad (90)$$

of which Magnus and Oberhettinger (1949, p. 1) give only the last case and

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\ln 2 \tag{91}$$

(Magnus and Oberhettinger 1949, p. 1). Ramanujan also gave a number of fascinating identities:

$$\frac{\Gamma^2(\mathrm{n}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}+\mathrm{xi}+1)\Gamma(\mathrm{n}-\mathrm{xi}+1)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{x^2}{(n+k)^2}\right] \tag{92}$$

$$\phi(m,n)\phi(n,m) = \frac{\Gamma^3(\mathrm{m}+1)\Gamma^3(\mathrm{n}+1)}{\Gamma(2\mathrm{m}+\mathrm{n}+1)\Gamma(2\mathrm{n}+\mathrm{m}+1)}\, x\, \frac{\cosh[\pi(m+n)\sqrt{3}]-\cosh[\pi(m-n)]}{2\pi^2(m^2+mn+n^2)}. \tag{93}$$

where

$$\phi(m,n) \equiv \prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{m+n}{k+m}\right)^3\right] \tag{94}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{n}{k}\right)^3\right]\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+3\left(\frac{n}{n+2k}\right)^2\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mathrm{n}\right)}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mathrm{n}+1)\right]}\frac{\cos(\pi n\sqrt{3})-\cos(\pi n)}{2^{n+2}\pi^{3/2}n} \tag{95}$$

(Berndt 1994).

Ramanujan gave the infinite sums

$$\sum_{k=0}^{\infty}(8k+1)\left[\frac{\Gamma\left(\mathrm{k}+\frac{1}{4}\right)}{\mathrm{k}!\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right]^4 = 1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\cdots = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} \tag{96}$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4k+1)\left[\frac{(2\mathrm{k}-1)!!}{(2\mathrm{k})!!}\right]^5 = 1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\cdots = \frac{2}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^4} \tag{97}$$

(Hardy 1923; Hardy 1924; Whipple 1926; Watson 1931; Bailey 1935; Hardy 1999, p. 7).

The following asymptotic series is occasionally useful in probability theory (e.g., the one-dimensional random walk):

$$\frac{\Gamma\left(\mathrm{J}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mathrm{J})} = \sqrt{J}\left(1-\frac{1}{8J}+\frac{1}{128J^2}+\frac{1}{1024J^3}-\frac{1}{32768J^4}+\cdots\right) \tag{98}$$

(Sloane's A143503 and A061549; Graham *et al.* 1994). This series also gives a nice asymptotic generalization of Stirling numbers of the first kind to fractional values.

It has long been known that $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\pi^{-1/4}$ is transcendental (Davis 1959), as is $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ (Le Lionnais 1983; Borwein and Bailey 2003, p. 138), and Chudnovsky has apparently recently proved that $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ is itself transcendental (Borwein and Bailey 2003, p. 138).

There exist efficient iterative algorithms for $\Gamma(k/24)$ for all integers k (Borwein and Bailey 2003, p. 137). For example, a quadratically converging iteration for $\Gamma(1/4) = 3.6256099\ldots$ (Sloane's A068466) is given by defining

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1}^{1/2} + x_{n-1}^{-1/2}\right) \tag{99}$$

$$y_n = \frac{y_{n-1}x_{n-1}^{1/2} + x_{n-1}^{-1/2}}{y_{n-1}+1} \tag{100}$$

setting $x_0 = \sqrt{2}$ and $y_1 = 2^{1/4}$, and then

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(1+\sqrt{2}\right)^{3/4}\left[\prod_{n=1}^{\infty} x_n^{-1}\left(\frac{1+x_n}{1+y_n}\right)^3\right]^{1/4} \tag{101}$$

(Borwein and Bailey 2003, pp. 137-138).

No such iteration is known for $\Gamma(1/5)$ (Borwein and Borwein 1987; Borwein and Zucker 1992; Borwein and Bailey 2003, p. 138)."[906]

[906] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >.

Besonders aufschlussreich ist die Gammafunktion um den Wert ½ herum, weil das dem kritischen Wert der Riemannschen Zetafunktion entspricht

„The gamma function is also related to the Riemann zeta function $\zeta(z)$ by

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s). \quad (54)$$

For integer $n = 1, 2, \ldots$, the first few values of $\Gamma(n)$ are 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, ... (Sloane's A000142). For half-integer arguments, $\Gamma(2/n)$ has the special form

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}}. \quad (55)$$

Where n!! is a double factorial. The first few values for n = 1, 3, 5, ... are therefore

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (56)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (57)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}. \quad (58)$$

$15\sqrt{\pi}/8$, $105\sqrt{\pi}/16$, ... (Sloane's A001147 and A000079; Wells 1986, p. 40). In general, for n a positive integer n = 1, 2, ...

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (59)$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (60)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\sqrt{\pi} \quad (61)$$

$$= \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}. \quad (62)$$

Simple closed-form expressions of this type do not appear to exist for $\Gamma(1/n)$ for n a positive integer n > 2. However, Borwein and Zucker (1992) give a variety of identities relating gamma functions to square roots and elliptic integral singular values k_n, i. e., elliptic moduli k_n such that

$$\frac{K'(k_n)}{K(k_n)} = \sqrt{\pi}. \tag{63}$$

where $K(k_n)$ is a complete elliptic integral of the first kind and $K'(k) = K(k') = K\sqrt{1-k^2}$ is the complementary integral.“[907]

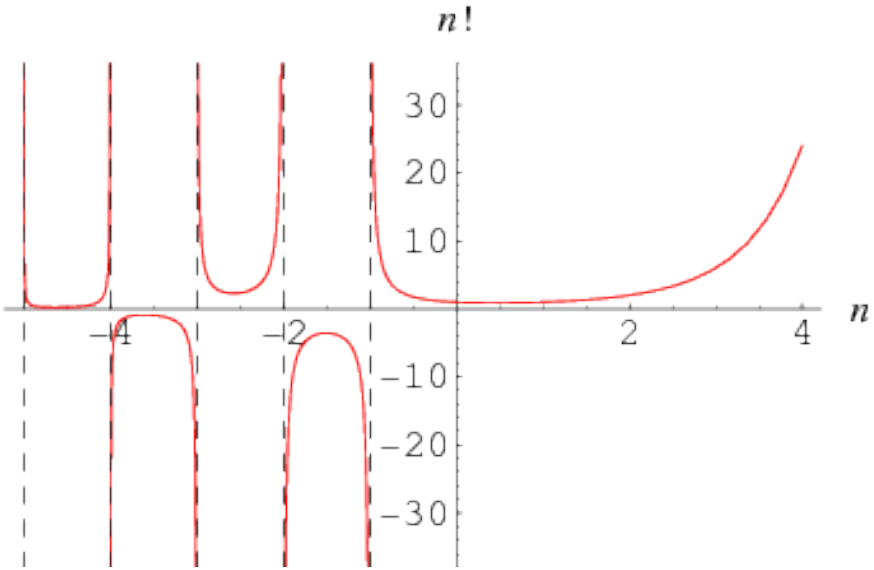
Wir haben

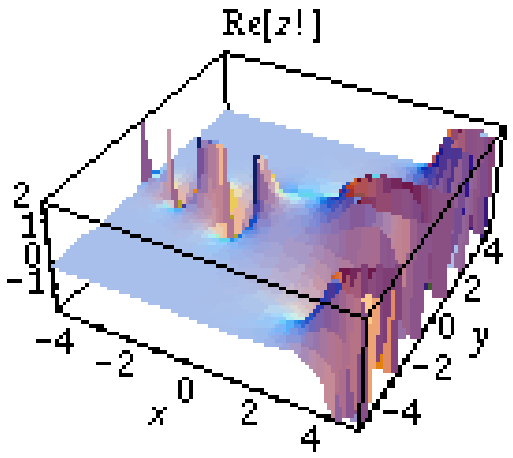
„For integer n = 1, 2, …, the first few values of $\Gamma(n)$ are 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, ...“ Grob vereinfacht $\Gamma(n) = n!$ und „For half-integer arguments, $\Gamma(2/n)$ has the special form $\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}}$. Where n!! is a double factorial. The first few values for n = 1, 3, 5, ... are therefore $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.“

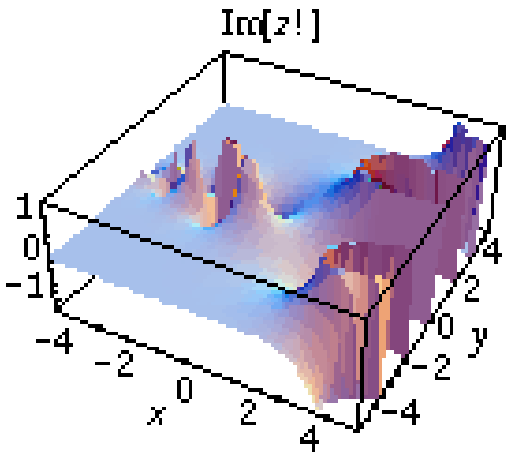
Noch näher an diese Fragestellung geht also naturgemäß die Fakutätsfunktion[908] n!:

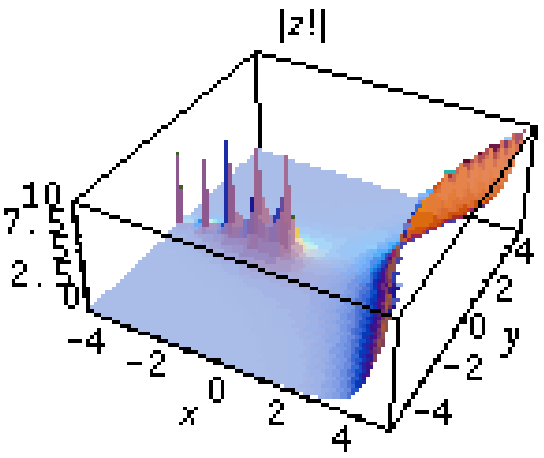
„Let a(n) be the *last* nonzero digit in n!, then the first few values are 2, 6, 4, 2, 2, 4, 2, 8, 8, 8, 6, 8, ... (Sloane's A008904). This sequence was studied by Kakutani (1967), who showed that this sequence is ‘5-automatic,’ meaning roughly that there exists a finite automaton which, when given the digits of n in base-5, will wind up in a state for which an output mapping specifies a(n). The exact distribution of digits follows from this result.

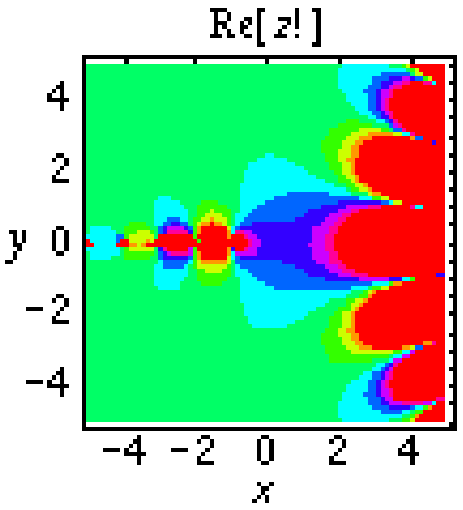
[907] Weisstein, Gamma Function, in: < URL >.
[908] Weisstein, Factorial, in: < URL >.

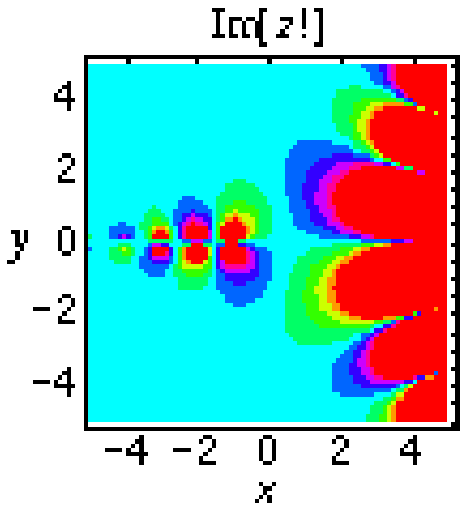

n!
30
20
10
-10
-20
-30
-4
-2
2
4
n

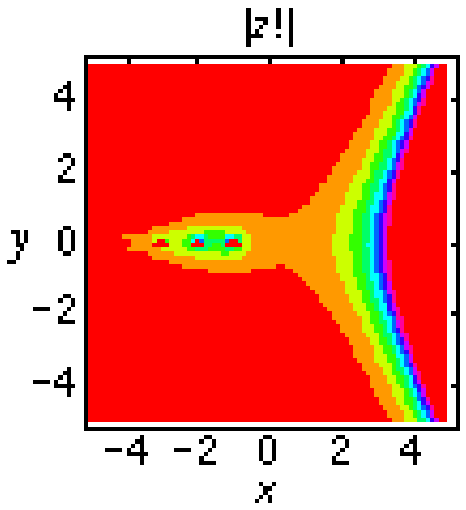

Re[z!]
2
1
0
-1
-4
-2
0
2
4
x
4
2
0
-2
-4
y


Im[z!]
1
0
-1
-4
-2
0
2
4
x
4
2
0
-2
-4
y


|z!|
10
7.5
5
2.5
0
-4
-2
0
2
4
x
4
2
0
-2
-4
y







Min Max

Re -5 5

Im -5 5

Register for Unlimited Interactive Examples >>

POWERED BY webMATHEMATICA

By noting that

$$n! = \Gamma(n+1) \tag{8}$$

where $\Gamma(n)$ is the gamma function for integers n, the definition can be generalized to complex values

$$z! \equiv \Gamma(z+1) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^z \, dt. \tag{9}$$

This defines z! for all complex values of z, except when n is a negative integer, in which case n! is equal to complex infinity.
While Gauss (G1) introduced the notation

$$\Pi(s) = \Gamma(s+1). \tag{10}$$

this notation was subsequently abandoned after Legendre introduced the gamma-notation (Edwards 2001, p. 8).
Using the identities for gamma functions, the values of
$\left(\frac{1}{2}n\right)!$ (half integral values) can be written explicitly

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi} \tag{11}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{12}$$

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!! \tag{13}$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}(2n+1)!!, \tag{14}$$

where n!! is a double factorial.“[909]

Neben der Doppelfakultät gehört die Subfakultät ebenfalls hierher:

„The nth subfactorial (also called the derangement number; Goulden and Jackson 1983, p. 48; Graham *et al.* 2003, p. 1050) is the number of permutations of n objects in which no object appears in its natural place (i. e., ‘derangements’).
The term ‘subfactorial’ was introduced by Whitworth (1867 or 1878; Cajori 1993, p. 77). Euler (1809) calculated the first ten terms.
The first few values of !n for n = 1, 2, ... are 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, ... (Sloane's A000166). For example, the only derangements of {1, 2, 3} are {2, 3, 1} and {3, 1, 2}, so !n = 3. Similarly, the derangements of {1, 2, 3, 4} are {2, 1, 4, 3}, {2, 3, 4, 1}, {2, 4, 1, 3}, {3, 1, 4, 2}, {3, 4, 1, 2}, {3, 4, 2, 1}, {4, 1, 2, 3}, {4, 3, 1, 2, }, and {4, 3, 2, 1}, so !4 = 9.

[909] Weisstein, Factorial, in: < URL >.

Sums and formulas for !n include

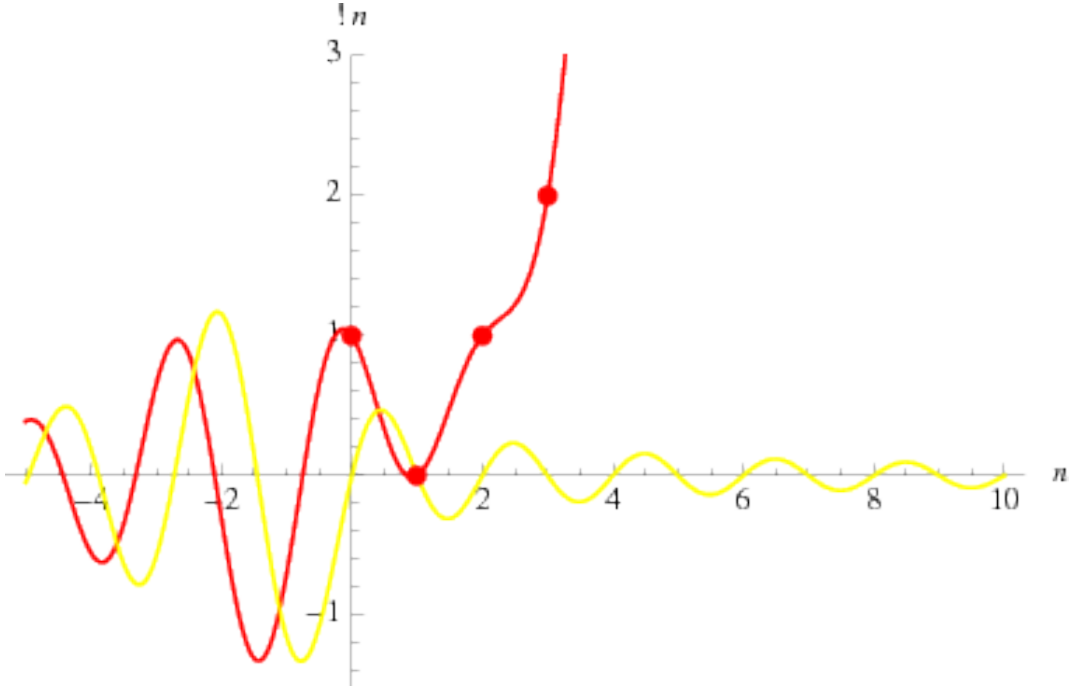
$$n! \equiv n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k!\,(-1)^{n-k}\binom{n}{k} \quad (2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \quad (3)$$

$$= \frac{\Gamma(n+1,-1)}{e}\frac{\Gamma(n+1,-1)}{e} \quad (4)$$

where n! is a factorial, $\binom{n}{k}$ is a binomial coefficient, and $\Gamma(a,z)$ is the incomplete gamma function. Subfactorials are implemented in *Mathematica* as `Subfactorial`$[n]$.



A plot the real and imaginary parts of of the subfactorial generalized to any real argument is illustrated above, with the usual integer-valued subfactorial corresponding to nonnegative integer n.

The subfactorials are also called the rencontres numbers and satisfy the recurrence relations

$$!n = n\cdot!(n-1) + (-1)^n \quad (5)$$

$$!n = (n-1)[![(n-2) + !(n-1)] \quad (6)$$

The subfactorial can be considered a special case of a restricted rooks problem.

The subfactorial has generating function

$$G(x) = \frac{e^{-(1+1/x)}}{x} Ei\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad (7)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} !n\, x^n \quad (8)$$

$$= 1 + x^2 + 2x^3 + 9x^4 + 44x^5 + 265x^6 + \cdots \quad (9)$$

where Ei(x) is the exponential integral, and exponential generating function

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (!n)\frac{x^n}{n!} \quad (11)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{11}{30}x^5 + 265x^6 + \cdots \quad 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{11}{30}x^5 + \ldots \quad (12)$$

(Sloane's A053557 and A053556).

Subfactorials are commonly denoted !n, n!, (Graham *et al.* 2003, p. 194), $\overline{n}$(Dörrie 1965, p. 19), d_n (Pemmaraju and Skiena 2003, p. 106), d_n (Goulden and Jackson 1983, p. 48; van Lint and Wilson 1992, p. 90), or D_n (Riordan 1980, p. 59; Stanley 1997, p. 489), the latter being especially used when viewing them as derangements.

Another equation is given by

$$!n \equiv \left[\frac{n!}{e}\right]. \quad (13)$$

where k! is the usual factorial and [x] is the nint function. M. Hassani (pers. comm., Oct. 28, 2004) gave the forms

$$!n = \left\lfloor \frac{n!+1}{e} \right\rfloor \quad (14)$$

for n ≥ and

$$!n = \lfloor (e + e^{-1})n! \rfloor - \lfloor en! \rfloor \quad (15)$$

for n ≠ 1, where $\lfloor x \rfloor$ is the floor function.
An integral for !n is given by

$$\int_{-1}^{\infty} x^n \, e^{-(x+1)} dx = !\, n. \tag{16}$$

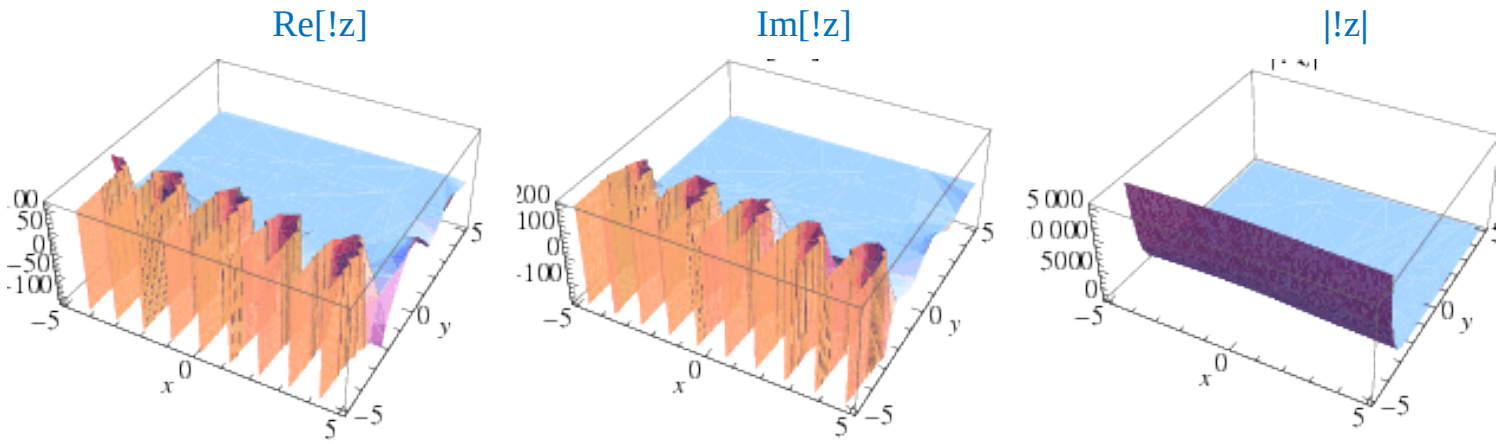
A continued fraction for !n is given by

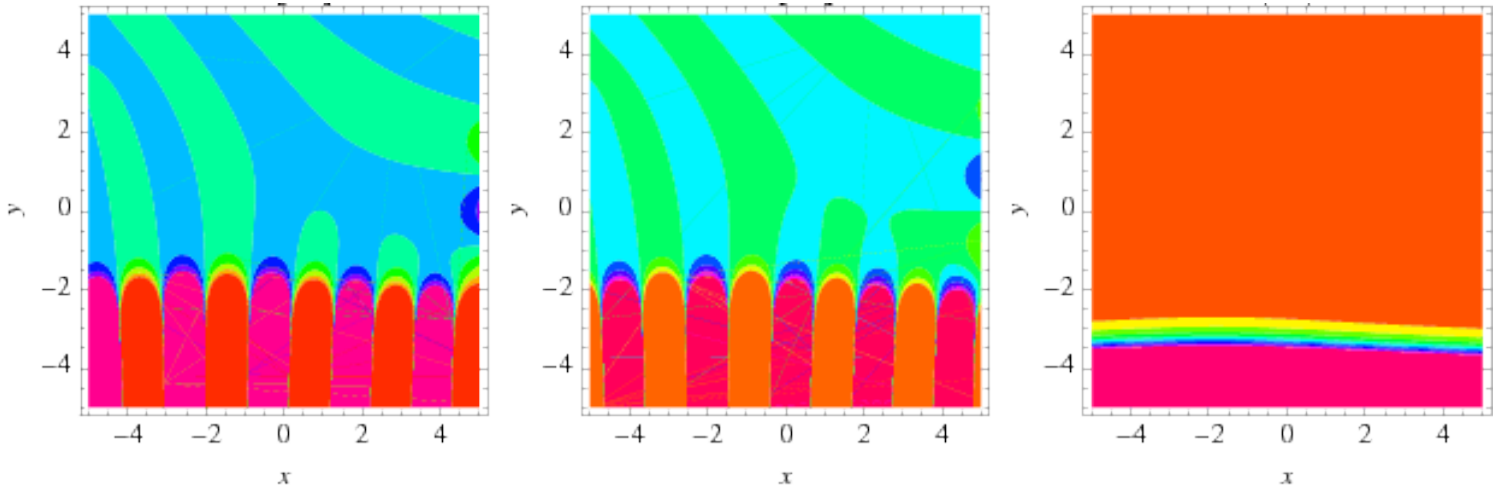
$$!\, n = \frac{n!}{e} + \cfrac{(-1)^n}{n+2-\cfrac{1}{n+3-\cfrac{2}{n+4-\cfrac{3}{n+5-\ldots}}}}. \tag{17}$$

The numbers of decimal digits in !(10^n) for n = 0, 1, … are 7, 158, 2568, 35660, 456574, 5565709, 65657059, ... (Sloane's A114485).
The only prime subfactorial is !3 = 2.
The only number equal to the sum of subfactorials of its digits is

$$148349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !4 + !9 \tag{18}$$

(Madachy 1979).





The subfactorial may be analytically continued to the complex plane, as illustrated above."[910]

Die Umrechnung und ausdehnung des Wilsonschen[911] Satzes auf Primzahlzwillinge durch Clement[912] (n und n + 2 sind dann und nur dann Primzahlzwillinge, wenn $4[(n-1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$, $n > 1$) und deren Verallgemeinerung (Zahlenpaar n, n + k (n > k > 0, k gerade)) durch Tkačev, korrespondiert mit der Eulerschen Formel $n^2 + n + 41 = p$, die noch von Euler auf $n^2 + n + 17$, dann $n^2 + n + 1$, und schließlich zu $n^2 + n + k$ verallgemeinert wurde[913]: die guten Ergebnisse sind auf Primzahlzwillinge wie k = 41 oder k = 17 und 1601 beschränkt. Bereits die Ausweitung der Form $n^2 - n + k$ oder $n^2 + n - k$, die scheinbar nach Euler erfolgte und Ergebnisse von Euler verbessert, ergibt nicht nur die bisherigen Primzahlen, sondern zusätzlich einige Primzahlen $< n^2 + n + k = p$, und beweist, dass

[910] Weisstein, Subfactorial, in: < URL >.
[911] Pieper 52 ff.
[912] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f; Bornstein u. a. 381; Kowol 49 ff, 136 f; Schwarz, Werner 23 ff; Baxa 2 ff.
[913] Stark 2; Bundschuh 71, 283; Padberg/Danckwerts/Sein 15 ff, 164; Sautoy 63; Müller-Stach/Piontkowski 3.

die negativen Zahlen Glieder der Folge sind, bis hin zu der ganz negativen Form $n^2 - n - 1 = 0$, die nur eine Lösung mit $n = (1 + 5^{½})/2$ hat, nämlich die Glieder der Fibonacci-Folge[914].

Dadurch, dass die Fibonacci-Folge die goldene Spirale bildet[915], die lediglich ein Spezialfall der von Euler erschlossenen logarithmischen Spirale ist[916], so als habe Euler den Satz von Fibonacci und die goldene Spirale verallgemeinert, ist der Übergang von der goldenen Zahl zu der Eulerschen Zahl gezeigt, und die Eulersche Zahl zeigt den Übergang zu den sog. irrationalen und reellen Zahlen[917] wie insbesondere Pi, die somit sämtlich auf die Primzahlen – ursächlich – zurückgeführt werden[918].

Analog lassen sich die bisher als unterschiedliche Lösungsansätze gehandelten unterschiedlichen Folgen auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Angefangen bei $2n - 1$, zu $4n + 1$ und $6n \pm n$ über $15n$ und $24n$ bis hin zu $30n$, $36n$, $60n$ sowie $210n$, oder ausgehend von $24n$ für n^2 bis $240n$ für n^4 und $480n$ für n^8. Analog ist der Übergang von $a^2 + b^2$ Fermats zu Eulers $a^2 + nb^2$ und daraus zu $n^2 + n + k$, von wo aus der Übergang zu e mehr oder minder gleitend ist**[919]**. Nach der Auffindung einer

[914] Timerding 13 f, 20 ff; Bartholomé/Rung/Kern 69, 72 f.
[915] Riesenhuber 127 ff, 152 ff; Beuteilspacher/Petri 16; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 18 f, 24 f, 32 ff.
[916] Riesenhuber 127 ff, 152 ff; Schönhacker, Die Zahl e, S. 16 ff, 40: < URL >; Peters, Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < URL > 35 ff.
[917] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff; Lang/Pucker 595 ff.
[918] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >; Arndt/Haenel 13, 117 ff.
[919] Wikipedia, „Primzahlvierling“, In: Wikipedia < URL >; Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.

Primzahlformel, also eigentlich ab dem Satz von Wilson[920], endet die Abgehobenheit der mit dem natürlichen Logarithmus[921] Eulers bis dahin „schwebenden" Primzahlsatz[922],

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

und bekommt mit der Primzahlzwillingskonstante (0,66016…) von Hardy und Littlewood

$$\pi_{2k}(x) \sim 2C_2 \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{\substack{p>2 \\ p|k}} \frac{p-1}{p-2'}$$

Boden unter den Füßen, bzw. gliedert sich nahtlos in die „Folge" der Ableitungen ein[923]. Mit der Einbeziehung des auf Grundlage des natürlichen Logarithmus[924] stehenden Primzahlsatz es[925] in die Betrachtung, kann auf die dieser zugrundeliegende Eulersche Zahl e (= 1/k!)

---

[920] Pieper 52 ff.
[921] Prachar 3; vgl Rohringer 42 f; Remmert/Ullrich 73; Bartholomé/Rung/Kern 83 f; Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 8.
[922] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f; Padberg 80.
[923] Ribenboim/Richstein/Keller 271 f.
[924] Prachar 3; vgl Rohringer 42 f; Remmert/Ullrich 73; Bartholomé/Rung/Kern 83 f; Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 8.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

und von e = Σ(1/k!) einerseits auf den Satz von Wilson[926] (n – 1)! + 1 ≡ 0 (mod n) zurück und auf die Riemannsche Zetafunktion ζ(s) = Σ(1/n^s) vorgegriffen werden[927],

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots.$$

die als 1949 für A. SELBERG und P. ERDÖS als entscheidendes Hilfsmittel zum elementaren Beweis des Primzahlsatzes[928] diente. Die Summe lässt sich als Potenzreihe der Primzahlen 1/p^s

$$\zeta(s) = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\ldots} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \lim_{x \to \infty} \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqq x}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

---

[925] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f; Peters, Die Fakultät, in: < URL > 6; Padberg 80.
[926] Pieper 52 ff.
[927] Remmert/Ullrich 73 f; vgl Trost 62 ff.
[928] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f; vgl Aigner/Ziegler, Das BUCH der Beweise, in: < URL >.

d. h. als Euler-Produkt schreiben[929]. Der Lösungsansatz war, dass die Berechnungen immer dort an ihre Grenzen stoßen, wenn die Unendlichkeit der Folge der Primzahlen a priori vorangesetzt werde, oder auf Beweise gestützt, die nicht stichhaltig seien[930]. Bereits das Sieb des Eratosthenes, also von alters her, drängte sich gleichsam eine Lösung wie von selbst auf, wenn die Folge der Primzahlen als endlich vorausgesetzt wurde[931].

Es musste dabei, wie das Sieb des Eratosthenes[932] schon zeigt, gar nicht die Option einer allenfalls unendlichen Folge ausgeschlossen werden, sondern lediglich die Berechnung auf einen endlichen Abschnitt, möge dieser noch so groß sein, beschränkt werden. Immer also, wenn die Berechnung in greifbaren Grenzen blieb, war sie erfolgreich, und nur beim Griff nach dem Unendlichen[933] ging in die Leere, zumal dabei eine vermeintlich bewiesene Unendlichkeit vorausgesetzt wurde, die es zumindest in dieser Form nicht gibt[934]. So ist auch eines der angeblich größten Probleme der Mathematik, die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion[935], ist nur so lange offen, oder sagen wir ein Rätsel, bis man nach einer Unendlichkeit greift, die es – zumindest so – nicht gibt.

---

[929] Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: Wikipedia URL < URL >.
[930] Schwarz, Wolfgang (1969) 135.
[931] Landau I 234 ff.
[932] Reiss/Schmieder 102 ff; Bornstein u. a. 370; Paschinger 3 f; Pittner 98 f; Trost 9 f; Gonzalez, Zahlentheorie, Arithmetik und Algebra, in: < URL > 6; Wimmer 2; Lackner 75; Gaubitzer 26 f.
[933] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f.
[934] Schwarz, Wolfgang (1969) 135; Schwarz, Werner 44 ff, 86 ff; Pieper 23; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[935] Remmert/Ullrich 73 f; Trost 62 ff.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Denn die gegen unendlich offene Reihe $1/n^s$ divergiert, aber die gleiche Reihe mit einer beliebigen Schranke x nach oben

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathcal{O}(1)$$

oszilliert[936]. Das bedeutet, dass die Formel ihre innere Struktur zeigt, die als Vorfrage bzw. als Voraussetzung gelöst werden möchte, bevor man ans Weitergehen denken könne. Denn das, was darüber hinaus noch allenfalls kommen soll[937], oder auch nicht, ist hier angelegt.

Weil der Primzahlsatz[938] im natürlichen Logarithmus wurzelt, kommt der landläufig bestrittenen Periodizität (mit π) von $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ die entscheidende Bedeutung zu[939]. Denn auch die offizielle Seite von Wikipedia mit relativ anspruchsvollen Darstellungen des Problems erklärt zu der offensichtlichen Periodizität von $e^{i\pi} = -1$ ausdrücklich, aber falsch, dass es keine Periodizität geben könne. Wir haben also das Paradoxon, dass die Eulersche Zahl einerseits mit verschiedenen Formeln insbesondere in den Schulbüchern als nichtperiodisch bestimmt werde[940], aber die gleiche Eulersche

[936] Landau I 234 f.
[937] Jeschke, "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, in: < URL >.
[938] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Padberg 80; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f.
[939] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[940] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.

Zahl in der sogenannten Eulerschen Identität als periodisch gelte[941]. Solange einerseits die Eulersche Zahl als nichtperiodisch gelte, und andererseits die Riemannsche Zetafunktion[942] auf einem nicht stichhaltigen Unendlichkeitsbeweis beruhe[943], geht man an der Periodizität der Riemannschen Zetafunktion – und an der von dort erwarteten Lösung – vorbei, die als Beweis und Lösung zugleich für den Primzahlsatz gelte[944]. Sobald jedoch die Periodizität in die Betrachtung einbezogen werde[945], rückt auch die allfällige Unendlichkeit der Primzahlen in greifbare Nähe, zumal diese nicht mehr Voraussetzung der Rechnung, sondern deren Ergebnis sei.

Nachdem die Riemannsche Hypothese[946] als eine Art Verlängerung der Riemannschen Zetafunktion ζ(s) in der Anwendung[947], also eine Art Auslegung oder gar nur Schreibweise der Eulerschen Gammafunktion Γ(x) = (n – 1)! gezeigt wurde[948], die wiederum von Euler ursprünglich und eigentlich zur Interpolation der Fakultätsfunktion[949] verwendet wurde, und nach der Substitution in die Form u = ln (1/t) übergehe[950], erweist sich die vielgerühmte Riemann-Hypothese als ein taktischer PR-Trick,

---

[941] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >
[942] Trost 62 ff; Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >.
[943] Schwarz, Wolfgang (1969) 135; Schwarz, Werner 44 ff, 86 ff; Pieper 23; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[944] Landau I 3 f; Bartholomé/Rung/Kern 82 f; Kowol 40 f; Ehrenfels 1 ff, 46 ff; Gaubitzer 3, 25; Prachar 9 f, 55 f; Remmert/Ullrich 25 f.
[945] Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[946] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[947] Trost 62 ff; Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >.
[948] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.
[949] Peters, Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, in: < URL >.
[950] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.

eine neue Art der Mathematik so zu begründen, die nur auf dem Umweg der Neubegründung der Mathematik, also nur jenseits der herkömmlichen Mathematik, möglich sei[951]. Das Musterbeispiel ist aus taktischen Gründen so gewählt, dass sie einen Imaginäranteil hat, wohinter sich auch der Grund für die Aufgabe bzw. Aufhebung der Mathematik und deren Neubegründung verstecken könnte, ... was jedoch kraft der Unlösbarkeit des Problems in der herkömmlichen Mathematik weder bewiesen noch widerlegt werden könne. Quod erat demonstrandum.

„Die **Integralrechnung** ist neben der Differentialrechnung der wichtigste Zweig der mathematischen Disziplin der Analysis[952]. Sie entstand aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung. Das **Integral** selbst ist eine lineare Abbildung, die einer Funktion einen Zahlwert oder eine Funktion zuordnet, je nachdem, ob ein konkreter oder ein unbestimmter Integrationsbereich betrachtet wird. […] Im 19. Jahrhundert wurde die gesamte Analysis auf ein solideres Fundament gestellt. 1823 entwickelte Augustin Louis Cauchy erstmals einen Integralbegriff, der den heutigen Ansprüchen an Stringenz genügt. Später entstanden die Begriffe des Riemann-Integrals[953] und des Lebesgue-Integrals. Schließlich folgte die Entwicklung der Maßtheorie Anfang des 20. Jahrhunderts.“[954]

Die Integralrechnung als eine „Hauptdisziplin“ der Analyse[955] kämpft also um die Emanzipation, und kann diese scheinbar bzw. offensichtlich nur über den Absolutheitsanspruch gegenüber der herkömmlichen Mathematik erreichen, die somit bestenfalls noch als Steinbruch für die neue Mathematik sich eignen würde, spätestens mit der Einbunkerung in der Mengenlehre[956], die zu einer mathe-

[951] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.
[952] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Trost 62 f.
[953] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[954] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >.
[955] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[956] Russell 17 ff.

matisch uneinnehmbaren Festung ausgebaut wurde[957], sozusagen als Bastille der Mathematik, eine uneinnehmbare Festung[958].

Das Problem war und ist, dass Hypothesen nur als Hilfsmittel und als Überbrückung, also vorübergehend als Manko legitim eingesetzt werden konnten, und es galt nach einem Umweg wieder auf den befahrenen Weg zurückzukehren. Die Absolutsetzung einer Hypothese, die nur über den Umweg der Abschaffung und Neuerschaffung der Mathematik überhaupt zugänglich wäre, ist ebenso genial wie einfach[959]. Denn die Hypothese ist so formuliert, dass zur Lösung eine Reihe von Hypothesen hochgestapelt werden müsste, die gegen unendlich konvergiere[960], und oder divergiere, wo es dann auf um eine mehr oder weniger Hypothese nicht mehr ankommt[961]. Ließe man also die Hypothese gelten, dass die Mathematik sich neu erschaffen, gleichsam sich selbst beim Schopf packen und auf der Riemannschen Hypothese[962] reitend im Unendlichen lande, so relativ exakt zu bestimmen, dass dieser Weg einiges hinter sich gelassen hatte[963], bzw. die Mathematik in den Auspuff der Riemannschen Hypothese[964] als Perspektive vor Augen habe.

Der Trick ist, dass das Problem in der Sprache der Analysis[965] unter den Bedingungen der Analysis eine analytische Lösung verlangt[966], aber einerseits ursprünglich und eigentlich kein Problem der

---

957 Kuba/Götz 18 f, 39 ff.
958 Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
959 Landau I 30 ff.
960 Meschkowski 11 ff.
961 Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
962 Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
963 Landau I 29 ff.
964964 Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.
965 Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >.

Analyse war[967] und auch nach wie vor kein Problem der Analyse sei[968], und außerhalb der Analyse nachgewiesen wurde, dass das Problem in der Analyse keine Lösung haben könne[969], aber dieser Nachweis, dass das Problem in der Analyse keine Lösung haben könne ist innerhalb der Analysis nicht lösbar[970]. Wenn man hingegen das Problem in die ursprüngliche Sprache außerhalb der Analysis zurück übersetzt und dieses ohnehin nicht analytische Problem nicht mehr in der Sprache der Analysis verschlüsselt betrachtet, dann hat das Problem nicht nur die Lösung, dass das Problem in der Analyse keine Lösung habe[971], sondern ist die Lösung außerhalb der Analysis möglich, die in der Analysis nicht möglich wäre[972], um nicht zu sagen trivial. Es ist also eine Fangfrage.

Dies gilt allerdings nur dann, wenn man die Riemannsche Hypothese[973], die in dieser Formulierung nur außerhalb der Mathematik so lösbar sei, dass vorher die Hypothese so absolut gesetzt wurde[974], dass man vermeint, sie für sich betrachtet, also gleichsam aus sich selber (sui generis), lösen zu können und zu müssen. Wenn man sich jedoch zur Riemann-Hypothese über die Eulersche

---

[966] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[967] Artin 25 f.
[968] Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >.
[969] Artin 3 f: „Der Grundgedanke der hier befolgten Einführung der Gammafunktion stammt von den Herren Bohr und Mollerup. […] Nicht berührt werden die folgenden Punkte der Theorie: […] b) Der Höldersche Satz, dass die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt."
[970] Trost 62 ff; Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >.
[971] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[972] Artin 25 f: Der Umstand, dass eine auf einem anderen, mathematischen Weg, gefundene Lösung, analytisch nachgebildet werden könne, tut dem keinen Abbruch.
[973] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[974] Landau I 30 ff.

Gammafunktion[975] einen anderen, herkömmlicheren Zugang verschafft hatte[976], so ist man zwar um eine Hypothese ärmer, aber um eine Lösung reicher geworden. Dabei gilt es sich einzugestehen, dass hierbei eigentlich nichts zu lösen war, außer vielleicht das Unlösbare, das es nicht gibt. Insofern jedoch dieses Unlösbare sich als nicht vorhanden, also sozusagen als Nulllösung bzw. „Nullstelle" der Riemann-Hypothese[977] erwiesen hatte, die absolute Null, ist sofern eine Trost, als man um eine Lösung und um ein Problem gekommen ist, die es nicht gegeben habe, und sich so die Verluste in Grenzen halten. Das eigentliche Problem war eine Transkription der Eulersche Gammafunktion[978] mit und in dem (Dienste des) Riemann-Integral(s)[979], wobei die Gammafunktion – analog dem Zeugenschutzprogramm – die Identiät gewechselt und die ursprüngliche Identität verloren hatte[980].

„Das Integral war bisher stets über kompakten Mengen definiert, also beschränkten und abgeschlossenen Intervallen, wo die Integrationsgrenzen Teil der Definitionsmenge sind. Die Verallgemeinerung auf unbeschränkte Definitionsbereiche oder Funktionen mit Singularitäten verläuft je nach gewählter Konstruktion etwas unterschiedlich. In der Lebesgue-Theorie ergibt sich die Verallgemeinerung vollkommen natürlich, in der Riemann-Theorie muss man mit Grenzwerten von Integralen über kompakte Bereiche arbeiten; man spricht in diesem Zusammenhang von *uneigentlichen Integralen erster Art*.

Beispiele sind das Integral

[975] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.
[976] Landau I 30 ff.
[977] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[978] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.
[979] Wikipedia, Riemann-Integral, In: < URL >.
[980] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

wo beide Grenzen uneigentlich sind. Besitzt der Integrand an einem Intervallende eine Singularität, so spricht man von *uneigentlichen Integralen zweiter Art*. Sie werden dann wie folgt definiert, wobei wir annehmen, dass der Integrand an der Stelle b singulär ist:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}r = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}r,$$

falls der Grenzwert existiert.

Falls eine Stammfunktion bekannt ist, kann also wie im eigentlichen Fall das Integral an der benachbarten Stelle b' ausgewertet werden und dann der Grenzwert für $b' \nearrow b$ berechnet werden. Ein Beispiel ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\pi}\,\Big|_0^1 = 2,$$

wo der Integrand bei $x = 0$ eine Singularität besitzt.

Sind beide Grenzen uneigentlich wie z.B. gleichartig bei der gaußschen Glockenkurve oder auch erste und zweite Art gemischt, kann das Integral in zwei Teile aufgeteilt und die obigen Schritte für beide Teile durchgeführt werden. Oft besteht jedoch zwischen dem Verhalten an unterer und oberer Grenze ein tieferer Zusammenhang, so dass eine Aufteilung die Berechnung erschweren würde. Z. B. ist das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x\,\mathrm{d}x = -\gamma$$

an der unteren Grenze uneigentlich *zweiter Art* und an oberer Grenze uneigentlich *erster Art*."[981]

Analog der Eulerschen Identität haben wir ein Ergebnis mit Pi, bzw. Wurzel aus Pi $(\sqrt{\pi})$, integriert aus dem Glied $e^{-x^2}\mathrm{d}x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

und wir haben analog das Integral[982]

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = -\gamma$$

mit dem Ergebnis −γ aus dem Glied $e^{-x} \ln \mathrm{x} \, \mathrm{d}x$, wo das Argument im vorigen Integral von x² auf x und dx auf ln x dx geändert wurde[983]. Die Eulersche Identität[984] stellt die Verbindung zeigt über die Trigonometrie die $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i\, sin(\varphi)$ Verbindung zu $\boldsymbol{\pi}$ über die Potenzen der „Eulerschen Zahl" *e* her[985], wo das Argument φ durch $\boldsymbol{\pi}$ ersetzt werden kann und mit $e^{i\pi} + 1 = 0$ ein analoges Resultat bei der Umrechnung mit Pi zeigt[986]. Die Umrechnung $a^x = e^{x \ln a}$ gilt auch für den Lösungsansatz der Riemannschen Zetafunktion[987] wie die Eulersche Zahl *e* statt *n* gesetzt wird

[981] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >.
[982] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.
[983] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >.
[984] Arndt/Haenel 13; Wikipedia, Eulersche Identität. In: URL < URL >.
[985] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; vgl Waldschmidt 4 [248].
[986] Arndt/Haenel 13; Wikipedia, Eulersche Identität. In: < URL >; vgl Prachar 61 ff.
[987] Landau I 30 f: Schreibt log x für ln x. Vgl Landau II 723 ff, 747.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = e^{\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^s} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{2x}+1)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\lambda_n s}$$

denn n^s hat bereits so die Bedeutung $e^{s \ln n}$ bei reellem ln *n*, und die Eulerschen Identität zeigt die trigonometrische Funktion $e^{ix} = cos(x) + i\ sin(x)$ und $e^{-ix} = cos(x) - i\ sin(x)$ als Hyperbel[988]. Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ ist eine Spezialform $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-s \ln n}$ der Dirichletschen Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

und kann allgemein als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\lambda_n s}$$

geschrieben werden[989]. Bei $n! = \frac{x_n n^{n+1/2}}{e^n}$ kann 1/e^n bereits als Element $\frac{1}{e^n} \cdot x_n n^{n+1/2}$ aufgezeigt werden[990]. Für die Umrechnung zwischen $\sqrt{\pi}$ und $-\gamma$ muss man nicht allzu groß ausholen. Sobald sich e^{-x} auf $-\gamma$ zurückführen lässt, kann $1/2(e^{2x}+1)$ in $\zeta(s)$ als auf den gleichen Ausdruck bzw. in den gleichen Zusammenhang zurückgeführt gelten. Hat man bei der Eulerschen Identität durch die Periode mit Pi ganze Zahlen, und gilt für die Gammafunktion[991] $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ mit Ganzen Zahlen[992] die Form $\Gamma(n) = (n-1)!$, so gilt die Riemannsche Hypothese[993] und Formel einerseits mit

[988] Wikipedia, Eulersche Identität. In: URL < URL >.
[989] Landau II 723 ff.
[990] Peters, Die Fakultät, in: < URL >.
[991] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >; vgl Arndt/Haenel 13.
[992] Peters, Die Fakultät, in: < URL > 12.

dem Satz von Wilson[994] $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ als richtig erwiesen und andererseits als eine Schreibweise[995] – allenfalls Ableitung – der Gammafunktion von Euler[996] ($\Gamma(n) = (n - 1)!$).

„Die Theorie der Gammafunktion hat sich an dem Problem entwickelt, den Begriff der Fakultät[997] von natürlichen Zahlen in sinngemäßer Weise auf beliebige Zahlen zu erweitern. Man wird das Problem nun in der Weise anzupacken trachten, dass man sich einen Ausdruck verschafft, der für ganze Zahlen den Wert n! besitzt, und der sich andererseits auf beliebige Zahlwerte verallgemeinern lässt[998]. Bei der Umschau nach einem solchen Ausdruck stoßen wir auf das aus der Integralrechnung wohlbekannte Integral:

$$\int_0^\infty e^t t^n \, \mathrm{d}t = n!.$$

Es liegt also nahe, auf der linken Seite die Zahl n durch eine beliebige reelle Zahl zu ersetzen (wofern nur das Integral konvergiert) und so die Funktion n! für alle n zu definieren. Nun ist es aber üblich, nicht diese Funktion einzuführen, sondern eine solche, die für ganzes n den Wert (n – 1)! Besitzt. Der Ansatz

---

[993] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[994] Prachar 3; vgl Rohringer 42 f; Remmert/Ullrich 73; Bartholomé/Rung/Kern 83 f; Paeler, Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, < URL > 8.
[995] Artin 26 ff.
[996] Landau I 30 ff.
[997] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[998] Peters, Die Fakultät, in: < URL > 12.

(4)
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

wird jetzt als natürlich erscheinen[999]. Wir müssen noch feststellen, für welche Werte von x das Integral überhaupt existiert. Beachten wir, dass der Integrand für positive Werte von t kleiner ist als t^{x-1}, so erkennen wir, dass:

$$\int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t < \int_\varepsilon^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x}.$$

Wenn x > 0 ist, findet man so als obere Schranke für $\int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ den Wert $\frac{1}{x}$. Da überdies bei festem x und ablehmenden ε der Integralwert monoton wächst, folgt die Existenz von

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Für alle positiven x.

Für positives t ist jedes Glied der Reihe für e^t positiv, so dass für jede ganze Zahl n die Ungleichung $e^t > \frac{t^n}{n!}$ besteht. Daraus folgt $e^{-t} > \frac{n!}{t^n}$, und für den Integranden ergibt sich die andere Abschätzung: $e^{-t} t^{x-1} < \frac{n!}{t^{n+1-x}}$. Man findet folglich, wenn die ganze Zahl n größer als x + 1 ist, dass $\frac{n!}{n-x}$ bei festem x eine obere Schranke für $\int_1^u e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ ist. Wächst n, so wächst auch der Integralwert, so dass

[999] Peters, Die Fakultät, in: < URL > 12.

$$\int_1^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{u=+\infty}\int_1^{u} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

existiert. Man sieht also, dass die Definition (4) für alle positiven x sinnvoll ist.

Ersetzt man in (4) x durch x + 1 und integriert das Näherungsintegral partiell, so erhält man:

$$\int_1^{u} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}t^{x}\Big|_{\varepsilon}^{u} + x\lim_{u=+\infty}\int_1^{u} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = e^{-\varepsilon}\varepsilon^{x} - e^{-u}u^{x} + x\int_{\varepsilon}^{u} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Das Glied $e^{-u}u^{x}$ ist ähnlich wie vorhin kleiner als $\frac{n!}{n^{n-x}}$. Läßt man ε nach 0 und u nach +∞ gehen, so verschwinden die beiden ersten Glieder der rechten Seite, und man erhält die Formel:

(5) $$\boxed{\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).}$$

Diese Funktionsgleichung ist der Ausgangspunkt der ganzen weiteren Theorie. Sie stellt die Verallgemeinerung der Gleichung n! = n·(n – 1)! auf nicht ganze Werte von n dar.“[1000]

Die sogenannte Gammafunktion galt ursprünglich und eigentlich für die Fakultät[1001] von natürlichen Zahlen n! und meint erst später die Theorie, bzw. das Unterfangen, die Fakultätsfunktion zu verallgemeinern und von den natürlichen Zahlen auf beliebige Zahlen zu erweitern[1002]. Entsprechend wurde die simple Formel n! für die natürliche Zahlen so umfunktioniert, dass sie einerseits für ganze Zahlen weiterhin galt, aber andererseits sich auf andere Zahlenwerte übertragen lässt. Man suchte und fand dafür das wohlbekannte Integral:

[1000] Artin 9 ff.
[1001] Nielsen 13; Peters, Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, in: < URL > 4.
[1002] Peters, Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, in: < URL > 4.

$$\int_0^\infty e^t t^n \,\mathrm{d}t = n!,$$

das sich anbot, die Zahl n auf der linken Seite durch eine beliebige reelle Zahl zu ersetzen und so die Funktion n! für alle n zu definieren[1003]. Ersetzt man x durch x + 1 und lässt das Integral einerseits gegen 0 und andererseits gegen +∞ gehen, so erhält man die Funktionsgleichung Γ(x + 1) = xΓ(x), die als Verallgemeinerung der Gleichung n! = n·(n – 1)! auf nicht ganze Werte von n gilt[1004]. Das Integral eingesetzt Γ(x) = (n – 1)! lehrt, dass Γ(1) = 1 und die Stätigkeit und Differenzierbarkeit von Γ(x) erwiesen ist[1005].

[1003] Artin 9.
[1004] Artin 10 f.
[1005] Artin 12.

Die Folge $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$

Die Funktion y = log Γ(x) ist konvex und verläuft glatt, was sie vor anderen Funktionen f(x + 1) = xf(x) auszeichnet. Ausgerechnet ergibt f(n) = (n − 1)! und log (n − 1) ≤ log n oder log $(n - 1)^x(n - 1)! \leq \log f(x + n) \leq \log n^x(n - 1)!$. Ersetzen wir n durch n + 1 und lassen n über alle Grenzen wachsen, erhalten wir $f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{u^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \Gamma(x)$, deren Gültigkeit zunächst nur für 0 < x ≤ 1 bewiesen ist, doch wenn der Limes für $\Gamma(x)$ mit $f(x)$ definiert wird, so genügt sie der Gleichung $f(x + 1) = xf(x)$, womit nach Gauß die Formel allgemein bewiesen ist, weil sie für $\Gamma(x)$ im Intervall 0 < x ≤ 1 bewiesen wurde[1006]. In diesem allgemeinen Beweis von Gauß kommt zum Vorschein, dass die Gammafunktion Γ(x + 1) = xΓ(x), ein Spezialfall für die verallgemeinerte Funktion f(x + 1) = xf(x), im Intervall 0 < x ≤ 1 ist.

Bei der Riemannschen Hypothese[1007] ist die Fragestellung einerseits analog aber andererseits genau umgekehrt, indem die eine Ableitung oder Variante der Gammafunktion in der schon verallgemeinerten Form als Ausgangsposition und auch als Zielsetzung, allerdings ohne Rückkoppelung an die Gammafunktion genommen wurde, und so konnte alles bis auf das Intervall Intervall 0 < x ≤ 1 erschlossen und bewiesen werden[1008]: Das große Rätsel der Riemannsche Zetafunktion[1009] ist das In-

[1006] Artin 13 f.
[1007] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1008] Landau I 30 ff.
[1009] Trost 62 ff.

tervall 0 ≤ x ≤ 1 der Eulerschen Gammafunktion[1010]. Die Riemannsche Hypothese geht irrig von der falschen Annahme aus, dass die Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion[1011] in dem kritischen Intervall, obwohl von dort abgeleitet[1012], nicht auf die Gammafunktion[1013] rückführbar und nicht bewiesen sei. Tatsächlich ist aber die Rimann-Hypothese[1014], bzw. die Gammafunktion für das kritische Intervall 0 < x ≤ 1, bzw. von dort abgeleitet – allgemein – von Gauß schon seinerzeit als richtig bewiesen worden[1015].

Weierstrass hatte mit der Einfügung der Eulerschen Konstante $C = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = \gamma$ die Formel der Gammafunktion umgestaltet[1016]:

$$\Gamma(x) = e^{Cx}\cdot\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{p=1}^{n}\frac{\frac{x}{e^{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}} = e^{C\nu}\cdot\frac{1}{x}\cdot\prod_{p=1}^{n}\frac{\frac{x}{e^{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}$$

Die Differenzierbarkeit von Γ(x) kann für positive x gezeigt werden, was dann – mit Hilfe der Funktionsgleichung – negative x mit einschließt. Daraus lässt sich die Formel Γ(x) = $e^{\log \Gamma(x)}$ ablesen. Mit x als ein auf 0 < u ≤ k beschränktes Intervall gilt für alle x > 0 die konvergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{k}{\nu^2} = k\left(\frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\cdots\right)$ ableitbar ist bis $\frac{1}{x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{k}{(x+\nu)^2}$. Wiederholtes Differenzieren führt auf immer besser konvergente Reihen[1017]: $\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-1)!}{(x+\nu)^k}; k \geqq 2.$

[1010] Artin 13 f; Landau I 419.
[1011] Peters, Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, in: < URL > 4.
[1012] Landau I 30 ff.
[1013] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.
[1014] Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1015] Landau I 30 ff.
[1016] Artin 14.
[1017] Artin 15 f.

Euler hat außer dem bisher abgehandelten Integral, das er das Zweite Integral nannte, noch ein zweites mit Namen Erstes Integral[1018], die man früher auch Betafunktion nannte[1019]. Dieses erfüllt auf Anhieb zwei der drei notwendigen Bedingungen und damit lässt sich auch die dritte Bedingung nachweisen, oder die Formel entsprechen anpassen: f(x) = f(1)·Γ(x). So wird allgemein f(x) = f(y)·Γ(x) und das wertet das Integral aus

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-t}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Die Formel gilt für positive x und y. Setzt man x = ½ und y = ½ und führt t = sin² φ aus, so erhält man:

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$$

Da $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ positiv sein muss, erhält man die merkwürdige und wichtige Formel[1020]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Damit kann auch Γ(n + 1/2) für ganzes n berechnet werden. Für $0{,}5! = 0{,}5\sqrt{\pi}$ und $(-0{,}5!) = \sqrt{\pi}$. Und man kann in diese Richtung[1021] weiter gehen:

„γ is also given by Mertens theorem

[1018] Artin 16 f.
[1019] Nielsen 14 ff.
[1020] Artin 17 f.
[1021] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.

$$e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}. \tag{14}$$

where the product is over primes p. By taking the logarithm of both sides, an explicit formula for γ is obtained,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{p\le x} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) - \ln\ln x \right]. \tag{15}$$

It is also given by series

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \right] \tag{16}$$

due to Euler, which follows from equation (1) by first replacing $\ln n$ by $\ln(n+1)$, which works since

$$\lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln n] = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0 \tag{17}$$

and then substituting the telescoping sum

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \tag{18}$$

for $\ln(n+1)$, which is its sum since again

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k, \tag{19}$$

obtaining

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \right] \tag{20}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \right] \tag{21}$$

which equals equation ($\diamondsuit$).

Other series include

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} \tag{22}$$

$$= \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\zeta(n+1)}{2^n(n+1)} \tag{23}$$

(Gourdon and Sebah 2003, p. 3), where $\zeta(z)$ is the Riemann zeta function, and

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lfloor \lg n \rfloor}{n} \tag{24}$$

(Vacca 1910, Gerst 1969), where lg is the logarithm to base 2 and $\lfloor x \rfloor$ is the floor function.“[1022]

Und so weiter:

„(Nielsen (1897) earlier gave a series equivalent to (24),

$$\gamma = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{n}{(2k+1)(2k+2)}. \quad (25)$$

To see the equivalence of (25) with (24), expand

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \quad (26)$$

and add

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \quad (27)$$

to Nielsen's equation to get Vacca's formula.

The sums

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=2^n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad (28)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2^{k-j}+j}{j}^{-1} \quad (29)$$

(Gosper 1972, with $k - j$ replacing the undefined i; Bailey and Crandall 2001) can be obtained from equation (24) by rewriting as a double series, then applying Euler's series transformation to each of these series and adding to get equation (29). Here, $\binom{n}{k}$ is a binomial coefficient, and rearranging the conditionally convergent series is permitted because the plus and minus terms can first be grouped in pairs, the resulting series of positive numbers rearranged, and then the series ungrouped back to plus and minus terms.

The double series (28) is equivalent to Catalan's integral

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2^n-1} dx \quad (30)$$

[1022] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.

&/To see the equivalence, expand $1/(1+x)$ in a geometric series, multiply by x^{2^n-1}, and integrate termwise (Sondow and Zudilin 2003).

Other series for γ include

$$\gamma = \frac{3}{2} - \ln 2 - \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m \frac{m-1}{m}[\zeta(m)-1] \tag{31}$$

(Flajolet and Vardi 1996), and

$$\gamma = \frac{2^n}{e^{2^n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{mn}}{(m+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{t+1} - n \ln 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n e^{2^n}}\right) \frac{2^n e^{2^n}}{e^{2^n}}. \tag{32}$$

(Bailey 1988), which is an improvement over Sweeney (1963).

A rapidly converging limit for γ is given by

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n-1}{2n} - \ln n + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{\zeta(1-k)}{n^k}\right)\right] \tag{33}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n-1}{2n} - \ln n + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\left(1 + \frac{B_k}{n^k}\right)\right]. \tag{34}$$

where B_k is a Bernoulli number[1023] (C. Stingley, pers. comm., July 11, 2003).

Another limit formula is given by

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma(n+1)n^{1+1/n}}{\Gamma\left(2+n+\frac{1}{n}\right)} - \frac{n^2}{n+1}\right] \tag{35}$$

(P. Walker, pers. comm., Mar. 17, 2004). An even more amazing limit is given by

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \zeta\left(\zeta(z)\right) - 2^x + \left(\frac{4}{3}\right)^x + 1 \tag{36}$$

(B. Cloitre, pers. comm., Oct. 4, 2005), where $\zeta(z)$ is the Riemann zeta function.

Another connection with the primes was provided by Dirichlet's 1838 proof that the average number of divisors $d(n) = \sigma_0(n)$ of all numbers from 1 to n is asymptotic to

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} d(k)}{n} \sim \ln n + 2\gamma - 1 \tag{37}$$

(Conway and Guy 1996). de la Vallée Poussin (1898) proved that, if a large number n is divided by all primes $\leq n$, then the average amount by which the quotient is less than the next whole number is γ.

[1023] Knopp 185 f, 207 ff.

An elegant identity for γ is given by

$$\gamma = \frac{S_0(z)-K_0(z)}{l_0(z)} - \ln\left(\frac{1}{2}z\right). \quad (38)$$

where $l_0(z)$ is a modified Bessel function of the first kind, $K_0(z)$ is a modified Bessel function of the second kind, and

$$S_0(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{2k} H_k}{(k!)^2} \quad (39)$$

where H_n is a harmonic number (Borwein and Borwein 1987, p. 336; Borwein and Bailey 2003, p. 138). This gives an efficient iterative algorithm for γ by computing

$$B_k = \frac{B_{k-1}n^2}{k^2} \quad (40)$$

$$A_k = \frac{1}{k}\left(\frac{A_{k-1}n^2}{k} + B_k\right) \quad (41)$$

$$U_k = U_{k-1} + A_k \quad (42)$$

$$V_k = V_{k-1} + B_k \quad (43)$$

with $A_0 = -\ln n$, $B_0 = 1$, $U_0 = A_0$, and $V_0 = 1$ (Borwein and Bailey 2003, pp. 138-139).

Reformulating this identity gives the limit

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{n^k}{k!}\right)^2 H_k}{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n^k}{k!}\right)^2} - \ln n\right] = \gamma \quad (44)$$

(Brent and McMillan 1980; Trott 2004, p. 21).

Infinite products involving γ also arise from the Barnes G-function with positive integer n. The cases $G(2)$ and $G(3)$ give

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{-1+1/(2n)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e^{1+\gamma/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (45)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{-2+2/n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \frac{e^{3+2\gamma}}{2\pi} \quad (46)$$

The Euler-Mascheroni constant is also given by the expressions

$$\gamma = -\Gamma'(1) \quad (47)$$

$$= -\psi_0(1). \quad (48)$$

where $\psi_0(1)$ is the digamma function (Whittaker and Watson 1990, p. 236),

$$\gamma = \lim_{s\to 1}\left[\zeta(z) - \frac{1}{s-1}\right] \quad (49)$$

(Whittaker and Watson 1990, p. 271), the antisymmetric limit form

$$\gamma = \lim_{s\to 1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{s^n}\right) \quad (50)$$

(Sondow 1998), and

$$\gamma = \lim_{s\to\infty}\left[x - \Gamma\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad (51)$$

(Le Lionnais 1983).

The difference between the nth convergent in equation (◇) and γ is given by

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \gamma = \int_n^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}dx, \quad (52)$$

where $\lfloor x\rfloor$ is the floor function, and satisfies the inequality

$$\frac{1}{2(n+1)} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \gamma < \frac{1}{2n} \quad \frac{1}{2(n+1)} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \gamma < \frac{1}{2n} \quad (53)$$

(Young 1991).

The symbol γ is sometimes also used for

$$\gamma' \equiv e^{\gamma} \approx 1{,}781072 \quad (54)$$

(Sloane's A073004; Gradshteyn and Ryzhik 2000, p. xxvii).

There is a the curious radical representation

$$e^{\gamma} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\right)^{1/3}\left(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\right)^{1/4}\left(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\right)^{1/5}\ldots \quad (55)$$

which is related to the double series

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\ln(k+1) \quad (56)$$

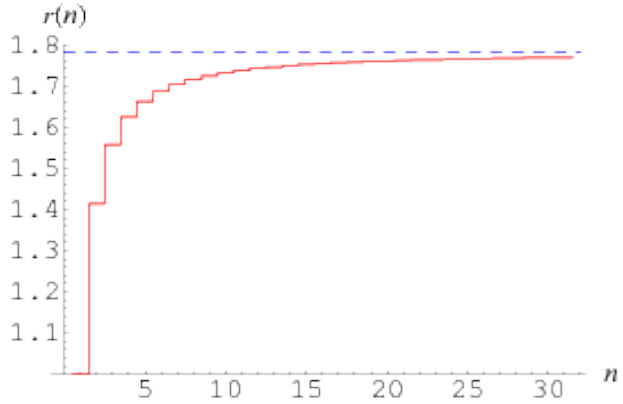
and $\binom{n}{k}$ a binomial coefficient (Ser 1926, Sondow 2003b, Guillera and Sondow 2005). Another proof of product (55) as well as an explanation for the resemblance between this product and the Wallis formula-like 'faster product for π'

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/2} \left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\right)^{1/4} \left(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\right)^{1/8} \left(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\right)^{1/16} \ldots \tag{57}$$

(Guillera and Sondow 2005, Sondow 2005), is given in Sondow (2004). (This resemblance which is made even clearer by changing $n \to n+1$ in (57).) Both these formulas are also analogous to the product for e given by

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{1/1} \left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\right)^{1/2} \left(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\right)^{1/3} \left(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\right)^{1/4} \ldots \tag{58}$$

due to Guillera (Sondow 2005).



The values r(n) obtained after inclusion of the first n terms of the product for e^{γ} are plotted above.

A curious sum limit converging to γ is given by

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - \frac{n}{k} \right) = \gamma \tag{59}$$

(Havil 2003, p. 113).[1024]

[1024] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.

Die Folge 1/12n

Die Zahl n!³ wächst stärker mit n als $n^n e^{-n}$ aber schwächer als $n^{n+1} e^{-n}$. Durch n dividiert erhält man das Wachstum von Γ(x) – eingeschlossen – zwischen $n^{n-1} e^{-n}$ und $n^n e^{-n}$. Durch passende Wahl der im Exponenten stehenden Funktion μ(x) kann in f(x) die Entsprechung zur Gammafunktion erreicht werden. Man ersetzt x durch x + 1 und erreicht durch Division

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \cdot x \cdot e^{-1} \cdot e^{\mu(x+1)-\mu(x)}$$

Es konnte bewiesen werden, dass f(x) sich nur um einen konstanten Faktor von Γ(x) unterscheidet[1025]. Man erhält nach einigen Zwischenschritten, die hier übersprungen werden, für g(x)

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = g(x) = \frac{1}{3\cdot(2x+1)^2} + \frac{1}{5\cdot(2x+1)^4} + \frac{1}{7\cdot(2x+1)^6} + \cdots$$

Durch Ersetzen auf der rechten Seite die Zahlen 5, 7, 9, … durch 3, wodurch eine geometrische Reihe entsteht mit dem Anfangsglied $\frac{1}{3\cdot(2x+1)^2}$ und dem Quotienten $\frac{1}{(2x+1)^2}$. Ihre Summe hat den Wert:

$$\frac{1}{3\cdot(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(2x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(2x+1)}$$

Die Konvergenz der Majorantenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)}\right)$$

[1025] Artin 18 f.

ist trivial und der Summenwert ist 1/12x. Damit ist alles bewiesen und wir können schreiben:

$$\mu(x) = \frac{\theta}{12x},$$

wo θ eine von x abhängige Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet[1026]. Bei geeigneter Wahl der Konstanten a ist die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = a \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{x+\mu(x)} = a \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}$$

und eine ganze Zahl n für x gesetzt und mit n multipliziert erhalten wir:

$$n! = a \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}$$

Daraus berechnet sich der Wert der Konstante a mit p als natürliche Zahl:

$$f(x) = p^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right).$$

x mit 1 vermehrt nimmt p^x den Faktor p an,

$$\Gamma\left(\frac{x+\nu}{p}\right)$$

geht in den nächsten Faktor über, und

$$\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)$$

wird

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+1\right) = \frac{x}{p}\Gamma\left(\frac{x}{p}\right).$$

Im Ganzen multipliziert sich f(x) mit x. Unsere Funktion wird = $a_p\Gamma(x)$, wo a_p eine von p abhängige Konstante[1027] ist (für x = 1). Bei x = k/p erhält man durch einfache Umrechnung und einigen Zwischenschritten, die hier übersprungen werden,

[1026] Artin 20 f.
[1027] Artin 21 f.

$$a_p = p \cdot \lim_{\mu=\infty} \frac{(n!)^p p^{np}}{(np)!\, n^{\frac{p-1}{2}}}$$

worin

$$(n!)^P = a^p \cdot n^{np+\frac{p}{2}} e^{-np} \cdot e^{\frac{\theta_1 p}{12n}}$$

und

$$(np)! = a(np)^{np+\frac{1}{2}} e^{-np} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12np}}$$

gesetzt wurden. Wir erhalten:

$$a_p = \sqrt{p} a^{p-1} \cdot \lim_{\mu=\infty} e^{\frac{\theta_1 p}{12n} - \frac{\theta_2}{12np}}$$

Oder endlich:

$$a_p = \sqrt{p} a^{p-1}.$$

Berechnet man den Wert von a_2 direkt, so folgt:

$$a_2 = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi} = a\sqrt{2}.$$

Damit bestimmt sich die fragliche Konstante $a = \sqrt{2\pi}$ und $a_p = p^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}$. Das ergibt insgesamt[1028] für große Werte von Γ(x) die sogenannte

Stirlingsche Formel[1029] (wo μ(x) = θ/12x eine Voraussetzung zu p² = 24n + 1 ist):

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{x+\mu(x)},$$

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x + n + \frac{1}{2}\right)\left(\log\left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1\right) = \frac{\theta}{12x}$$

[1028] Artin 23.
[1029] Pommerening, Klaus: Kryptologie, in: < URL >.

$$\mathrm{n!} = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

Von **Gauß** ist die allgemeine Formel:

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\Gamma(\mathrm{x})$$

und die speziell für p = 2 von **Legendre**:

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(\mathrm{x}).$$

Aufschlussreich in dieser Zusammenstellung ist die Umrechnung der komplexen Formel n! von Stirling[1030] $n! = a \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}$ mit der Gaußschen Formel[1031] für die Konstante a mit p als natürliche Zahl:

$$f(x) = p^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right).$$

Eine weitere wichtige Funktionsgleichung für die Gammafunktion besteht im Zusammenhang mit dem Sinus: $\varphi(\mathrm{x}) = \Gamma(\mathrm{x})\Gamma(1-\mathrm{x})\sin\pi\mathrm{x}$. Die Funktion ist zunächst für ein nicht ganzzahliges Argument definiert und geht um 1 vermehrt von $\Gamma(\mathrm{x})$ in $x\Gamma(\mathrm{x})$ über. Die Funktion $\Gamma(1-\mathrm{x})$ geht in

$$\Gamma(-\mathrm{x}) = \frac{\Gamma(1-\mathrm{x})}{-\mathrm{x}}$$

über, und $\sin\pi\mathrm{x}$ wechselt das Vorzeichen. Es handelt sich also um eine periodische Funktion mit der Periode 1: $\varphi(\mathrm{x}+1) = \varphi(\mathrm{x})$. In der Relation von Legendre

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = b \cdot 2^{-x}\Gamma(\mathrm{x})$$

wo die (früher bestimmte) Konstante b vernachlässigt wird, kann x durch 1 – x ersetzt werden:

[1030] Pommerening, Klaus: Kryptologie, in: < URL >.
[1031] Artin 21 ff.

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)=b\cdot 2^{-x}\Gamma(1-\mathrm{x})$$

woraus durch Einsetzung

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi\mathrm{x}}{2}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\cos\frac{\pi\mathrm{x}}{2}-\frac{b^2}{4}\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(1-\mathrm{x})\sin\pi\mathrm{x}$$

umgerechnet werden kann[1032]:

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=d\cdot\varphi(x),$$

wo d eine mit b zusammenhängende Konstante ist und ebenfalls vernachlässigt wird. Die Funktion φ(x) korrespondiert einerseits mit der Gammafunktion und andererseits mit Sinus:

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma(1+\mathrm{x})}{x}\Gamma(1-\mathrm{x})\sin\pi\mathrm{x}=\Gamma(1+\mathrm{x})\Gamma(1-\mathrm{x})\cdot\left(\pi-\frac{\pi^3\mathrm{x}^2}{3!}+\frac{\pi^5\mathrm{x}^4}{5!}-\cdots\right).$$

Die rechte Seite dieser Funktion hat auch für x = 0 einen Sinn und stellt eine dort unbeschränkt differenzierbare Funktion dar. Es ist daher zweckmäßig, die Definition von φ(x) zu erweitern, indem man anstelle von x = 0 den Wert π vorschreibt. Wenn aufgrund der Periodizität der Funktion π als Wert von φ(x) für jedes ganzzahlige Argument definiert wird, dann ist φ(x) überall stätig und beliebig differenzierbar. Obwohl die Relation $\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=d\cdot\varphi(x)$ nur für nicht ganzzahliges x bewiesen ist, kann mit Einsetzung eines ganzzahligen x die Allgemeingültigkeit von φ(x), aufgrund der Stätigkeit, gezeigt werden[1033]. Das Vorzeichen von φ(x) ist im Intervall 0 < x < 1 für alle x positiv. Bedeutet g(x) den zweiten Differenzialquotienten von log g(x), so ist g(x) auch periodisch mit der Periode 1 und genügt wegen der Funktionsgleichung

$$\frac{1}{4}\left(\mathrm{g}\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{g}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)=g(\mathrm{x}).$$

[1032] Artin 23 f.
[1033] Artin 24 f.

Da g(x) im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ stätig ist, ist g(x) in diesem Intervall beschränkt und diese Ungleichung muss wegen der Periodizität für alle x richtig sein, etwa $g(x) \leqq M$. Mit Helglotz kann das Verschwinden von g(x) gezeigt werden: $|g(x)| \leqq \frac{1}{4}\left|\mathrm{g}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|\mathrm{g}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| \leqq \frac{M}{4} + \frac{M}{4} = \frac{M}{2}$. Damit ist die Schranke M auf M/2 herabgedrückt. Eine Wiederholung führt auf die Schranke M/4 usw. Man sieht, dass

- die Schranke für g(x) beliebig klein gemacht werden kann,
- also muss g(x) = 0 sein.
- g(x) war der zweite Differenzialquotient von log φ(x): Demnach ist log φ(x) eine lineare Funktion.
- Aufgrund der Periodizität muss log φ(x), also φ(x) selbst, konstant sein.
- Weil ein Wert von φ(x) bekannt ist, nämlich $\varphi(0) = \pi$, so gilt $\varphi(\mathrm{x}) = \pi$ für alle x.

Die Funktionsgleichung von Euler $\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(1-\mathrm{x}) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ kann in die Form $\sin \pi x = \frac{\pi}{-x\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(-\mathrm{x})}$ gebacht werden, worin die Werte der Weierstassschen Produktformel $\Gamma(\mathrm{x})$ und $\Gamma(-\mathrm{x})$ eingetragen werden können $\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right)$, was zu beweisen war. Dieses Ergebnis für $\sin \pi x$ vorausgesetzt, gäbe es – auf dem umgekehrten Wege – noch andere Beweise, die hier der Analysis überlassen werden[1034]. Mit der Erschließung der Gammafunktion sind zumindest im Ansatz alle anstehenden Fragen beantwortet. Das Eulersche Integral $\int_0^{\infty} e^t t^n \,\mathrm{d}t = n!$ kann mit der Gammafunktion

$$\Gamma(\mathrm{x}) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{x-1} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{t^{\frac{1}{z}}} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}t$$

beschrieben werden. Wenn x statt 1/x geschrieben wird ergibt der Spezialfall x = 2:

[1034] Artin 25 f.

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_0^{\infty} e^{t^{\frac{1}{z}}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Die Zahl solcher Umformungen kann so gut wie ins Unermessliche fortgesetzt werden. Ein für die analytische Zahlentheorie wichtiges Beispiel ist bei a > 0, wo die Substitution t = aτ auf das Integral führt:

$$\frac{\Gamma(\mathrm{x})}{\mathrm{a}^{\mathrm{x}}}=\int_0^{\infty} e^{-at}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Im Eulerschen Integral liefern die Substitutionen $t=\frac{\tau}{\tau+1}$ und $\sin^2\varphi$ die Darstellungen:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(\mathrm{y})}{\Gamma(x+y)}=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,\mathrm{d}t$$

und

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(\mathrm{y})}{\Gamma(x+y)}=\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi)^{2x-1}(\cos\varphi)^{2y-1}\,\mathrm{d}\varphi$$

Die mit y = 1 – x die Spezialfälle ergeben:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 t^{x-1}\,(1-\mathrm{t})^{-\mathrm{x}}\mathrm{d}t&=\frac{\pi}{\sin\pi x}\\ \int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t&=\frac{\pi}{\sin\pi x}\\ \int_0^{\pi/2}(\mathrm{tg}\,\varphi)^{2\mathrm{x}-1}\,\mathrm{d}\varphi&=\frac{\pi}{\sin\pi x}\end{aligned}\right\}\ 0<\mathrm{x}<1$$

Für die Gammafunktion selbst ist eine Integraldarstellung des Fehlers μ(x) in der Stirlingschen Formel von Bedeutung[1035]. Durch Einführung einer unstetigen – mit 1 periodischen – Funktion H(t) = (1/2) – t, und durch die Definition H(0) = 0 in 0 < t < 1, kann das Integral der Gewinnung des Ausgangs der Stirlingschen Reihe als Verbesserung der Stirlingschen Formel gezeigt werden.

$$\mu(x) = \int_0^\infty \frac{H(x)}{t+x} dt$$

Man führt die folgende Funktion ein[1036]

$$H_{2n}(t) = 2 \cdot (-1)^{n-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi t}{(2\nu\pi)^{2n}}$$

$$H_{2n-1}(t) = 2 \cdot (-1)^{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi t}{(2\nu\pi)^{2n-1}}$$

Etwas vereinfacht und abgekürzt kann man schreiben

$$\int_0^\infty H_n(t)dt = H_{n+1}(t) - H_{n+1}(0)$$

Die rationalzahligen Funktionen $H_n(t)$ sind periodisch mit der Periode 1, so dass es genügt, sie im Intervall $0 \leqq t < 1$ zu kennen. Wenn der (bekannte) Beweis der Rationalität der Werte übersprungen wird, wobei $H_{n+2}(1)$ ausfällt, kommt man auf die Formel:

$$0 = \int_0^1 \varphi(t)d! + H_{n+1}(0),$$

[1035] Artin 27 f.
[1036] Artin 28 f.

mit deren Hilfe man $H_{n+1}(0)$ berechnen kann und als rationale Zahl erkennt[1037]. Setzen wir n als ungerade voraus, so hat $H_{n+1}(0) - H_{n+1}(t)$ stets das gleiche Zeichen und ist nach dem Mittelwertsatz

$$-\int_0^\infty \frac{H_n(t)(n-1)!}{(t+x)^n}\,dt = n!\,(H_{n+1}(0) - H_{n+1}(\tau))\int_0^\infty \frac{dt}{(t+x)^{n+1}}.$$

Da alle Funktionswerte $H_{n+1}(0) - H_{n+1}(\tau)$ zwischen 0 und $H_{n+1}(0)$ liegen, kann man auch schreiben

$$-\int_0^\infty \frac{H_n(t)(n-1)!}{(t+x)^n}\,dt = \frac{\theta \cdot H_{n+1}(0)(n-1)!}{x^n}\ (0<\theta<1)$$

Mit Berücksichtigung des Verschwindens von $H_{2n+1}(0)$ lautet das Ergebnis:

$$\mu(x) = \frac{H_2(0)0!}{x} + \frac{H_1(0)2!}{x^3} + \cdots + \frac{H_{2n-1}(0)(2n-4)!}{x^{2n-3}} + \theta\,\frac{H_{2n}(0)(2n-2)!}{x^{2n-1}}$$

In dieser Entwicklung darf man n nicht über alle Grenzen wachsen lassen, da die Reihe divergieren würde[1038]. Hält man n aber in mäßigen Grenzen, so erhält man ganz brauchbare Darstellungen. Bricht man zum Beispiel bei $H_8(0)$ ab, so lautet die Darstellung:

$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{\theta}{1680x^7}$$

Die Zahlen 1680 = 140·12; 1260 = 105·12; 360 = 30·12; in μ(x) zeigen die Verbindung zur Formel 24n und x^{2n-1} zu der Zetafunktion[1039]. Auf jeden Fall ist damit ein Weg gegeben, Γ(x) zu berechnen. Für Kenner ist der Zusammenhang der Zahlen $H_n(0)$ mit den sogenannten Bernoullischen Zahlen tri-

[1037] Artin 29.
[1038] Artin 30.
[1039] Trost 62 ff.

vial[1040]. Die Bernoulli-Zahlen wiederum finden sich in Tangens[1041], Kosekans, Tanges Hyperbolicus[1042].

Zusammenfassend kann zu den praktischen Ausführungen und Beweisen festgehalten werden, dass in der theoretischen Reflexion einige ausschließliche Eigenschaften der Gammafunktion diese nicht lediglich prädestinieren, nur die Lösung schlechthin zu sein, sondern weisen ihr die Stellung der Ausschließlichkeit zu[1043].

- Insofern die Riemannsche Zetafunktion[1044] und daran geknüpfte Hypothese[1045] nicht nur von der Gammafunktion so abgeleitet wurden[1046], dass sie sich dann abnabeln und autonom und unabhängig weiter entwickelt würden, ohne an ihre Grundlagen noch an- bzw. rückgekoppelt zu sein, sondern noch teilweise ursprüngliche und allenfalls überlagerte Elemente aus der Gammafunktion eliminiert haben, so kann die Riemannsche Hypothese[1047] ihre Lösung und Beweis nur in der Gammafunktion haben.

[1040] Artin 30 f, Havil 93.
[1041] Knopp 185 f, 207 ff.
[1042] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Wikipedia, <0 URL >: „Die ersten Bernoulli-Zahlen lauten B_1, B_2, B_3, ... = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder."
[1043] Artin 32 ff.
[1044] Trost 62 ff.
[1045] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1046] Landau I 30 ff.
[1047] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.

- Die Gammafuntion ist der Boden, auf dem die Zetafunktion stehe[1048]. Es sind zwar zunächst scheinbar auch andere Beweise möglich, so auch ein Beweis in der Analysis[1049], aber schließlich stellt sich die Gammafunktion als die ausschließliche Lösung auch dann heraus, wenn das allenfalls über Umwegen bewiesen werden könnte[1050]: Und die die Lösung ist auch zugleich vollständig.

Andere sind später in diese Richtung weiter gegangen. Havil greift das Resultat von DeTemeple auf bezeichnet die auch bei Artin schon entdeckte Entwicklung als geheimnisvoll:

$$\gamma \approx \gamma_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} - \frac{1}{240n^8} + \cdots + \frac{1}{12n^{14}} \ldots$$

Das den ungeraden Werten s (= 2q – 1) der Zetafunktion[1051] gegenüber gestellt

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2},\ \zeta(-1) = -\frac{1}{12},\ \zeta(-3) = -\frac{1}{120},\ \zeta(-5) = -\frac{1}{252},\ \zeta(-7) = \frac{1}{240},$$

zeigt sich die Identität. Man kann also schreiben

$$\gamma \approx \gamma_n - \zeta(0)\mathrm{n} + \zeta(-1)n^2 - \zeta(-3)n^4 + \zeta(-5)n^6 - \zeta(-7)n^8 + \cdots + \zeta(-1)n^{14} \ldots$$

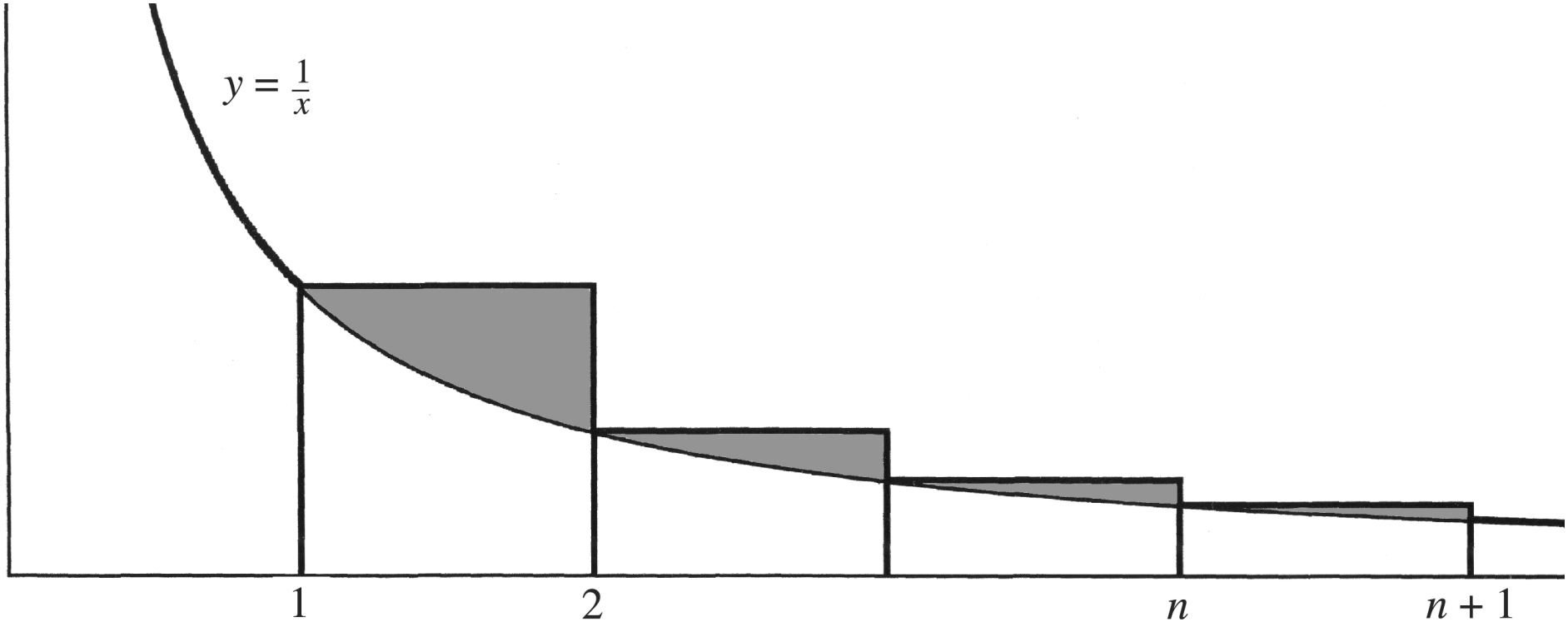
Es treten noch weitere „Geheimnisse" auf. Die Näherung lässt sich schreiben als

$$\gamma \approx \gamma_n - \frac{1}{2n} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{2r}}{2r} \frac{1}{n^{2r}},$$

ein Spezialfall der Euler-Maclaurinschen Summenformel, wobei B_{2r} die sogenannten Bernoullischen Zahlen sind[1052].

[1048] Trost 62 ff.
[1049] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.
[1050] Artin 32 ff.
[1051] Landau I 287, 315; Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >; Landau II 618 f; Prachar 215, 309, 326, 394 f.

Eine ergänzende Bestätigung liefert DeTemple[1053] zur Eulerschen Konstante γ anhand der geometrischen Beschreibung:

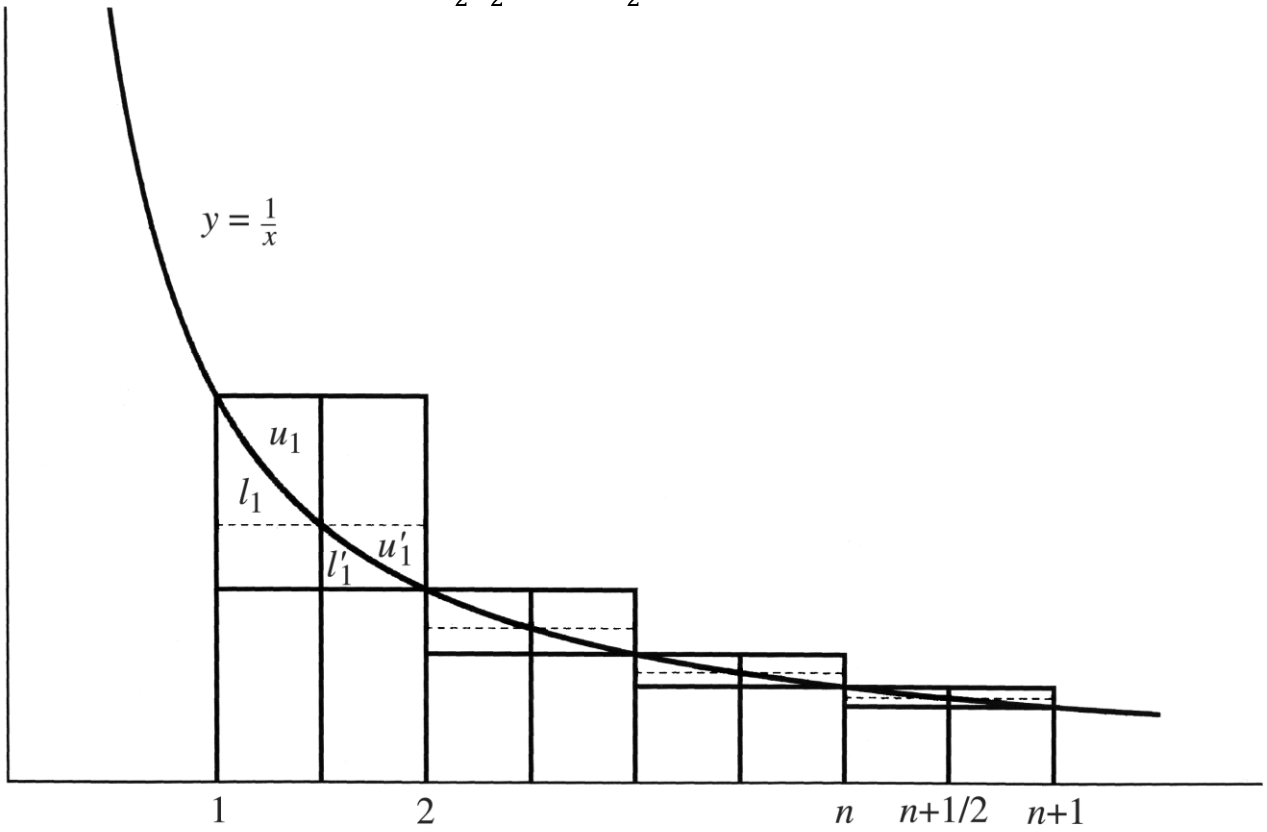


[1052] Havil 93.
[1053] DeTemple, A Geometric Look at Sequences that Converge to Euler's Constant, in: < URL >, Vol. 37. No. 2, March 2006, pp. 128 ff.

Von der Eulerschen Formel C, die später in γ als dritte Konstante neben π und e umbenannt wurde:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma,$$

ausgehend, modifiziert DeTemple nach Havils Formel $w_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}$ die Sequenz von $\gamma=\frac{1}{n}$ bzw. $\gamma=\frac{1}{x}$ in der ersten Graphik in $\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots n+\frac{1}{2}$, wie die nächste Grafikt zeigt:



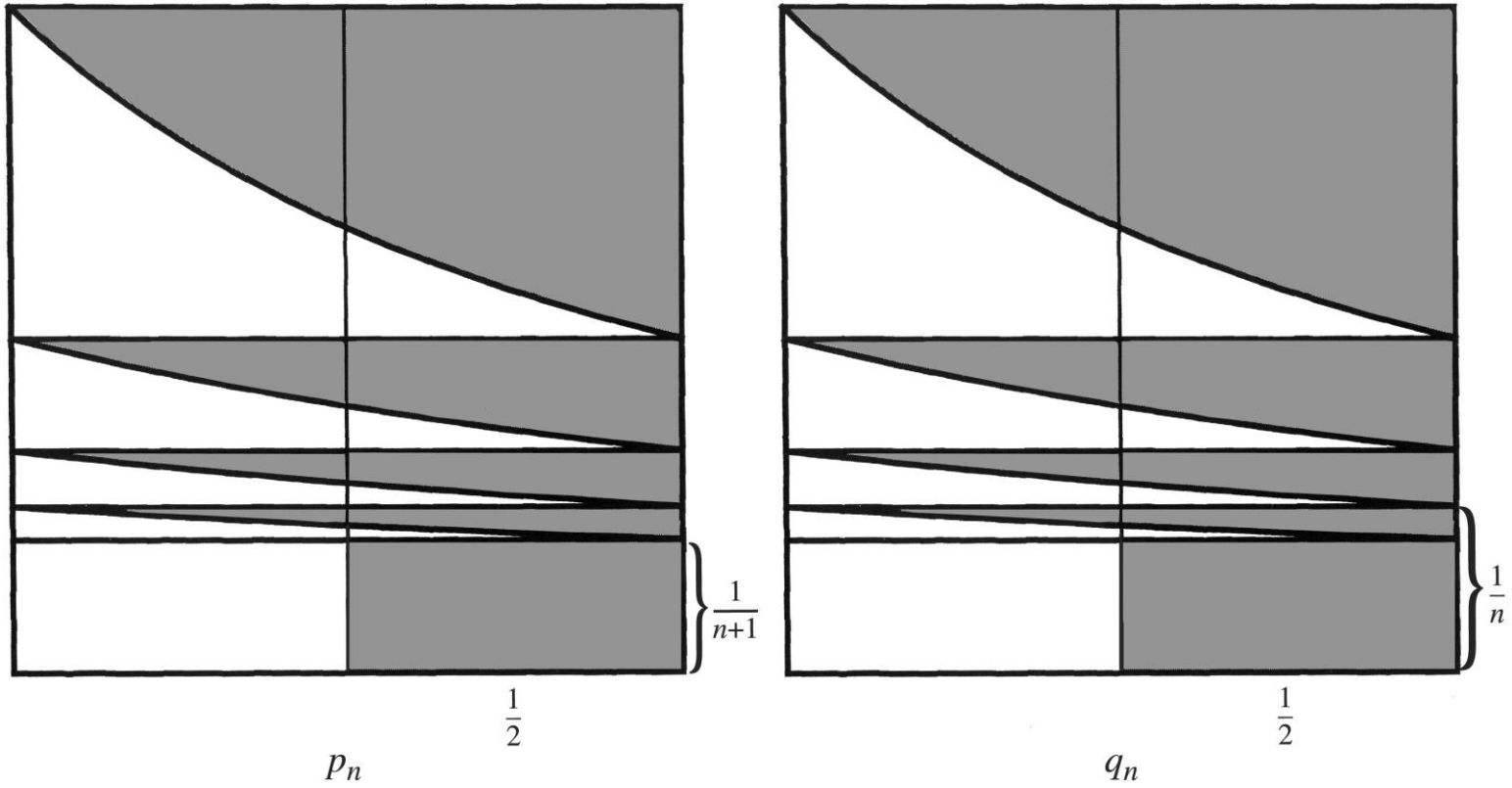
Damit definiert er die Sequenz p_n und q_n bei:

$$p_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \frac{1}{2(n+1)}$$

und

$$q_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

worin die Fehler in der nächsten Grafik gezeigt werden



Darin ist $p_n = q_n - l'_n$ mit $p_n = q_n$ und $q_{n+1} = q_n + u_{n+1} - l'_n$ wo $q_{n+1} < q_n$ und wir haben $u_{n+1} < l'_n$. Daraus ist ersichtlich, dass die Region von l'_n enthalten ist in einem Dreieck der Breite ½ und der Höhe

$$\frac{1}{n+1/2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

und

$$l'_n < \frac{1}{4(n-1)(2n+1)} < \frac{1}{8n^2}.$$

Deshalb,

$$q_n - \frac{1}{8n^2} < p_n < q_n$$

Und wir konnten – zusammenfassend – zeigen, dass

$$p_n < p_{n+1} < q_{n+1} < q_n < p_n + \frac{1}{8n^2}$$

d. h. die Sequenzen q_n und p_n konvergieren monoton gegen γ wie 1/n². Die nachstehende Tabelle vergleicht die Werte der Konvergenz der Sequenzen v_n, w_n, q_n und p_n zu der Eulerkonstante γ = 0,57721…

n	1	2	3	4	5	6
v_n	0,3069	0,4014	0,447	0,4739	0,4916	0,5041
w_n	1	0,8069	0,7347	0,697	0,6739	0,6582
q_n	0,5569	0,5681	0,572	0,5739	0,5749	0,5755
p_n	0,5945	0,5837	0,5806	0,5793	0,5786	0,5782

Die elementare Analysis schließt mit dem schon in früheren Arbeiten errechneten Ergebnis:

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < q_n - \gamma < \frac{1}{24n^2}$$

Das eigentliche Ergebnis bei der Berechnung der Eulerschen Konstante γ ist ein Nebenprodukt dort, nämlich 24n, wird aber sowohl bei Havil, der hier deswegen zitiert wird, wie auch in früheren Arbeiten von DeTemple[1054], wie auch bei Artin[1055], als das mehr oder minder zufällig entdeckte eigentliche Ergebnis – im engeren Sinne – gewichtet. Hier wurde die Tabelle und die Ableitung zu der Eulerschen Kontante ausführlicher zitiert, um zu zeigen, dass sich 24n keineswegs als das Resultat dort ergibt, sondern nur, wenn man das unbedingt so will, und man muss also einen Schritt weiter gehen, um 24n als die Lösung hinter der Lösung aufzuzeigen[1056]. Bei Havil wird die Ableitung überhaupt weggelassen und nach der Eulerschen Formel der Gammafunktion kommt sofort daran anschließend 24n, indem bezüglich Beweis und Ableitung auf DeTemple verwiesen wird[1057]. Vielmehr wird also in der damit befassten Literatur die Gammafunktion nur als Ausgangsposition aufgezeigt, und die Aufmerksamkeit der Formel 24n zugewendet[1058], die so als eine Ableitung der Gammafunktion deklariert wurde, die zugleich als Lösung und – weiter führendes – Ergebnis angesehen werde. Wenn, dann wird die Formel 24n über 12n auf die Eulersche Gammafunktion zurückgeführt[1059], und so neu akzentuiert als die eigentliche Lösung aufgezeigt.

[1054] DeTemple, A Geometric Look at Sequences that Converge to Euler's Constant, in: < URL >, Vol. 37. No. 2, March 2006, p. 131.

[1055] Artin 29 f: Hält man n in mäßigen Grenzen, indem zB man bei $H_8(0)$ abbricht, so lautet die Darstellung:

$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{\theta}{1680x^7}$$

was in μ(x) insb. bei x = 2n die Verbindung zur Formel 24n und x^{2n-1} der Zetafunktion zeigt.

[1056] DeTemple, A Geometric Look at Sequences that Converge to Euler's Constant, in: < URL >, Vol. 37. No. 2, March 2006, p. 130 f.

[1057] Havil 90.

[1058] Havil 91 ff.

[1059] Havil 92 f.

$$\rho_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} (\rho_k - \rho_{k+1}) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) < \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-3} < \frac{1}{12} \int_{n}^{\infty} x^{-3}\, dx = \frac{1}{24n^2}$$

Was so als die eine Hälfte des Beweises angehen wird und zweite Hälfte folgt:

$$\rho_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} (\rho_k - \rho_{k+1}) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) < \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)^{-3} < \frac{1}{12} \int_{n+1}^{\infty} x^{-3}\, dx = \frac{1}{24(n+1)^2}$$

Womit der vollständige Beweis erbracht sei[1060]. Und nur um mehr und genauere Dezimalstellen zu bekommen, wird von $1/24n^2$ her weiter gerechnet, so das dieser Formel mit 24n die Gammafunktion nunmehr näher bestimme[1061]. Dabei kann $24n + 1 = p^2$ und 24n als $24n = p^2 - 1 = p^2 - 1^2 = (p + 1)(p - 1)$ geschrieben werden[1062]. Quod erat demonstrandum.

[1060] Havil 92.
[1061] Havil 92 f.
[1062] Waldal 61 f.

Die Folge $6e^{\gamma}/\pi^{1/2}$

Zusammenfassend kann zur Gegenüberstellung der Gammafunktion mit der Zetafunktion und Riemanns Hypothese[1063] festgehalten werden, dass sowohl die Gammafunktion wie auch die Zetafunktion[1064] im Zahlenbereich und damit bei der Berechnung und Beweis zwischen einem Intervall $0 \leq x \leq 1$ einerseits und $x \geq 1$ andererseits unterscheiden, und entweder jeweils zwei Beweise je nach Intervall führen, oder den Beweis eines Intervalls auf das zweite Intervall ausdehnen[1065]. So weit besteht also Übereinstimmung[1066]. Der Unterschied ist, dass im Gegensatz zu der Zetafunktion[1067] die Gammafunktion im Intervall $0 \leq x \leq 1$ beginnt und, wenn, dann von dort auf das Intervall $x \geq 1$ schließt[1068], während die Riemannsche Zetafunktion[1069] und Hypothese vom Intervall $x \geq 1$ ausgeht und auf das Intervall $0 \leq x \leq$ schließen möchte[1070], was die bekannten Schwierigkeiten implizierte. Während die Gammafunktion mühelos das Intervall wechseln und sich im anderen Intervall nicht minder mühelos zur Geltung bringen kann[1071], gelingt genau das der Zetafunktion[1072] auf dem um-

[1063] Landau I 30 ff; vgl Trost 62 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1064] Trost 62 ff.
[1065] Artin 13 f.
[1066] Landau I 30 ff.
[1067] Trost 62 ff.
[1068] Artin 13 f.
[1069] Trost 62 ff.
[1070] Landau I 30 ff.
[1071] Artin 13 f, 30 ff.
[1072] Trost 62 ff.

gekehrten Weg nicht, ja der Weg ist überhaupt versperrt bzw. unzugänglich[1073]. So weit es zulässig ist, die beiden Intervalle als zwei Zugänge zu der gleichen Fragestellung aufzufassen, kann die Lösung theoretisch auch von der jeweils anderen Seite erwartet werden. Das Problem dabei ist, dass die Türen, um bei diesem bildlichen Vergleich zu bleiben, einem Schnappschloss ähnlich, sich nur von innen her öffnen lassen und die Türen gleichsam hintereinander geschaltet sind, so dass sich alles nur von innen her nach außen öffnen lässt. Nicht jedoch umgekehrt. In diesem bildlichen Vergleich ist die Gammafunktion (mit dem Intervall < 1) in der Position des inneren Kerns und kann von ihnen her nacheinander – in dieser Reihenfolge – beide Türen öffnen[1074], während die Zetafunktion[1075] im Vorhof nur eine Tür nach außen öffnet, und nach innen vor der verschlossenen Tür stehe[1076]. Man könnte also in diesem bildlichen Vergleich meinen, dass die Gammafunktion der Schlüssel zur Zetafunktion[1077] sei. Und das heißt, dass die Zetafunktion von der Gammafunktion bedingt werde, während der die Gammafuktion gleichsam sich selbst genüge, und auf jeden Fall nicht analog von der Zetafunktion abhänge: Die Zetafunktion[1078] ist von der Gammafunktion her näher bestimmt.

Euler führte als Erster analytische Methoden in die Zahlentheorie ein und „arbeitete […] mit der Beziehung

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)\left(1 - \frac{1}{5^k}\right)\ldots},$$

kürzer geschrieben

[1073] Landau I 30 ff.
[1074] Artin 26 ff.
[1075] Trost 62 ff.
[1076] Landau I 30 ff.
[1077] Trost 62 ff.
[1078] Trost 62 ff.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p} \left[1 : \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)\right],$$

wobei die linke Seite die Riemannsche Zahlenfunktion ζ(k) darstellt und *p* die Reihe der Primzahlen durchläuft. […] Lindemann (1852-1938) benützte für seinen Transzendenzbeweis von π die von Euler 1728 gefundene Gleichung lg(−1) = πi, wobei *i* die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet.“[1079] Euler hatte außer e noch eine andere, weniger bekannte Konstante (C), die später mit Gamma bezeichnet wurde: **„Eulersche Konstante**, […]

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

wobei H_n die Harmonische Reihe bezeichnet. […] Das Auftreten lässt sich (wie auch bei anderen mathematischen Konstanten) so unterteilen:

1. Als Funktionswert oder Grenzwert von Speziellen Funktionen.

Der Wert γ ist die negative Ableitung der Gammafunktion an der Stelle 1, also

$$\Gamma'(1) = q - \gamma.$$
$$\lim_{s\to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma.$$

Hierbei bezeichnet ζ(*s*) die riemannsche Zeta-Funktion.

2. In Entwicklungen spezieller Funktionen, z.B. bei der Reihenentwicklung des Integrallogarithmus von Leopold Schendel oder der Besselfunktionen.

3. Integraldarstellungen […] Ferner gibt es eine ebenso reichhaltige Fülle an unendlichen Summen und Produkten, etwa

[1079] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; vgl Waldschmidt 4 [248].

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\prod_{p\leq n,p\ prim}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}=e^{\gamma}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\prod_{p\leq n,p\ prim}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}$$

$$\gamma=\lim_{n\to 1^{+}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{x^n}\right)$$

4. Reihendarstellungen sind im Gegensatz zu π prinzipiell seltener. Als Beispiele von Reihen mit rationalen Gliedern sind nur die Reihen von Euler, Giovanni Enrico Eugenio Vacca, Ramanujan und Joseph Ser bekannt. An Reihen mit irrationalen Gliedern gibt es unzählige Variationen, deren Glieder aus rational gewichteten Werten der riemannschen Zeta-Funktion an den ungeraden Argumentstellen ζ(3), ζ(5), ... bestehen."[1080]

Speziell die Primzahlen können sowohl mit der Gammafunktion[1081]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\prod_{p\leq n,p\ prim}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}=e^{\gamma}$$

Wie auch mit der Zetafunktion[1082]

$$\zeta(s)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\lim_{x\to\infty}\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqq x}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

[1080] Wikipedia, Euler-Mascheroni-Konstante, In: < URL >.
[1081] Wikipedia, Euler-Mascheroni-Konstante, In: < URL >.
[1082] Remmert/Ullrich 73 f.

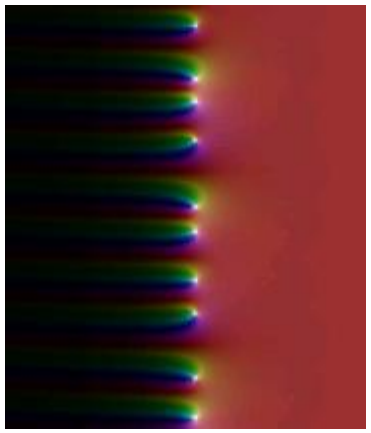
analog beschrieben werden:

„Eine der wichtigsten Eigenschaften der riemannschen Zetafunktion ist ihr Zusammenhang mit den Primzahlen. Sie stellt eine Beziehung zwischen komplexer[1083] Analysis und analytischer Zahlentheorie her und bildet den Ausgangspunkt der riemannschen Vermutung. Der folgende Ausdruck stellt den Zusammenhang formelhaft dar als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1+\frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\frac{1}{3^s}\right)\left(1+\frac{1}{5^s}\right)\ldots}$$

wobei Π_p ein unendliches Produkt über alle Primzahlen p darstellt. Der Ausdruck folgt unmittelbar aus dem Satz über die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung und der Summationsformel für die Geometrische Reihe.

Riemannsche Vermutung[1084]



Riemannsche Zetafunktion in der komplexen Ebene, horizontal Re(s) und vertikal Im(s). Eine Reihe weißer Flecken markiert die Nullstellen bei Re(s) = ½. Für eine vollständige Darstellung des Vorschaubildes hier klicken.

Die Zetafunktion besitzt die auf ganz $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ gültige meromorphe Darstellung:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\frac{1}{s+n-1} + \int_1^{\infty} \frac{e^{s-1}}{e^x-1}\,dx\right),$$

wobei Γ die Gamma-Funktion und B_n die Bernoulli-Zahlen[1085] sind.

[1083] Hainzl 14 f.
[1084] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.
[1085] Knopp 185 f, 207 ff.

Anmerkung: Bei der hier verwendeten Definition der Bernoulli-Zahlen gilt:

$B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, …

Die Zeta-Funktion hat triviale Nullstellen, die sich aus der Menge der Polstellen der Gamma-Funktion vermindert um die Menge der Polstellen des Klammerausdrucks durch Aufhebung ergeben. Es handelt sich dabei um die Menge der negativen geraden Zahlen s = –2, –4, –6, …

Eine zentrale Erkenntnis Riemanns in seiner berühmten Arbeit aus dem Jahre 1859 war die Feststellung, dass sich alle möglichen nichttrivialen Nullstellen in dem Streifen

$$\{s \in \mathbb{C} | 0 < Re(s) < 1 \}$$

befinden müssen.

Die berühmte – und bis heute weder widerlegte noch bewiesene – Vermutung von Bernhard Riemann besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen auf der mittleren Geraden

$$\{s \in \mathbb{C} | Re(s) = 1/2 \}$$

liegen.

Riemann kam auf seine Vermutung bei der Untersuchung des Produkts der Zetafunktion mit der Gammafunktion

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

die bei der Vertauschung von s mit $(1 - s)$ invariant ist, das heißt, sie erfüllt die Funktionalgleichung:

$$\xi(s) = \zeta(1 - s)$$

Die Gerade in der komplexen Zahlenebene mit dem Realteil 1/2 ist bei dieser Spiegelung[1086] ebenfalls invariant.

Bedeutung

Aus der riemannschen Vermutung folgt beispielsweise eine Restgliedabschätzung im Primzahlsatz:

$$\pi(x) = \operatorname{Li} x + \mathcal{O}\left(\sqrt{x} \cdot \log x\right);$$

dabei ist

$$\operatorname{Li} x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

der Integrallogarithmus. Viele weitere Resultate der analytischen Zahlentheorie, aber auch etwa für die in der Kryptographie wichtigen schnellen Primzahltests, können bisher nur unter Annahme der Riemannhypothese[1087] bewiesen werden. In den komplexen Nullstellen der Zetafunktion sind, wie Michael Berry schrieb, die Fluktuationen um die grobe asymptotisch logarithmische Verteilung der Primzahlen, die der Primzahlsatz beschreibt, kodiert. Kennt man die genaue Verteilung, kann man auch genauere Aussagen über die Wahrscheinlichkeit treffen, wie viele Primzahlen in einem Bereich anzutreffen sind.

Die eigentliche Ursache dafür, dass viele Mathematiker so intensiv nach einer Lösung gesucht haben, ist aber — abgesehen davon, dass dies die letzte noch unbewiesene Aussage in Riemanns berühmtem Aufsatz ist — dass sich in dieser außergewöhnlich perfekten Symmetrie einer ansonsten sehr chaotischen Funktion (z. B. Universalitätssatz von Voronin (en): die Zetafunktion kann jede beliebige analytische von Null verschiedene Funktion innerhalb eines Kreises vom Radius 1/4 beliebig approximieren) wahrscheinlich die Spitze des Eisbergs einer fundamentalen Theorie verbirgt, so wie sich hinter der Fermatvermutung die Parametrisierung von elliptischen Kurven durch Modulfunktionen verbarg, ein Teil des Langlands-Programms.

[1086] Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht."

[1087] Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL > 1 ff; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.

Geschichte

Die riemannsche Vermutung wurde schon 1859 von Bernhard Riemann in einer berühmten Arbeit, die die Grundlagen der analytischen Zahlentheorie legte, nur nebenbei erwähnt, da sie, wie er schrieb, für den unmittelbaren Fortgang der Untersuchung seines Aufsatzes nicht wesentlich wäre. Er sicherte seine Vermutung ab durch umfangreiche numerische Berechnung der Nullstellen, wie Carl Ludwig Siegel in den 1930er Jahren bei Untersuchung von Riemanns Nachlass herausfand. Das Problem wurde im Jahr 1900 von David Hilbert in seiner Liste der 23 mathematischen Probleme als Jahrhundertproblem deklariert. 1903 veröffentlichte Jørgen Pedersen Gram die ersten 15 im kritischen Bereich liegenden Nullstellen. Sie unterstützen (beweisen aber nicht) die riemannsche Vermutung, ebenso wie alle weiteren Nullstellen, die später gefunden wurden und deren Anzahl Anfang der achtziger Jahre die 100-Millionen-Grenze überschritt. Im Jahr 2001 wurde mit Hilfe von Großrechnern gezeigt, dass die ersten zehn Milliarden Nullstellen der komplexen Zeta-Funktion alle die riemannsche Vermutung erfüllen, d. h., sie liegen alle auf der Geraden mit Realteil 1 / 2.

Einen weiteren Meilenstein bei der numerischen Suche stellte das im August 2001 gestartete Zeta-Grid-Projekt dar. Mit Hilfe der Methode des verteilten Rechnens, an der viele Tausend Internet-Nutzer teilnahmen, wurden nach drei Jahren etwa 1 Billion Nullstellen gefunden. Das Projekt wurde inzwischen eingestellt.

Die beiden französischen Mathematiker Gourdon und Demichel starteten mit dem Verfahren von Odlyzko und Schönhage im Jahr 2004 einen neuen Versuch und hatten im Oktober 2004 die ersten 10 Billionen Nullstellen überprüft, ohne ein Gegenbeispiel zu finden.

Da im 20. Jahrhundert kein Beweis für die riemannsche Vermutung gefunden wurde, hat das Clay Mathematics Institute im Jahr 2000 dieses Vorhaben erneut zu einem der wichtigsten mathematischen Probleme erklärt und einen Preis von einer Million US-Dollar auf einen schlüssigen Beweis ausgesetzt, allerdings nicht für ein Gegenbeispiel.

Im Juni 2004 hat Louis de Branges de Bourcia zum wiederholten Male einen angeblichen Beweis veröffentlicht, der derzeit kritisch geprüft wird. Bereits Jahre zuvor hat Eberhard Freitag jedoch ein Gegenbeispiel für eine im Beweis aufgestellte Behauptung gezeigt, so dass der Beweis mittlerweile als falsch angesehen wird.

Verwandte Vermutungen

In der analytischen Zahlentheorie gibt es weitere Vermutungen, die mit der riemannschen Vermutung in Beziehung stehen. Die mertenssche Vermutung besagt, dass $|\sum_{k=1}^{n} \mu(n)| < \sqrt{n}$ für alle $n > 1$. Dabei ist $\mu(n)$ die Möbiusfunktion. Die mertenssche Vermutung ist stärker als die riemannsche Vermutung, wurde jedoch 1985 widerlegt[1].

Die lindelöfsche Vermutung über die Ordnung der Zetafunktion entlang der kritischen Geraden ist schwächer als die riemannsche Vermutung, aber immer noch unbewiesen.

Jeffrey Lagarias stellte 1992 eine zur Riemannvermutung äquivalente Vermutung der elementaren Zahlentheorie auf.

Beweisideen aus der Physik

Neue Ideen für den Beweis der Vermutung kamen aus der Physik. Schon David Hilbert und George Polya war aufgefallen, dass die Riemann-Hypothese[1088] folgen würde, falls die Nullstellen Eigenwerte eines Operators (1/2 + i T) wären, wobei T ein hermitescher (das heißt selbstadjungierter) Operator ist, der also nur reelle Eigenwerte hat, ähnlich wie die Hamiltonoperatoren in der Quantenmechanik. In den 1970er Jahren fand dann Hugh Montgomery bei einer Unterhaltung mit Freeman Dyson, dass die Verteilung der (normalisierten) Abstände aufeinanderfolgender Nullstellen eine ähnliche Verteilung wie die Eigenwerte unitärer Zufallsmatrizen zeigte, was Andrew Odlyzko durch numerische Rechnungen bestätigte. In den 1990er-Jahren begannen dann auch Physiker wie Michael Berry nach einem solchen zugrundeliegenden System zu suchen, etwa in der Theorie des Quantenchaos. Weitere Unterstützung finden diese Überlegungen in einer Analogie der ‘expliziten Formeln’ in der Theorie der riemannschen Zetafunktion mit der Selberg-Spurformel, die die Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators auf einer Riemannfläche mit den Längen der geschlossenen Geodäten Kurven in Beziehung setzt, und der Gutzwiller-Spurformel in der Quantenchaos-Theorie. Diese verbindet die Eigenwerte (Energien) der quantenmechanischen Version eines chaotischen klassischen Systems mit den Längen der periodischen Bahnen im klassischen Fall. Bei all diesen Spurformeln (trace formulas) handelt es sich um Identitäten zwischen den Summen der jeweiligen Nullstellen, Bahnkurven-Periodenlängen, Eigenwerte usw.

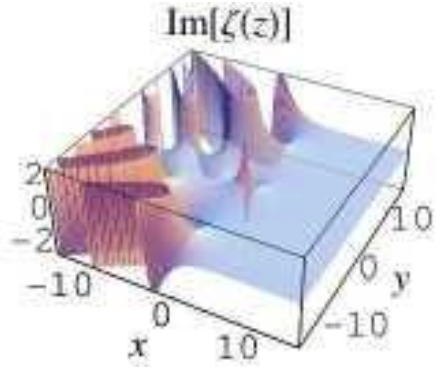
[1088] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.

Ein vom Fields-Medaillen-Preisträger Alain Connes 1996 im Rahmen seiner ‘nicht-kommutativen Geometrie’ angegebener Operator passt ‘fast’. Connes konnte aber bisher nicht die Existenz weiterer Nullstellen außerhalb der kritischen Geraden ausschließen.

Eine weitere Idee aus der Physik, die in Zusammenhang mit der Riemannvermutung diskutiert wurde, sind die ‘Yang-Lee-Nullstellen’ der ins Komplexe analytisch fortgesetzten Zustandssumme in Modellen der statistischen Mechanik. Chen Ning Yang und Tsung-Dao Lee bewiesen unter Verwendung eines Resultats von George Polya aus der Theorie der Zetafunktion, auf das sie Mark Kac aufmerksam machte, dass in bestimmten Modellen die Nullstellen auf einem Kreis lagen, bei anderen Modellen liegen sie auf einer Geraden. Die Lage der Nullstellen bestimmt das Verhalten in Phasenübergängen ähnlich, wie die Nullstellen auf der kritischen Geraden die Feinverteilung der Primzahlen steuern.

All diesen Ideen liegt eine Analogie zugrunde, die sich vereinfacht etwa so beschreiben lässt: Die Primzahlen sind ‘Elementarteilchen’, die über die Multiplikation in Wechselwirkung treten und so die zusammengesetzten Zahlen aufbauen. Gleichzeitig werden die ‘Teilchen’ durch die Addition angeordnet. In der Zetafunktion werden nun in Form einer Summen- bzw. Produktformel beide Aspekte (additiv/natürliche Zahlen und multiplikativ/Primzahlen) miteinander verbunden.“[1089]

Die kritischen Stelle bei Rieman nochmals vergegenwärtigt: „Die Landschaft ist vierdimensional!



[1089] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.

Abbildung 1: Drei Ansichten von Riemannien. Es sind die Graphen des Realteils Re ζ(z), des Imaginärteils Im ζ(z) und des Absolutbetrags |ζ(z)| der Riemannschen Zeta-Funktion. (z = x + iy ∈ ℂ.) Man erkennt die flache weite Ebene im Osten ($x > 0$), die Singularität bei $s = 1$, also $x = 1$ und $y = 0$, und die wilden Gebirge im Westen. Abb. von: http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

[…] An einer speziellen Stelle (an der Koordinate $s = 1$) befindet sich ein unendlich hoher, steil aufschießender Berg, an den sich direkt ein unendlich tiefer Abgrund anschließt. Diese Stelle sollte man tunlichst vermeiden. Aber Riemann hatte bereits herausgefunden, dass dies die einzige gefährliche (‘singuläre’) Stelle des Landes war (Abb. 3). ‘

Re ζ(s) Im ζ(s) |ζ(s)|

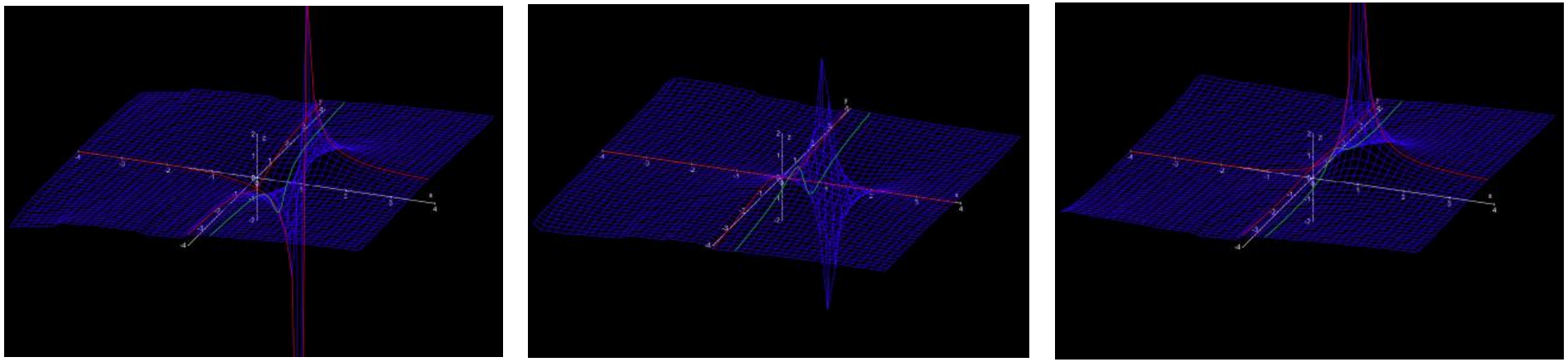


Abbildung 3: Die Umgebung der Singularität $s = 1$. Wie üblich sind die Graphen des Realteils Re ζ(z), des Imaginärteils Im

ζ(z), und des Absolutbetrags |ζ(z)| der Riemannschen Zeta-Funktion dargestellt.

In der ‘Realansicht’ ist der Abgrund westlich des Berges, in der ‘Imaginäransicht’ ist er nördlich des Berges. […]

Re ζ(s) Im ζ(s) |ζ(s)|

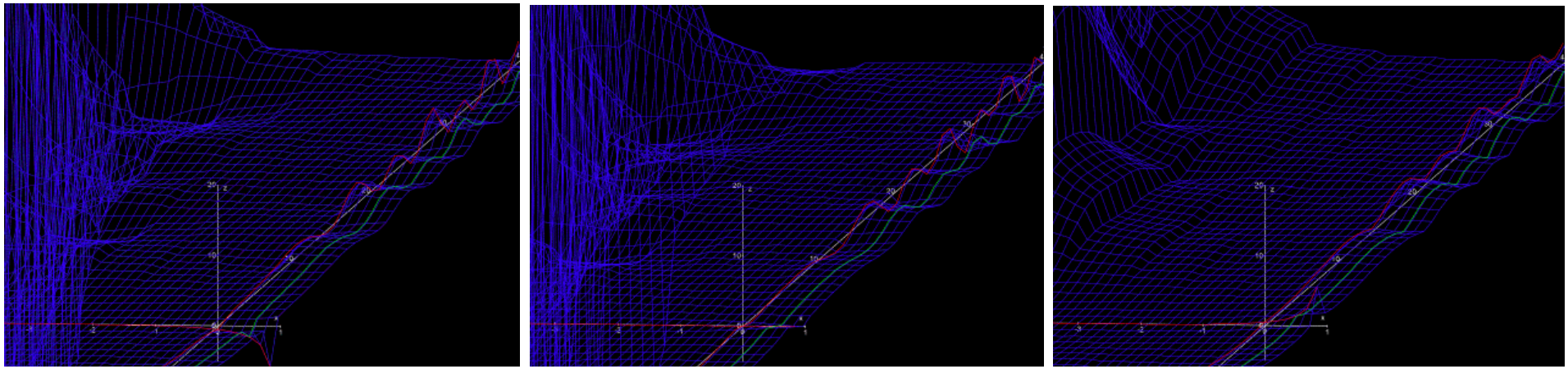


Abbildung 5: Der Beginn der gewaltigen Gebirgszüge im Nordwesten. Südlich des nullten Breitengrades erstreckt sich ein fast identisch ausdehnendes zerklüftetes Gebirge.“[1090]

[1090] Vries, Das Rätsel desl Landes Riemannien, in: < URL >.

Die Folge π^1/2

„Jenes Werkzeug ist die Anwendung der Theorie der Funktion eines komplexen Arguments s auf eine ganz bestimmte Funktion $\zeta(s)$, die ‚Riemannsche Zetafunktion'[1091], welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ durch die Reihde

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Definiert ist, wo n^s die Bedeutung $e^{s \log n}$ bei reellem log *n* hat.

Riemann bewies:

1. Die Funktion $\zeta(s)$ ist in der ganzen Ebene regulär bis auf den Punkt s = 1, der ein Pol erster Ordnung mit dem Reduum 1 ist; mit anderen Worten:

$$(s-1)\zeta(s)$$

und

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

sind ganze transzendente Funktionen.

2. Die Funktion

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

(welche übrigens in s = 0 und s = 1 Pole erster Ordnung hat, sonst regulär ist) bleibt unverändert, wenn s durch 1 – s ersetzt wird.

[1091] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >.

Dies ließ sich durch Benutzung der bekannten Funktionsgleichungen der Gammafunktion[1092] in die Gestalt zu bringen:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{8\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

und besagt in dieser oder der ursprünglichen Gestalt, dass der Quotient

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}$$

sich durch bekannte Funktionen darstellen lässt, d. h. dass man den Verlauf der Funktion $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene beherrscht, falls man ihn in der Halbebene

$$\sigma \geqq \frac{1}{2}$$

verfolgen kann.
Aus diesen Ergebnissen konnte Riemann leicht schließen, dass $\zeta(s)$ für s = – 2, s = – 4, s = – 6, …, allgemein s = – 2q (wo q eine positive Zahl ist) von der ersten Ordnung verschwindet, sonst aber für alle reellen s, sowie für $\sigma < 0$ und $\sigma > 0$ von Null verschieden ist, so dass alle von – 2q verschiedenen etwa vorhandenen Nullstellen dem Streiben $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehören und nicht reell sind.“[1093]

Aufgrund der Tatsache, dass die Riemannsche Zetafunktion[1094] eine Ableitung oder Variante der Gammafunktion ist[1095], sozusagen deren Ausgestaltung und Entfaltung im anderen Intervall[1096] (0 <

[1092] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Havil 65 ff.
[1093] Landau I 30 f; vgl Havil 63 ff.
[1094] Trost 62 ff.
[1095] Landau I 30 ff; Havil 63 ff.
[1096] Sautoy 109 ff.

x < 1), ist sie die längste Zeit die fertige Lösung der Riemannschen Vermutung[1097], und war niemals wirklich eine Frage, sondern nur vom Riemannschen Ansatz her unzugänglich[1098]. Nicht die Lösung war eine Problem, sondern der technische Zugang zum Problem. Denn das Intervall (0< x) < 1 ist nur von der Gammafuniton her richtig zugänglich[1099]. Riemann selbst sagt, der selbst von der Gammafunktion ausging und das Intervall (x > 1) wechselte, dass er auf einen Beweis zunächst verzichtete, weil die offene Frage trivial erschien. Auch Gauß, der – als Betruer von Riemanns Diessertation zu diesem Thema – von dem Ansatz von Riemann begeistert war[1100], ließ es beim scheinbar fehlenden Beweis bewenden, zumal er schon zu diesem Zeitpunkt 74 Jahre alt war und zuvor Beiträge zur Gammafunktion geleistet hatte, in deren Licht der Ansatz von Riemann auf das übrige Intervall trivial erschien[1101]. Die Riemann-Hypothese[1102] dreht sich also um eine vermeintlich offene Frage[1103], die es nicht gibt, bzw. schon damals im Ansatz beantwortet war, auch wenn am Vollzug noch gefeilt werden könnte[1104].

Die gesamte Primzahlproblematik zeigte also insgesamt an die drei Lösungsansätze, die alle auf die Fakultätsfunktion n! zurückgehen[1105] und von dort[1106], wenn auch unterschiedlich, jeweil abgeleitet werden. Die Elersche Zahl

---

[1097] Artin 35 f; vgl Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.
[1098] Landau I 30 ff.
[1099] Havil 63 ff.
[1100] Lamotke 1 f.
[1101] Artin 26 ff.
[1102] Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.
[1103] Landau I 30 ff.
[1104] Havil 63 ff.
[1105] Peters, Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, in: < URL > 4.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{!n}$$

lässt sich als Reihe mit Fakultät[1107] und Subfakutät[1108] beschreiben und so der Zetafunktion[1109]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left[1 : \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)\right]$$

als Primzahlformel gegenübergestellt werden[1110], die sich wiederum als Potenz bzw. als Exponentialfunktion darstellen lässt[1111]:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \prod_{p\leq n, p\ prim} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{\gamma}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \prod_{p\leq n, p\ prim} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}$$

Auch das Argument γ lässt sich unterschiedlich darstellen[1112] und dabei auf Bekanntes zurückführen

$$\gamma = \lim_{n\to 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{x^n}\right)$$

oder

[1106] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[1107] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[1108] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.
[1109] Landau I 30 f; vgl Havil 63 ff.
[1110] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; vgl Waldschmidt 4 [248].
[1111] Wikipedia, Euler-Mascheroni-Konstante, In: < URL >.
[1112] Wikipedia, Euler-Mascheroni-Konstante, In: < URL >.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

und

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$$

„4. Reihendarstellungen sind im Gegensatz zu π prinzipiell seltener. Als Beispiele von Reihen mit rationalen Gliedern sind nur die Reihen von Euler, Giovanni Enrico Eugenio Vacca, Ramanujan und Joseph Ser bekannt. An Reihen mit irrationalen Gliedern gibt es unzählige Variationen, deren Glieder aus rational gewichteten Werten der riemannschen Zeta-Funktion an den ungeraden Argumentstellen ζ(3), ζ(5), ... bestehen."[1113]

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

„Hier sind Arithmetik durch 0 und 1 repräsentiert, Algebra durch i, Geometrie durch π und schließlich die Analysis durch e. Außerdem enthält diese Formel die drei bedeutendsten mathematischen Operationen: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren."[1114]

„Die Taylorreihen mit dem Entwicklungspunkt z=0 unterscheiden sich nur in den Vorzeichen jedes zweiten Summengliedes. Bei den Hyperbelfunktionen werden alle Reihenglieder addiert; bei den Kreisfunktionen wird jedes zweite Reihenglied subtrahiert.

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[1113] Wikipedia, Euler-Mascheroni-Konstante, In: < URL >.
[1114] Schönhacker, Die Zahl e, S.42, in: < URL >

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Hier steht der Ausdruck *n*! für die Fakultät[1115] von *n*, das Produkt der ersten *n* natürlichen Zahlen:

> n! = 1·2·…·n speziell auch 0! = 1.“[1116]

Für komplexe Zahlen, deren Realteil größer als 1 ist, ist die Zetafunktion[1117] definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots.$$

als Summe der reziproken Potenzen. Diese Summe lässt sich als Potenzreihe der Primzahlen $1/p^s$, d. h. als Euler-Produkt schreiben:

[1115] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[1116] Wikipedia, Kreis- und Hyperbelfunktionen, in: < URL >.
[1117] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >.

$$\zeta(s) = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\ldots}.$$

Auf ganz $\mathbb{C}$ gilt als Identität zwischen meromorphen Funktionen

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cdot\cos\frac{2\pi}{2}\cdot\zeta(s).$$

Eine andere Darstellung ist

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(1-s)\cdot\zeta(1-s)$$

für alle *s* in $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. „Für eine positive ganze Zahl *n* ist

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}.$$

Beispielsweise ist

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Diese Formeln wurden von Euler entdeckt und 1735 in seiner Arbeit *De Summis Serierum Reciprocarum* erstmals veröffentlicht. Das Auffinden des Werts von $\zeta(2)$ ist auch als das *Basler Problem* bekannt.

Daneben gibt es auch eine höchst bemerkenswerte Rekursionsformel

$$\zeta(2n) = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k) \cdot \zeta\big(2(n-k)\big),$$

für natürliche Zahlen n ≥ 2, die allerdings Euler noch nicht bekannt war.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl quadratfrei ist, ist gleich $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$, genauer: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte Zahlen kleiner als *N* teilerfremd sind, konvergiert für N → ∞ gegen diesen Wert […]

Für eine ganze Zahl *k* > 0 gilt

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}.$$

Über die Funktionalgleichung ist diese Formel äquivalent zur oben angegebenen Formel für die Werte auf den geraden natürlichen Zahlen. Da $B_k = 0$ für ungerade k, gilt insbesondere

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0;$$

weitere Werte sind

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \qquad \zeta(-3) = -\frac{1}{120},$$

Nullstellen der Zetafunktion

Aus der Produktdarstellung kann man leicht folgern, dass ζ(s) ≠ 0 für Re s > 1gilt. Zusammen mit der Funktionalgleichung ergibt /sich, dass die einzigen Nullstellen außerhalb des *kritischen Streifens*

$$\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re\ s\ \leq 1\}$$

die ‘trivialen’ Nullstellen –2, –4, –6,… sind.

Die Lage der Nullstellen im kritischen Streifen hängt eng mit Aussagen über die Verteilung der Primzahlen zusammen. Beispielsweise ist die Aussage, dass auf dem Rand des kritischen Streifens keine Nullstellen liegen, ein möglicher Zwischenschritt beim Beweis des Primzahlsatzes. Weitere Vergrößerungen des ‚nullstellenfreien Bereiches‘ implizieren Restgliedabschätzungen im Primzahlsatz. Riemann vermutete im Jahr 1859, dass alle Nullstellen auf der Geraden $\{s \mid Re\ s = 1/2\}$ liegen. Diese so genannte riemannsche Vermutung[1118] konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden.“[1119]

So gibt es nur eine Lösung und an die drei oder allenfalls mehrere Ableitungen oder Schreibweisen[1120], von denen eine die Riemannsche Hypothese[1121] sei.

„Hauptwert des Logarithmus = *lnz*

Analog zur reellen Definition heißt jede komplexe Zahl *w*, welche die Gleichung

$$e^w = z$$

erfüllt, ein *natürlicher Logarithmus* von *z*. Dies ist im Unterschied zum reellen Logarithmus jedoch nicht eindeutig, da

$$e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$$

gilt, siehe dazu auch Eulersche Identität. Hat man also einen Logarithmus *w* von *z* gefunden, so ist damit auch

$$w' = w + 2k\pi i$$

[1118] Trost 62 ff; Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >.Most
[1119] Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >.
[1120] Artin 26 ff.
[1121] Landau I 30 ff; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.

ein Logarithmus von z, da gilt:

$$e^{w'} = e^{w+2k\pi i} = e^{w} \cdot e^{2k\pi i} = e^{w} \cdot 1 = z$$

Um Eindeutigkeit zu erreichen, schränkt man w auf einen Streifen in der komplexen Zahlenebene ein. Man kann z. B. den Streifen

$$\{w \in \mathbb{C}: -\pi < Im\, w \leq \pi\}$$

verwenden. Eine komplexe Zahl aus diesem Streifen heißt *Hauptwert* des Logarithmus und man schreibt $w = \ln z$. Stellt man z in Polarkoordinaten dar, so erhält man eine einfache Darstellung des *k-ten Zweigs* der Logarithmusfunktion:

$$w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Für $k = 0$ hat man dann den *Hauptzweig* des Logarithmus:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

ln ist nicht stetig auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Entfernt man jedoch die negative reelle Achse, so ist ln auf dem Gebiet

$$\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$$

stetig und sogar holomorph. Allgemeiner gilt dies für alle einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Mit dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus kann man den Logarithmus von negativen, reellen Zahlen bestimmen:

$$\ln(-x) = \ln|-x| + i \arg(-x) = \ln x + i\pi, x \in \mathbb{R}^{+}.$$

Man muss jedoch beachten, dass im Komplexen die Rechenregeln für Logarithmen nicht immer gelten, sondern nur noch modulo $2\pi i$. Es gilt dann beispielsweise nicht notwendig

$$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y),$$

wegen

$$\ln(-1) + \ln(-1) = 2\pi i \neq 0 = \ln 1 = \ln\big((-1)\cdot(-1)\big)$$

Und auch die Gleichung

$$y \cdot \ln x = \ln x^y$$

ist nicht notwendig erfüllt, was durch das Gegenbeispiel

$$2\pi i \ln e = 2\pi i \neq 0 = \ln 1 = \ln\big(e^{2\pi i}\big)$$

verdeutlicht wird.“[1122]

Die Lösung der Riemannschen Vermutung[1123] ist also lediglich die Entschlüsselung einer neueren Schreibweise[1124], die auf eine neuartige Denkweise, namentlich auf die des Riemann-Integrals[1125], zurückgehe, bzw. von dort herrühre. Nach der Transkription der Riemann-Hypothese[1126] stellt sich die dort behauptete Problematik[1127] gar nicht, bzw. war schon gelöst, bevor sie – in einem anderen Zusammenhang und dort aus dem Zusammenhang gerissen – als Problem oder Frage formuliert wurde[1128]. Denn sie ist keine Fragestellung der Mathematik, sondern bloß die der Methode. Es war also entweder ein Missverständnis, oder die Verschlüsselung der Gammafunktion[1129] in dem Code

[1122] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.
[1123] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1124] Artin 26 ff.
[1125] Wikipedia, Riemann-Integral, In: < URL >.
[1126] Wikipedia, Riemannsche Vermutung, In: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1127] Landau I 30 ff; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1128] Ribenboim (2004) 165 ff.
[1129] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.

des Riemann-Integrals im Bilde der Zeta-Funktion[1130]. Dabei ging es Riemann nicht um die Primzahlen, sondern diese dienten ihm, aufgrund ihrer exponierten Stellung, als Mittel zum Zweck, und wurden im Dienste des Riemann-Integrals[1131] instrumentalisiert bzw. entfremdet. Die „klassische" Lösung der als Zeta-Funktion[1132] verschlüsselten Gammafunktion[1133] in der Riemann-Hypothese[1134] ist die Umrechnung von Sekans Hyperbolikus[1135] in Kosinus Hyperbolicus: sech x = 1/cosh x. Oder im Imaginärteil tanh x = sinh(x)/cosh(x), wobei cosh(x) in beiden Fällen etwa an der gleichen Stelle steht, also die eigentliche Lösung im engeren Sinne ist[1136]: Die Gammafunktion lässt sich auch mit den sog. Bernoullizahlen[1137] ausdrücken, und diese finden sich in den vorgenannten trigonometrischen Funktionen[1138].

Zur Ehrenrettung der Integralrechnung sei gesagt, dass sie mit maschineller Berechnung eine Neubegründung ihre Berechtigung erfahren hat, und auch hier bei der Lösung die maschinell vorgefertigten Rechnungen bzw. Grafiken[1139] besonders hilfreiche waren. Im Sinne der Gesagten war also

---

[1130] Trost 62 ff; Wikipedia, Zahlentheorie, in: < URL >.
[1131] Lamotke V f; Wikipedia, Riemann-Integral, In: < URL >.
[1132] Landau I 30 ff; Trost 62 ff.
[1133] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.
[1134] Resag, Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, in: < URL >; Bombieri, The Riemann Hypothesis, in: < URL >.
[1135] Weisstein, Hyperbolic Secant, in: < URL >.
[1136] Artin 30 f, Havil 93.
[1137] Knopp 185 f, 207 ff.
[1138] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Wikipedia, < URL >: „Die ersten Bernoulli-Zahlen lauten B_1, B_2, B_3, ... = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder."
[1139] Vries, Das Rätsel des Landes Riemannien, in: < URL >.

trivial, dass sich dazu die bereits vorhandene Formel samt Beweis finden müsse, wenn auf die doch aufwendige und mit Unsicherheiten behaftete Integralrechnung[1140] vorgegriffen werden könne. Dies gilt analog für die Primzahlen, deren maschinell vorgefertigten Tabellen[1141] hilfreich bei der mathematischen Lösung waren. Insofern gab es also in den Ergebnissen keine große Überraschungen.

Das methodische Problem ist also, dass die bestechende Ästhetik der Zetafunktion im Unendlichen[1142] begründet liege, und daher – für sich betrachtet – ohne Unendlichkeit kaum, wenn überhaupt rechnen könnte, sondern das Unendliche postulierung aund a priori vorausgesetzt werden müsse[1143], bevor man zu rechnen beginen könnte. Das analoge Problem gibt es in der Gammafunktion nicht, zumindest nicht in der Ästhetik, denn die Einge des Intervalls 0 < x < 1 nimmt die Illusion des Unendlichen, auch wenn man einen Bruch gegen Unendlich laufen ließe, und man begreift das Unendliche vorweg als optische Täuschung, bzw. als relativ. Euler hatte das allgemeine Problem der Summierung der Zetareien für ganzzahlige Exponenten gelöst[1144], dabei allerdings (bis heute) für ungerade Exponenten offen gelassen. Immerhin gab er einen Zahlenwert mit 0,577218 an. Eulers ursprüngliche Formulierung:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} = \ln(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^4} \ldots$$

War im original (in: „De Progressionibus"): „Quae series cum sint convergentes, si proxime summentur prodibit

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{i} = \log(i+1) + 0{,}577218$$

[1140] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >.
[1141] Simmel 19; Wikipedia, Tabelle der Primzahlen, in: < URL >.
[1142] Havil 63.
[1143] Meschkowski 11 ff.
[1144] Havil 63.

Si summa dicatur s, foret, ut supra fecimus,

$$ds = \frac{di}{i+1} \text{ ideoque } s = \log(i+1) + \mathrm{C}.$$

Huius igitur quantitatis sonstantis C valorem deteximus, quippe est C = 0,577218.“[1145] Dabei verwendet Euler noch C für γ, welche die spätere Bezeichnung war und ist. In einen späteren Werk, „De Numero Memorabili in Summatione Progressionis Harmonicae Naturalis Occurente“, widmete sich Euler ganz der Konstante, die er noch nicht hinreichend gelöst ansah, und gab dazu eine ganze Reihe Näherungen an, mit deren Hilfe die Konstante zu berechnen ist. Zwei dieser Reihen sind

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}(\zeta(i) - 1) = 1 - \gamma$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)2^{2i}}(\zeta(2i) - 1) = 1 - \gamma - \ln\frac{3}{2}.$$

Euler berechnete die Konstante C bzw. 1 – γ mit der Zetafunktion $\zeta(i)$. Den Namen Gamma γ und die Bezeichnung Γ führte erst Legendre ein[1146].

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{x-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\,\mathrm{d}t, x > 0$$

[1145] Havil 63: „Da diese Reien konvergent sind, erhält man, wenn sie nacheinander summiert werden, den Wert

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{i} = \log(i+1) + 0{,}577218$$

Wird die Summe s genannt, dann gilt, wie wir oben ausgeführt haben.

$$ds = \frac{di}{i+1} \text{ ideoque } s = \log(i+1) + \mathrm{C}.$$

Wir haben also den Wert dieser Konstanten C entdeckt und es ist C = 0,577218.“

[1146] Havil 64 ff; vgl Neukirch 439 ff.

Die Substitution t $\rightarrow -\ln t$ führt zu der Alternative

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t, x > 0$$

Offensichtlich gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

und auch

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\, e^{-t}\mathrm{d}t = [-t^x e^{-t}]_0^\infty + x = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x),$$

woraus – aufgrund der Identität – die Definition über die Einschränkung x > 0 hinaus erweitert werden kann

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

und zum Beispiel

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\frac{1}{2}$$

schreiben. Die Funktion zeigt einige subtile Eigenschaften wie $\Gamma(n) = (n-1)!$ oder 0! = (1 – 1)! = Γ(1) = 1 und

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{1/2}\, e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{du} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Und noch anschaulicher

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Analog der Eulerschen Identität[1147] haben wir ein Ergebnis mit Pi, bzw. Wurzel aus Pi $\left(\sqrt{\pi}\right)$, integriert aus dem Glied $e^{-x^2}\mathrm{d}x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

und wir haben analog das Integral[1148]

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = -\gamma$$

mit dem Ergebnis –γ aus dem Glied $e^{-x} \ln \mathrm{x} \, \mathrm{d}x$, wo das Argument im vorigen Integral von x² auf x und dx auf ln x dx geändert wurde[1149]. Karl Weierstraß (1815-1897) stellte die Verbindung zwischen der später als Gamma γ bezeichnete Eulersche Konstante C und der Gammafunktion Γ(x) her,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\Gamma_\mathrm{r}(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-x/r}$$

mit

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} - \ln r\right) = \lim_{r\to\infty} (H_r - \ln r) = \gamma$$

Die Digamma- oder Psi-Funktion $\Psi(\mathrm{x}) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ berechnet sich bei x = 1

$$\Psi(\mathrm{x}) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -1 - \gamma + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = -\gamma$$

Das heißt $\Gamma'(1) = -\gamma$ und wir haben das geometrische Resultat, dass γ numerisch der Anstieg der Gammafunktion mit der x-Koordinate 1 ist. Das bedeutet ausgerechnet: $H_1 = 1$ und $\Psi(1) = -\gamma$, woraus $\Psi(\mathrm{n}) = -\gamma + H_{n-1}$ folgt[1150]. Aus dem Kehrwert von $\Gamma(x)$ hat man

[1147] Arndt/Haenel 13.
[1148] Havil 66 ff.
[1149] Wikipedia, Integralrechnung, In: < URL >.

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(-x)} = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Mit Hilfe der magischen Eulerschen Formel[1151]

$$\sin(\pi x) = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots$$

erhalten wir

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

die Komplementformel

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

[1150] Havil 69 f.

[1151] Meschkowski 136: „Man kann zeigen, dass die durch ein solches unendliches Produkt definierte Funktion F(z) = Q(z) in jedem beschränkten Bereich analytisch ist. Auf diese Weise hat man z. B. in

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)$$

eine analytische Funktion, die genau an der Stelle z = n² (n = 1, 2, 3, …) verschwindet. Man kann auch leicht eine Funktion konstruieren, die *alle* ganzen Zahlen *n* zu Nullstellen hat. Das leistet das absolut konvergente unendliche Produkt

$$f_2(z) = z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Es hat dieselben Nullstellen wie die Funktion $\sin\pi z$, nämlich 0, ±1, ±2, ±3, … Tatsächlich gilt

(17) $$\sin\pi z = \pi z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

wie wir in § 4 beweisen werden."

die gilt, wenn x und 1 – x weder 0 noch negative ganze Zahlen sind. Eine „Spiegelungsformel" für die Funktion f(x) setzt die Konstante a von f(x) und f(a – x) zueinander in Beziehung[1152]. Die Komplementformel ist also die Spiegelungsformel der Gamma-Funktion für a = 1.

$$\zeta(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{r^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{x-1}\, e^{-ru}\, du = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} u^{x-1} \sum_{r=1}^{\infty} e^{-ru}\, du$$

Nach der Summierung erhalten wir

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} u^{x-1} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\, du$$

und erhalten die schöne Formel

$$\zeta(s)\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{e^u - 1}\, du.$$

Diese Formel gilt für $x \notin \{1, 0, -1, -2, \ldots\}$ und der Zusammenhang hat weitreichende Konsequenzen[1153].

Euler wollte die Divergenz der Summe der Kehrwerte der Primzahlen beweisen. Das Ergebnis war ein Eckpfeiler der Zahlentheorie, auch und um so mehr, als dann in der praktischen Anwendung die Ergebnisse von Euler (etwa durch Erdős) weiter entfaltet wurden[1154]. Für x < 1

$$\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^x} = \prod_{p\ prim} \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{r^{x\alpha}} \right) = \prod_{p\ prim} \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{(r^x)^{\alpha}} \right)$$

Jeder Term ist eine geometrische Reihe und deren Summe beträgt

[1152] Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht."
[1153] Havil 71 ff.
[1154] Havil 73 ff.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} = \frac{1}{1-p^{-x}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} = \frac{1}{\frac{p^x}{p^x}-\frac{1}{p^x}} = \frac{1}{\frac{p^x-1}{p^x}} = \frac{p^x}{p^x-1}$$

und wir haben damit die Eulersche Formel

$$\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^x} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-x}} = \prod_{p\ prim} \frac{p^x}{p^x-1}$$

für x > 1. Dieser Zusammenhang stellt nicht nur eine untrennbare Verbindung zwischen den Primzahlen als gleichsam „atomaren" Bausteinen der ganzen Zahlen und der Zetafunktion her, sondern war der Ausgangspunkt der analytischen Zahlentheorie[1155]. Eulers Resultat liefert sogleich zwei wietere Beweise:

$$\zeta(1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^1} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{\frac{p}{p}-\frac{1}{p}} = \prod_{p\ prim} \frac{p}{p-1}$$

beim Grenzwert x → 1. Und für $\zeta(2)$

$$\zeta(2) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-2}} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \frac{\pi^2}{6},$$

wobei das ergebnis eine rationale Zahl wäre, wenn es endlich viele Primzahlen gäbe, aber weil nach derzeitigen Wissensstand mit Legendre (1796) als bewiesen gilt, dass π^2 irrational sei, müsste es nach dieser Rechnung unendlich viele Primzahlen geben und das Ergebnis irrational sein[1156]. Man kann die Eulersche Identität logarithmieren

[1155] Trost 62 ff.
[1156] Havil 73 ff.

$$\ln \zeta(x) = \sum_{p\ prim} \ln\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1}$$

Die logarithmische Reihe $\ln \zeta(1-t) = -t, -\frac{1}{2}t^2, -\frac{1}{3}t^3 - \cdots$ auf $t = \frac{1}{p^x}$ angewendet

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p^x} + \left(\frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \frac{1}{4p^{4x}} + \cdots\right)$$

und

$$\ln \zeta(x) = \sum_{p\ prim} \ln\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1} = \sum_{p\ prim} \left[\frac{1}{p^x} + \left(\frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \frac{1}{4p^{4x}} + \cdots\right)\right]$$
$$= \sum_{p\ prim} \frac{1}{p^x} + \sum_{p\ prim} \left(\frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \frac{1}{4p^{4x}} + \cdots\right)$$

wobei

$$\frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \frac{1}{4p^{4x}} + \cdots < \frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \frac{1}{4p^{4x}} + \cdots = \frac{1}{2p^{2x}}\left(1 + \frac{1}{p^x} + \left(\frac{1}{p^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{p^x}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{1}{2p^{2x}}\left(1 + \frac{1}{p^x}\right)^{-1}$$

„Herumschaukeln" mit dem Ungleichzeichen liefert $p^x > 2$

$\frac{1}{p^x} < \frac{1}{2}$ und $1 - \frac{1}{p^x} < 1 - \frac{1}{2}$ und $\left(1 + \frac{1}{p^x}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

was zu

$$\frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \frac{1}{4p^{4x}} + \cdots < \frac{1}{p^{2x}}$$

Führt, und somit haben wir

$$\sum_{p\ prim} \left(\frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \frac{1}{4p^{4x}} + \cdots\right) < \sum_{p\ prim} \frac{1}{p^{2x}} < \sum_{p\ prim} \frac{1}{p^2} < \sum_{n} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

Das bedeutet

$$\ln \zeta(x) = \sum_{p\ prim} \frac{1}{p^x} + Fehler$$

wobei Fehler $\mu(x) < \zeta(2)$. Man hat aber $\ln \zeta(x) = \ln[(\mathrm{x}-1)\zeta(x)] = \ln \frac{1}{x-1}$ und daher $\ln[(\mathrm{x}-1)\zeta(x)] = \ln \frac{1}{x-1} = \sum_{p\ prim} \frac{1}{p^x} + Fehler$. Unter Betrachtung des bisherigen Ergebnisses gilt für alle x > 1 die Beziehung

$$\sum_{p\ prim} \frac{1}{p^x} = \ln \frac{1}{x-1} + beschränkter\ Fehler.$$

Für x → 1 haben wir die Divergenz. Die Geschwindigkeit der Divergenz sei

$$\prod_{p<n} \frac{1}{1-p^{-1}} \approx \sum_{r<n} \frac{1}{r} \approx \ln n$$

Logarithmieren liefert

$$-\sum_{p<n} \ln(1-p^{-1}) \approx \ln \ln n$$

das bedeutet

$$-\sum_{p<n} \ln\left(-\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} - \cdots\right) \approx \ln \ln n$$

und somit[1157]

$$-\sum_{p<n} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n$$

Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen divergiert also näherungsweise wie ein doppelter ln. Eine sorgfältige Überlegung lehrt

[1157] Havil 75 ff.

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{p<n}\frac{1}{p}-\ln\ln n\right)=\gamma+\sum_{p\ prim}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)=0{,}2614972128\ldots$$

wobei γ ein weiteres Mal auftritt, neben enes der beiden Meissel-Mertens-Konstanten.

Nach einer mengentheoretischen Schleife[1158], die hier übersprungen wird, setzt sich der Beweis fort[1159]. In der Menge aller Primzahlen P = {p_1, p_2, p_3, …p_n} < N sind $\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1}\right\rfloor$ der N Zahlen durch mindestens eine der Primzahlen teilbar. Analog sind $\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1p_2}\right\rfloor$ dieser Zahlen durch mindestens zwei der Primzahlen teilbar usw. Entsprechend haben N² Paaren von Zahlen ≤ N, $\lfloor N/p_1\rfloor^2$ die Primzahl p_1 als gemeinsamer Teiler usw. und somit haben $\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1}\right\rfloor^2$ dieser Zahlen eine einzige Primzahl als gemeinsamen Teiler. Analog haben $\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1p_2}\right\rfloor^2$ dieser Zahlen zwei Primzahlen als gemeinsamen Teiler usw. Unter Einbeziehung des bekannten Prinzips der Ein- und Ausschließung

$$N^2=\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1}\right\rfloor^2-\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1p_2}\right\rfloor^2-\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1p_2p_3}\right\rfloor^2-\cdots+\Pi_N$$

wobei Π_N die Anzahl der teilerfremden Paare bedeutet, haben wir

$$\Pi_N=N^2=\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1}\right\rfloor^2-\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1p_2}\right\rfloor^2-\sum_P\left\lfloor\frac{N}{p_1p_2p_3}\right\rfloor^2-\cdots$$

und somit

[1158] Havil 79 f.
[1159] Havil 81.

$$\frac{\Pi_N}{N^2} = 1 - \sum_P \left(\frac{1}{N}\left\lfloor\frac{N}{p_1}\right\rfloor\right)^2 + \sum_P \left(\frac{1}{N}\left\lfloor\frac{N}{p_1 p_2}\right\rfloor\right)^2 + \sum_P \left(\frac{1}{N}\left\lfloor\frac{N}{p_1 p_2 p_3}\right\rfloor\right)^2 + \cdots$$

Wir lassen N → ∞ gehen

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left\lfloor\frac{N}{p_1}\right\rfloor = \frac{1}{p_1}$$

Für jeden Term. Hieraus erhalten wir im Sinne der bisher Gezeigten den Wert der Wahrscheinlichkeit zweier positiver teilerfremden Zahlen

$$1 - \sum_P \frac{1}{p_1^2} + \sum_P \frac{1}{p_1^2 p_2^2} - \sum_P \frac{1}{p_1^2 p_2^2 p_3^2} + \cdots = 1 - \sum_P \frac{1}{p_1^2} + \sum_P \frac{1}{p_1^2}\frac{1}{p_2^2} - \sum_P \frac{1}{p_1^2}\frac{1}{p_2^2}\frac{1}{p_3^2} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3^2}\right)\ldots$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{1 - p_1^{-2}}\right)\left(\frac{1}{1 - p_2^{-2}}\right)\left(\frac{1}{1 - p_3^{-2}}\right)\ldots} = \frac{1}{\zeta(2)},$$

was zu beweisen war. Unter Verwendung der „schönen Formel" ergibt sich für x = 2

$$\int_0^\infty \frac{u}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u = \zeta(2)\Gamma(2) = \frac{1}{6}\pi^2 \cdot 1 = \frac{1}{6}\pi^2$$

Das heißt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei ganz Zahlen teilerfremd sind, lässt sich auch folgendermaßen ausdrücken:

$$1{:}\int_0^\infty \frac{u}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

Richtig ist auch die Aussage, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass k zufällig gewählte Zahlen teilerfremd sind, beträgt $1{:}\zeta(k)$.

Das eigentliche – triviale – Ergebnis ist $\zeta(2)\Gamma(2) = \pi^2/6$, worin eine Beziehung zwishen $\zeta(2)$ und $\Gamma(2)$ einerseits und π^2 und 6 andererseits zum Ausdruck kommt[1160]. Von hier aus können einige frühere Ausdrücke mit Pi besser eingesehen werden. Zu $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ erhält man die merkwürdige und wichtige Formel: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Damit kann auch Γ(n + 1/2) für ganzes n berechnet werden[1161]. Euler hatte 1748 die Formel berechnet[1162]

$$\prod_{\substack{p=2 \\ p\ prim}}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$$

und

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdots = \prod_{p\ prim} \frac{p^2}{p^2-1}$$

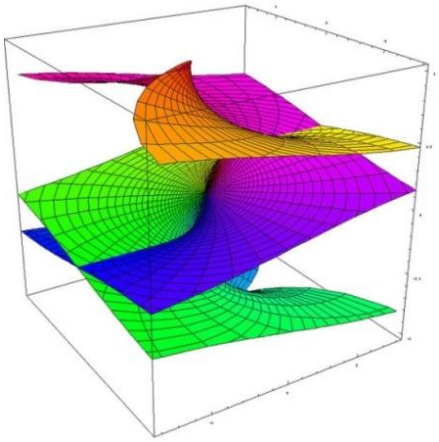
und ebenfalls mit Primzahlen

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots = \sum_{p=2} \frac{1}{p^2}$$

Ebenfalls von Euler mit Primzahlen:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{37}{38} \cdot \frac{41}{42} \cdot \frac{43}{42} \cdot \frac{47}{46} \cdot \frac{53}{54} \cdot \frac{59}{58} \cdot \frac{61}{62} \cdot \frac{67}{66} \cdot \frac{71}{70} \cdot \frac{73}{74} \cdot \frac{79}{78} \cdot \frac{83}{82} \cdot \frac{89}{90} \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{101}{102} \cdot \frac{103}{102} \cdot \frac{107}{106} \cdot \frac{109}{110} \cdot \frac{113}{114} \cdot \frac{127}{126} \cdot \frac{131}{130} \cdot \frac{137}{138} \cdot \frac{139}{138} \cdot \frac{149}{150} \cdot \frac{151}{150} \cdot \frac{157}{158} \cdot \frac{163}{162} \cdot \frac{167}{166} \cdot \frac{173}{174} \cdot \frac{179}{178} \cdot \frac{181}{182} \cdot \frac{191}{190} \cdot \frac{193}{194} \cdot \frac{197}{198} \cdot \frac{199}{198} \cdot \ldots$$

[1160] Havil 82.
[1161] Artin 17 f.
[1162] Arndt/Haenel 215.



Darin sind die Zähler die ungeraden Primzahlen p und die Nenner sind gerade, nicht durch 4 teilbare Zahlen, die sich um ±1 vom Zähler unterscheiden, d. h. der Folge p/(4n ± 1) = $\pi/2$ angehören. Wiederum von Euler stammt die „gemischte" Primzahlformel für Pi:

$$\frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{(2\cdot3)^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{(2\cdot5)^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \frac{1}{(2\cdot7)^2} + \frac{1}{(3\cdot5)^2} - \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} + \frac{1}{(3\cdot7)^2} + \frac{1}{(2\cdot11)^2} - \frac{1}{23^2} + \frac{1}{(2\cdot13)^2} - \frac{1}{29^2} - + \frac{1}{(2\cdot3\cdot5)^2} - \cdots\right).$$

„File:Riemann surface arcsin.jpg"[1163]

Von Newton ist die Lösung[1164] $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot3^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5\cdot2^5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot2^7} + \cdots$

Wobei man die Taylorreihe[1165] des Arkussinus durch Anwenden der binomischen Reihe auf die Ableitung erreicht[1166]. Ebenfalls von Newton[1167]

$$\pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32} + \int_0^{1/4}\sqrt{x - x^2}\,dx\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{3\cdot2^2} - \frac{1}{5\cdot2^5} - \frac{1}{28\cdot2^7} - \frac{1}{72\cdot2^9} - \cdots\right)$$

„Spezielle Werte

[1163] Homann, riemann surface of ArcSin[z], in: < URL >.
[1164] Arndt/Haenel 217.
[1165] Wikipedia, Taylorreihe, In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 57845294, Stand: 13. März 2009 < URL >; Wikipedia, Kreis- und Hyperbelfunktionen, in: < URL >.
[1166] Wikipedia, Arkussinus und Arkuskosinus, In: Versions-ID: 57765937 /11. März 2009, 22:09 UTC < URL >: „Die Taylorreihe des Arkussinus erhält man durch Anwenden der binomischen Reihe auf die Ableitung, sie ist gegeben durch: $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5} + \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7} + \cdots$ Der Ausdruck $k!!$ bezeichnet dabei die Doppelfakultät."
[1167] Arndt/Haenel 218.

x	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
arctan(x)	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Wegen der Punktsymmetrie gelten die entsprechenden Wertepaare auch im Negativen. Solche speziellen Werte gibt es unendlich viele, aufgelistet sind nur die einfachsten.

Reihenentwicklung

Die Taylorreihe des Arkustangens mit dem Entwicklungspunkt $x = 0$ lautet:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

Die Taylorreihe des Arkuskotangens mit dem Entwicklungspunkt $x = 0$ lautet:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

Diese Reihen konvergieren genau dann, wenn |x| < 1 und r ≠ ±i ist. Zur Berechnung des Arkustangens für |x| > 1 kann man ihn auf einen Arkustangens von kleineren Argumenten zurückführen. Dazu kann man entweder die Funktionalgleichung hernehmen, oder (um ohne π auszukommen) die Gleichung

$$\arctan x = 2 \arctan \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

Hiermit lässt sich das Argument nach mehrfacher Anwendung beliebig verkleinern, was eine sehr effiziente Berechnung durch die Reihe ermöglicht.

Berechnung der Kreiszahl π mit Hilfe des Arkustangens

Die Reihenentwicklung kann zur näherungsweisen Berechnung der Zahl π verwendet werden: Die einfachste Formel ist der Spezialfall $x = 1$, die Leibniz-Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Da sie nur sehr langsam konvergiert, verwendete John Machin 1706 die kompliziertere Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

um die ersten 100 Nachkommastellen von π zu berechnen. Letztere konvergiert schneller und wird auch heute noch für die Berechnung von π verwendet."[1168]

Es gibt einfache Formel[1169] wie $\pi = 4 \arctan 1$ oder $\pi = \arctan 1 + \arctan 2 \arctan 3$. Besonders aufschlussreich $\pi = -i \ln(-1)$.

Die Formel von Leibniz[1170] lässt sich schreiben

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n+1}$$

Ohne den Namen Leibniz zu nennen, gelang Landau[1171] die Umrechnung der Formel von Leibniz auf die Reihe der Primzahlen

[1168] Wikipedia, Arkustangens und Arkuskotangens, In: Versions-ID: 58264342, 24. März 2009 < URL >.
[1169] Arndt/Haenel 213.
[1170] Arndt/Haenel 217; Wikipedia, Leibniz-Reihe, In: < URL >.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{7}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{11}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{13}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{17}} \cdots$$

Dabei geht Landau[1172] von einer Summenformel aus

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{17} - \cdots$$

wo das Vorzeichen positiv bei 4n + 1 und negativ bei 4n + 3 ist. Die Summenformel lassen sich dann als unendliche Produkte[1173] ausdrücken.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{\substack{p=2 \\ p\ prim}}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

und

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots$$

Für wechselnde Vorzeichen[1174] lässt sich zB schreiben

$$\left(1-\frac{2}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right) = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots-\frac{2}{2^2}-\frac{2}{4^2}-\frac{2}{6^2}-\cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \cdots$$

Eine Formel von Nilakantha[1175] aus dem 15. Jahrhundert:

[1171] Landau I 449.
[1172] Landau I 448.
[1173] Landau I 65 f, 417.
[1174] Landau I 110.
[1175] Arndt/Haenel 213.

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{4}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{4}{10 \cdot 11 \cdot 12} \ldots$$

kann in der neue Form gebracht werden:

$(n-1)n(n+1)$	n^2
$2 \cdot 3 \cdot 4 = 1 \cdot 24 = 24(1^2)$	
$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 = 5 \cdot 24 = 24(1^2 + 2^2)$	$5 - 1 = 4 = 2^2$
$6 \cdot 7 \cdot 8 = 336 = 14 \cdot 24 = 24(1^2 + 2^2 + 3^2)$	$14 - 5 = 9 = 3^2$
$8 \cdot 9 \cdot 10 = 720 = 30 \cdot 24 = 24(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$	$30 - 14 = 16 = 4^2$
$10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320 = 55 \cdot 24 = 24(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$	$55 - 30 = 25 = 5^2$
$12 \cdot 13 \cdot 14 = 2184 = 91 \cdot 24 = 24(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)$	$91 - 55 = 36 = 6^2$
$14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360 = 140 \cdot 24 = 24(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2)$	$140 - 91 = 49 = 7^2$
…	…

Das in die bisherige Formel eingesetzt

$$\pi = 3 + \frac{4}{24 * 1^2} - \frac{4}{24(1^2 + 2^2)} + \frac{4}{24(1^2 + 2^2 + 3^2)} - \frac{4}{24(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)} + \frac{4}{24(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)} \ldots =$$

oder

$$3 + \frac{4}{24 * 1} - \frac{4}{24 * 5} + \frac{4}{24 * 14} - \frac{4}{24 * 30} + \frac{4}{24 * 55} \ldots = 3 + \frac{1}{6 * 1} - \frac{1}{6 * 5} + \frac{1}{6 * 14} - \frac{1}{6 * 30} + \frac{1}{6 * 55} \ldots$$

$$= 3 + \frac{(6 * 5) - (6 * 1)}{(6 * 1)(6 * 5)} + \frac{(6 * 30) - (6 * 14)}{(6 * 30)(6 * 14)} + \frac{1}{6 * 55} \ldots = 3 + \frac{(5) - (1)}{(1)(5)} + \frac{(30) - (14)}{(30)(14)} + \frac{1}{6 * 55} \ldots$$

$$= 3 + \frac{4}{5} + \frac{16}{420} + \frac{1}{6 * 55} - \frac{1}{6 * 91} + \cdots = 3 + \frac{4}{5} + \frac{16}{420} + \frac{(91) - (55)}{(55)(91)} + \cdots = 3 + \frac{4}{5} + \frac{16}{420} + \frac{36}{5005} + \cdots$$

Oder:

$$\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{4}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{4}{8\cdot 9\cdot 10} + \frac{4}{10\cdot 11\cdot 12}\ldots$$

$$= 3 + \frac{4}{24}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2+2^2} + \frac{1}{1^2+2^2+3^2} - \frac{1}{1^2+2^2+3^2+4^2} + \frac{1}{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}\ldots\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{1^2} - \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2^2} + \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{3^2} - \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{4^2} + \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{5^2}\ldots\right) = 3 + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

also

$$\pi = 3 + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

oder:

$(2n + 1 – 1)(2n + 1)(2n + 1 + 1) = (2n)(2n + 1)(2n + 2) = (2n + 1)(4n^2 + 4) = 8n^3 + 4n^2 + 8n + 8$

$(n – 1)n(n + 1) =$

$(2n + 1)((2n + 1)^2 – 1) = (2n + 1)((2n^2 + 2n+ 1) – 1) = (2n + 1)(2n^2 + 2n) = (2n + 1)(2n(n + 1)) = 4n^2(n + 1) + 2n(n + 1)$

$(2n – 1)((2n – 1)^2 – 1) = (2n – 1)((2n^2 – 2n+ 1) – 1) = (2n – 1)(2n^2 – 2$

$n) = 4n^3 – 2n^2 – 4n^2 + 2n = 4n^3 – 6n^2 + 2n = 2n(2n^2 – 3n + 1)$

$(2n + 1)((2n+ 1)^2 – 1)$	$2n – 1$
$2\cdot 3\cdot 4 = 1\cdot 24 = 3(3^2 – 1)$	
$4\cdot 5\cdot 6 = 120 = 5\cdot 24 = 5(5^2 – 1)$	$5 – 1 = 4 = 2^2$
$6\cdot 7\cdot 8 = 336 = 14\cdot 24 = 7(7^2 – 1)$	$14 – 5 = 9 = 3^2$
$8\cdot 9\cdot 10 = 720 = 30\cdot 24 = 9(9^2 – 1)$	$30 – 14 = 16 = 4^2$
$10\cdot 11\cdot 12 = 1320 = 55\cdot 24 = 11(11^2 – 1)$	$55 – 30 = 25 = 5^2$
$12\cdot 13\cdot 14 = 2184 = 91\cdot 24 = 13(13^2 – 1)$	$91 – 55 = 36 = 6^2$
$14\cdot 15\cdot 16 = 3360 = 140\cdot 24 = 15(15^2 – 1)$	$140 – 91 = 49 = 7^2$
…	…

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{4}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{4}{10 \cdot 11 \cdot 12} \ldots$$

Also

$$= 3 + \frac{4}{3(3^2 - 1)} - \frac{4}{5(5^2 - 1)} + \frac{4}{7(7^2 - 1)} - \frac{4}{9(9^2 - 1)} + \frac{4}{11(11^2 - 1)} \ldots$$

umgerechnet

$$= 3 + \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n 4}{(2n + 1)(2n(n + 1))}.$$

Von Euler wissen wir, dass das Produkt von drei aufeinander folgende natürlichen Zahlen, von denen die mittlere Zahl n ungerade (2n + 1) und die Zahl davor (2n + 1 – 1 = 2n) und die Zahl danach (2n + 1 + 1 = 2n + 2) gerade ist, immer durch 3 teilbar ist[1176], weil eines von drei benachbarten Zahlen immer durch 3 teilbar sein muss, und einer der benachbarten Zahlen mit 2 und die andere benachbarte Zahl mit 4 Teilbar ist (genauer formuliert sagt der bewiesene Satz von Euler aus, dass von drei aufeinander folgenden Zahlen einer immer mit 3 teilbar sein muss, … auch wenn die mittlere eine ungerade Primzahl sei). Damit ist auch gesagt, so Euler, auch das Produkt der beiden Nachbarn (2n)(2n + 2) der ungeraden Zahl 2n + 1 durch 3 Teilbar ist. Und so weit die mittlere ungerade Zahl eine Primzahl ist, so mus eines der beiden Nachbarn durch 3 teilbar sein. Das bedeutet, dass das Produkt dieser drei Zahlen durch $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ teilbar[1177] ist, und zwar immer, und wir können für die Formel nun mehr schreiben

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{4}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{4}{10 \cdot 11 \cdot 12} \ldots$$

$$= 3 + \frac{4}{24} \sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

[1176] Waldal 61 f.
[1177] Waldal 61 f.

Das kann auch heißen, weil $24n + 1 = p^2$ und weil $24n = p^2 – 1 = p^2 – 1^2 = (p + 1)(p – 1)$ geschrieben werden kann[1178], so dass π aus eine Beziehung zur Folge der Primzahlen zeigt. Allerdings war hier zu zeigen, erstens dass

- der Beweis für $24n = (p + 1)(p – 1)$ von Euler stammt,
- zweitens dass der Beweis für π bis auf 3 + am Anfang bei der Berechnung der irrationalen Zahl 0,14… (abgesehem vom periodisch wechselndem Vorzeichen $(–1)^n$ bzw. $(–1)^{n+1}$) mit 4/24n auskommt, und
- drittens dass der Beweis auch dann über 24n geführt werden muss, wenn man dann auf 6n vereinfacht.
- Viertens ist die die Formel für Pi im irrationalem Teil 0,14… als Produkt von drei benachbarten natürlichen Zahlen im Teiler $4/(m – 1)m(m + 1)$ von Nilakantha[1179] aus dem 15. Jahrhundert, der die Vereinfachung durch Euler nicht kannte und daher nicht $(m – 1)m(m + 1)$ statt 24n schreibt[1180].
- Fünftens hat zwar Eueler einerseits 24n als Teiler des Produkts dreier benachbarten natürlichen Zahlen gekannt und bewiesen, und er hat andererseits Formel für Pi als Summe und/oder Produkt der Primzahlen entwickelt, aber nicht die Formel $p = (24n + 1)^{1/2}$ für Primzahlen[1181].

Man kann also den Beweis von Eueler nehmen, dass Pi durch Primzahlen berechnet wird und durch die Formel für Primzahlen auszudrücken ist, und man kann den andere Beweis von Eueler nehmen, wonach das Produkt von drei benachbarten Gliedern der natürlichen Zahlen durch 24 teilbar ist, und

[1178] Waldal 61 f.
[1179] Arndt/Haenel 213.
[1180] Waldal 61 f.
[1181] Waldal 61 f.

man kann das Formel von Nilakantha mit dem Produkt von drei benachbarten natürlichen Zahlen im Teiler nehmen, um Eulers Formel für Pi mit Primzahlen als richtig zu bestätigen. Mit

$$\pi = 3 + \frac{4}{24}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n}{\mathrm{n}^2} = 3 + \sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n 4}{(2\mathrm{n}\ +\ 1)(2\mathrm{n}(\mathrm{n}\ +\ 1))}$$

Auch und insbesondere mit der Vereinfachtung 4/24 = 1/6, ist die Beziehung von Pi zu den Primzahlen p = (24n +1)^{½} gezeigt. Und so weit es zulässig ist, 24n + 1 = p² als Quantenformel der Primzahlen zu nennen oder das als Sachbezeichnung so zu verwenden, so kann $\pi = 3 + \frac{4}{24}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n}{\mathrm{n}^2}$ analog als Quantenformel für Pi zur Diskussion gestellt werden. Ein erster Ansatz ist die auf Euler[1182] zurückgehende Umrechnung von 24n + 1 = p² in 24n = p² – 1, so dass

$$\pi = 3 + \frac{4}{24}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n}{\mathrm{n}^2}$$

und π als Primzalformel in Erscheinung tritt.

Das nun kann mit anderen von Euler entwickelten Formenl[1183] verglichen werden, insbesondere mit:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdot\frac{29}{30}\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{37}{38}\cdot\frac{41}{42}\cdot\frac{43}{42}\cdot\frac{47}{46}\cdot\frac{53}{54}\cdot\frac{59}{58}\cdot\frac{61}{62}\cdot\frac{67}{66}\cdot\frac{71}{70}\cdot\frac{73}{74}\cdot\frac{79}{78}\cdot\frac{83}{82}\cdot\frac{89}{90}\cdot\ldots\cdot\frac{\mathrm{p}}{4\mathrm{n}+2}\cdot\ldots$$

wo im Zähler die ungeraden Primzahlen p und im Nenner 4n + 2 eine Reihe bilden, was in etwa die resziproke Form der obigen Gleichung sei. Ebenfalls mit ungeraden Zahlen

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{p=2}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

und

[1182] Waldal 61 f.
[1183] Arndt/Haenel 215.

$$\frac{6}{\pi^2} = \prod_{\substack{p=2 \\ p\ prim}}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{\substack{p=2 \\ p\ prim}}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{24n+1}\right)$$

Oder

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdots = \prod_{p\ prim} \frac{p^2}{p^2-1} = \prod_{p\ prim} \frac{24n+1}{24n+1-1} = \prod_{p\ prim} \frac{24n+1}{24n}$$

Womit die Beziehung von π zu den Primzahlen trival sei.

Resümee

Auszugehen ist von der Tatsach, dass sowohl die Zetafunktion[1184] wie auch die Gammafunktion[1185] von Euler ausgehen und auf Euler zurückgehen[1186].

1. Die Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ genügt der Funktionalgleichung[1187] Γ(x + 1) = x·Γ(x) = n!, aus der sich mit der Bedingung Γ(1) = 1 der Wert der Gammafunktion für alle positiven ganzen Zahlen *n* als Γ(*n*) = (*n* − 1)! ergibt. Sie erweitert also die Fakultätsfunktion[1188] auf die positiven reellen Zahlen [1189].
2. Der Satz von Wilson[1190] ist die Fakultätsfunktion[1191] als vollständige Primzahlformel für ganze Zahlen, wonach gilt, Falls p eine Primzahl ist, dann (p – 1)! ≡ – 1 (mod p). Demnach ist die Gammafunktion in der ursprünglichen und eigentlichen Form die Primzahlformel schlechthin, allerdings nur für ganze Zahlen, während Euler die Formel auf andere Zahlen ausdehnte, weil er die von ihm ansonsten gemeisrterte Fakutät nicht als Primzahlformel[1192] im Sinne von Wilson und Leibniz erkannte[1193].

[1184] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; Trost 62 ff.
[1185] Lang/Pucker 585; Prachar 393 ff; Wikipedia, Funktionalgleichung, In: Wikipedia, < URL >.
[1186] Peters, Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, in: < URL >.
[1187] Arndt/Haenel 222.
[1188] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[1189] Wikipedia, Gammafunktion, in: Wikipedia < URL >.
[1190] Ribenboim/Richstein/Keller 20 f, 241.
[1191] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[1192] Bundschuh 102 f; Wikipedia, Satz von Wilson, in: < URL >.

3. Stattdessen entwickelte Euler eine Primzahlformel einerseits über die Kreiszahl Pi und andererseits über die Zetafunktion[1194], bzw. leitete er wegen diesem Irrtum die Primzahlformel von der Zetafunktion ab. Die Beziehung $\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{1^k}\right)\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\left(1-\frac{1}{5^k}\right)\ldots}$, kürzer geschrieben $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = \prod_p \left[1:\left(1-\frac{1}{p^k}\right)\right]$, stellt auf der linken Seite die Riemannsche Zetafunktion ζ(k) dar, ist aber von Euler, und *p* durchläuft die Reihe der Primzahlen[1195], so wie das auch bei Riemann mit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ analog sein sollte[1196].
4. Weil Euler einen zweiten Ansatz $\zeta(2)\,\zeta(2) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^1} = \prod_{p\ prim}\frac{1}{1-p^{-2}} = \frac{\pi^2}{6}$, zur Primzahlformel mit der Kreiszahl Pi unternahm[1197], war und ist es sinnvoll, die Gammafunktion $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$ mit $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ mit Pi in Verbindung zu bringen[1198], zumal auch in Zusammenhang mit der Zetafunktion $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots = \sum_{p=2}\frac{1}{p^2}$ als Primzahlformel $\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\ldots = \prod_{p\ prim}\frac{p^2}{p^2-1}$ auf Pi zurückgeführt wurde[1199]. Das eigentliche Ergebnis ist

---

[1193] Sautoy 63: „Doch eine einfache Formel, mit der sich alle Primzahlen finden lassen, könnte auch der große Euler nicht finden. 1751 schrieb er: «Es gibt einige Geheimnisse, die der menschliche Geist niemals durchdringen wird. Wir brauchen nur einen Blick auf die Tabelle der Primzahlen zu werfen, und wir sollten erkennen, dass es dort weder Ordnung noch Regeln gibt.» Es erscheint paradox, dass sich gerade die fundamentalen Bausteine dieser Ordnungsgefüllten Welt der Mathematik so wild und unvorhersagbar verhalten."
[1194] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37; vgl Waldschmidt 4 [248]; Trost 62 ff.
[1195] Fellmann/Jenni/Burckhardt 37.
[1196] Landau I 29 ff.
[1197] Arndt/Haenel 215.
[1198] Arndt/Haenel 222.
[1199] Havil 73 ff.

$\zeta(2)\Gamma(2) = \pi^2/6$, worin eine Beziehung[1200] zwischen $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ und $\Gamma(2)$, sowie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \pi^{1/2}$, einerseits[1201] und π^2 und 6 andererseits zum Ausdruck kommt[1202].

5. Von hier aus können einige frühere Ausdrücke mit Pi wie[1203] $\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ oder[1204] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ besser eingesehen werden. Zu $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ erhält man die merkwürdige und wichtige Formel: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Damit kann auch Γ(n + 1/2) für ganzes n berechnet werden[1205]. Euler hatte 1748 die Formel berechnet[1206].
6. Die Zetafunktion $\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^x} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-x}} = \prod_{p\ prim} \frac{p^x}{p^x-1}$ kann einerseits als Primzahlformel ausgedrückt werden[1207] und andererseits $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ wird die Zetafunktion als ein Ausdruck oder Formel für Pi betrachtet[1208].

Grob vereinfacht kann in der Zusammenfassung festgestellt werden, dass im Kern die Gammafunktion der Fakultätsfunktion[1209] n! und die Zetafunktion[1210] der Exponentialfunktion x^n entspricht[1211].

[1200] Arndt/Haenel 222.
[1201] Artin 17 f.
[1202] Havil 82.
[1203] Havil 69 f.
[1204] Havil 66 ff.
[1205] Artin 17 f.
[1206] Arndt/Haenel 215.
[1207] Trost 62 ff.
[1208] Arndt/Haenel 222.
[1209] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[1210] Trost 62 ff.
[1211] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.

Viele bekannte Funktionen lassen sich als Potenzreihen darstellen[1212]: Damit wäre man bei der Eulerschen Zahl[1213] $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} n/\sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} n!/!\,n$ und $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, als Schaltstelle angelangt[1214], worin sonach sozusagen die Zetafunktion und Gammafunktion[1215] $e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$ aufeinander treffen[1216]. Die Eulersche Identität[1217] $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i\, sin(\varphi$ stellt die Verbindung – außer zur Trigonometrie – in einer anderen Schreibweise $e^{i\pi} = -1$ oder $e^{i\pi} + 1 = 0$ zu Pi her[1218]. Es gibt dazu einige komplexe Ableitungen $e^w = z$ des natürlichen Logarithmus, wie $e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$, die noch Euler zugeschrieben werden oder auf ihn zurückgehen. Der komplexe Logarithmus ist im Gegensatz zum reellen Logarithmus nicht eindeutig: $e^{w'} = e^{w+2k\pi i} = e^w \cdot e^{2k\pi i} = e^w \cdot 1 = z$. Um Eindeutigkeit zu erreichen, schränkt man *w* auf einen Streifen in der komplexen Zahlenebene[1219] ein, wie z. B. auf den Streifen $\{w \in \mathbb{C}: -\pi < Im\, w \leq \pi\}$. Eine komplexe Zahl aus diesem Streifen heißt *Hauptwert* des Logarithmus[1220] und man schreibt $w = \ln z$. Mit dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus kann man den Logarithmus von negativen, reellen Zahlen bestimmen: $\ln(-x) = \ln|-x| + i \arg(-x) = \ln x + i\pi, x \in \mathbb{R}^+$.

[1212] Wikipedia, Taylorreihe, In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 57845294, Stand: 13. März 2009 < URL >.
[1213] Wikipedia, Eulersche Zahl, in: < URL >.
[1214] Wikipedia, Taylorreihe, In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 57845294, Stand: 13. März 2009 < URL >.
[1215] Weisstein, Euler-Mascheroni-Konstante, in: < URL >.
[1216] Arndt/Haenel 215, 222; Havil 82; Artin 17 f: Die Formel $\zeta(2)\Gamma(2) = \pi^2/6$ beinhaltet $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ und $\Gamma(2)$, sowie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \pi^{1/2}$ und π^2.
[1217] Wikipedia, Eulersche Identität. In: URL < URL >.
[1218] Arndt/Haenel 214.
[1219] Hainzl 14 f.
[1220] Wikipedia, Logarithmus, in: < URL >.

Es können die Ausdrücke für Pi mit Primzahlen herangezogen werden[1221], $\prod_{p=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{6}{\pi^2}$ und $\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\ldots=\prod_{p\ prim}\frac{p^2}{p^2-1}$ und ebenfalls mit Primzahlen $\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots=\sum_{p=2}\frac{1}{p^2}$. Ebenfalls von Euler mit Primzahlen $\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdot\frac{29}{30}\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{37}{38}\cdot\frac{41}{42}\cdot\frac{43}{42}\cdot\frac{47}{46}\cdot\frac{53}{54}\cdot\frac{59}{58}\cdot\frac{61}{62}\cdot\frac{67}{66}\cdot\frac{71}{70}\cdot\frac{73}{74}\cdot\frac{79}{78}\cdot\frac{83}{82}\cdot\frac{89}{90}\cdot\frac{97}{98}\cdot\frac{101}{102}\cdot\frac{103}{102}\cdot\frac{107}{106}\cdot\frac{109}{110}\cdot\frac{113}{114}\cdot\frac{127}{126}\cdot\frac{131}{130}\cdot\frac{137}{138}\cdot\frac{139}{138}\cdot\frac{149}{150}\cdot\frac{151}{150}\cdot\frac{157}{158}\cdot\frac{163}{162}\cdot\frac{167}{166}\cdot\frac{173}{174}\cdot\frac{179}{178}\cdot\frac{181}{182}\cdot\frac{191}{190}\cdot\frac{193}{194}\cdot\frac{197}{198}\cdot\frac{199}{198}\cdot\frac{211}{210}\cdot\frac{223}{222}\cdot\frac{227}{226}\cdot\ldots$ allerdings schwer in eine Formel zu bringen, obwohl sie im Zähler die Primzahlen $p_n = (24n + 1)^{1/2}$ bzw. $24n + 1 \equiv 0 \pmod{p_n^2}$ und im Nenner $4n \pm 1$, was man $4m + 2$ schreiben kann, durchläuft.

Allgemein lässt sich Pi u. a. schreiben: Es gibt einfache Formel[1222] wie $\pi = 4\arctan 1$ oder $\pi = \arctan 1 + \arctan 2 \arctan 3$. Besonders aufschlussreich $\pi = -i\ln(-1)$. Euler hat Pi $\pi = -\ln(-1)$ oder $e^{\pi} = i^{-2i}$ bestimmt[1223]. $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$ ist von Newton[1224] wobei man die Taylorreihe[1225] des Arkussinus durch An-

[1221] Arndt/Haenel 215.
[1222] Arndt/Haenel 213.
[1223] Arndt/Haenel 214.
[1224] Arndt/Haenel 217.
[1225] Wikipedia, Taylorreihe, In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 57845294, Stand: 13. März 2009 < URL >; Wikipedia, Kreis- und Hyperbelfunktionen, in: < URL >: „Die Taylorreihen mit dem Entwicklungspunkt z=0 unterscheiden sich nur in den Vorzeichen jedes zweiten Summengliedes. Bei den Hyperbelfunktionen werden alle Reihenglieder addiert; bei den Kreisfunktionen wird jedes zweite Reihenglied subtrahiert.

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

wenden der binomischen Reihe auf die Ableitung erreicht[1226]. Auch $\pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32} + \int_0^{1/4}\sqrt{x - x^2}dx\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \cdots\right)$ ist von Newton[1227]. Die Formel von Leibniz[1228] lässt sich schreiben $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}$. Eine Formel von Nilakantha[1229] aus dem 15. Jahrhundert:$\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{4}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{4}{8\cdot 9\cdot 10} + \frac{4}{10\cdot 11\cdot 12} \ldots = 3 + \sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n 4}{(2n+1)(2n(n+1))}$, womit Pi über 24n ausgedrückt wird wie die Primzahlen in 24n + 1. Das könnte auch heißen

$$\pi = 3 + \frac{4}{24}\sum_{n=1}^{n}\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n}{n^2} = 3 + \sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n 4}{(2n\ +\ 1)(2n(n\ +\ 1))}$$

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Hier steht der Ausdruck *n*! für die Fakultät von *n*, das Produkt der ersten *n* natürlichen Zahlen: n! = 1·2·…·n speziell auch 0! = 1."

[1226] Wikipedia, Arkussinus und Arkuskosinus, In: Versions-ID: 57765937 /11. März 2009, 22:09 UTC < URL >: „Die Taylorreihe des Arkussinus erhält man durch Anwenden der binomischen Reihe auf die Ableitung, sie ist gegeben durch: $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$ Der Ausdruck *k*!! bezeichnet dabei die Doppelfakultät."

[1227] Arndt/Haenel 218.

[1228] Arndt/Haenel 217; Wikipedia, Leibniz-Reihe, In: < URL >.

[1229] Arndt/Haenel 213.

Allerdings war hier 24n als Element von Pi und Γ zu zeigen. Die Stirlingformel[1230] verwendet das Element 1/12n als Bindeglied zwischen Fakultätsfunktion[1231] und Logarithmus und ist ein Ansatz zur Lösung[1232] von 24n:

„Die Stirling-Entwicklung mit der Euler-MacLaurinschen Summenformel lautet

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots,$$

wobei B_k die k-te Bernoulli-Zahl bezeichnet. Als Näherung betrachtet man lediglich eine endliche Zahl von Gliedern. Der Fehler liegt in der Größenordnung des ersten vernachlässigten Gliedes. Beispiel: bricht man nach dem dritten Glied ab, ist der absolute Fehler kleiner als 1 / (12n). Die Reihe selbst konvergiert nicht für festes n, sie ist eine asymptotische Entwicklung.“[1233]

[1230] Wikipedia, Stirling-Formel, In: Wikipedia, Versions-ID: 57817801, 13. März 2009, 09:34 UTC < URL >: „Die Stirling-Formel in ihrer einfachsten Form ist eine Näherungsformel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Zu den einzelnen Elementen dieser Formel siehe Fakultät (!), Quadratwurzel (√), Kreiszahl (π) und Eulersche Zahl (e).

Genauer gilt für $n > 0$:

$$1 < e^{1/(12n+1)} \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq e^{1/(12n)} < 1 + \frac{1}{11n}$$

Insbesondere ist der Grenzwert des Bruches für $n \to \infty$ gleich 1.“

[1231] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

[1232] Pommerening, Klaus: Kryptologie, in: < URL >.

[1233] Wikipedia, Stirling-Formel, In: Wikipedia, Versions-ID: 57817801, 13. März 2009, 09:34 UTC < URL >.

Die Benoulli Zahlen[1234] sind ein tragendes Element der hier gezeigten Zusammenhänge und sie sind das Bindeglied zu der Trigonometrie [1235] (beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans). Für ungerade Zahlen n ≥ 3 ergibt die Bernoulli-Formel[1236] die

---

[1234] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „Die Bernoulli-Zahlen werden am einfachsten als Taylor-Koeffizienten der erzeugenden Funktion $\frac{x}{(e^x-1)}$ eingeführt. Die Reihenentwicklung

$$\frac{x}{(e^x-1)} = 1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1}B_n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$$

Beziehungsweise β

$$\frac{x}{(e^x-1)} = \beta_0\frac{x^0}{0!} + \beta_1\frac{x^1}{1!} + \beta_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + \beta_n\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

konvergiert für alle *x* mit einem Betrag kleiner als 2π.
Bernoulli selbst entdeckte diese Zahlen bei der Summation von Potenzen natürlicher Zahlen, z. B.:

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Bei der Summation der *k*-ten Potenzen ist der Koeffizient des linearen Gliedes des Polynoms auf der rechten Seite die Bernoullische Zahl β_k."

[1235] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „Die ersten Bernoulli-Zahlen lauten B_1, B_2, B_3, ... = 1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510, 43867/798, 174611/330, 854513/138, ... Diese Zahlen finden sich beispielsweise in der Reihenentwicklung des Tangens, Tangens Hyperbolicus oder Cosecans wieder.
In der alternativen Definition ist β_0=1 und β_1= − 1/2, alle weiteren β mit ungeradem Koeffizienten verschwinden: β_{2n+1}=0. Die β mit geraden Koeffizienten ergeben sich aus den B_n gemäß $B_n=(-1)^{n+1}\beta_{2n}$ als β_2, β_4, β_6, ... = 1/6, −1/30, 1/42, −1/30, 5/66, ...
Auch wenn die Folge β_n zunächst kleine Zahlenwerte annimmt, geht $|\beta_n|$ doch schneller gegen Unendlich als e^n. So ist $\beta_{100} \approx -2.838\text{x}10^{78}$ bzw. $\beta_{1000} \approx -5.319\text{x}10^{1769}$."

[1236] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „Setzt man $\beta_0 = 1$ und $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ so ergeben sich die Bernoulli-Zahlen β_k aus der Rekursionformel:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\beta_k = 0$$

Bernoulli-Zahlen $\beta_n = 0$ und die die Bernoulli-Polynome[1237] haben Bernoulli-Zahlen als konstanten Terme. Euler hat eine Formel für die Zahl Pi mit den Bernoullizahlen[1238] gefunden: $\pi = \frac{1}{4} + 4n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right) - \frac{4\pi}{e^{2\pi n}} + \frac{B_2}{n^2} - \frac{B_6}{3\cdot 2^2\cdot n^6} + \frac{B_{10}}{5\cdot 2^4\cdot n^{10}} + \frac{B_{14}}{7\cdot 2^6\cdot n^{14}} \ldots$

Zusammenfassend kann die Beziehung der Primzahlformel p = (24n + 1)^{½} zur Riemannschen Vermutung über den Ansatz von Erdös[1239] für x < 1 gezeigt werden

---

Für ungerade Zahlen n ≥ 3 gilt $\beta_n = 0$."

[1237] Wikipedia, Bernoulli-Zahl, In: Versions-ID der Seite: 56650245 < URL >: „Die **Bernoulli-Polynome** sind eine Abbildung $B_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ und sind durch folgende Rekursionsgleichungen vollständig charakterisiert:

$B_0(x) = 1$

und für n größer gleich Eins:

$\frac{d}{dx} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x) \qquad \int_0^1 B_n(x)dx = 0$

Als Summe geschrieben lautet der Ausdruck für das *n*-te Polynom

$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k x^{n-k}$

Die ersten drei Polynome lauten:

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

Die konstanten Terme dieser Polynome stehen in direktem Zusammenhang mit den Bernoulli-Zahlen, denn es sind gerade die Bernoulli-Zahlen β_n."

[1238] Arndt/Haenel 215.

[1239] Havil 73 ff; Aigner/Ziegler, Das BUCH der Beweise, in: < URL >; Volkmann 181: Bereits Euler hat analog $\zeta(x) = \sum 1/n^s$ für n Primzahlen p eingesetzt $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p^s}$ aber noch keine zusammengesetzte Potenzen.

$$\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^x} = \prod_{p\ prim} \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p^{x\alpha}} \right) = \prod_{p\ prim} \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{(p^x)^{\alpha}} \right)$$

Wo s in $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ in $\zeta(x) = \sum 1/n^{xa}$ zerlegt und dann sowohl als Summe wie auch als Produkt auf die Primzahlen $\zeta(x) = \sum 1/(p^x)^a$ umgesetzt werde[1240]. Hier kann einerseits $a = -1/2$ so eingsetzt werden, dass sie der Nullstelle $\zeta(x) = \sum 1/(p^x)^{1/2}$ entspricht und x einer beliebigen Potenz[1241] im Sinne der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s) = \sum 1/n^s$. Es ist bekannt, dass

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} = \lim_{x\to\infty} \prod_{p\leqq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

wo $\sum 1/p^s$ Teilreiehe von $\zeta(s)$ ist[1242] und für s > 1 und 0 < $1/p^s$ < $1/2$ ist

$$1 - \frac{1}{p^s} = e^{-\frac{1}{p^s} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^{2s}} - \frac{1}{3}\frac{1}{p^{3s}} - \cdots} = e^{-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}}$$

Woraus

$$\zeta(s) = \prod_{p} e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}} = e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}}$$

folgt[1243].

[1240] Landau II 704 ff.
[1241] Erdös, Beweis eines Satzes von Tscherbyschef, in: < URL > 196; Landau I 126 f.
[1242] Landau I 126 f, 153 ff.
[1243] Landau I 127, 154 f.

Sonach $1-\frac{1}{p^s}$ in $\prod_{p\leqq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ eingesetzt $\prod_{p\leqq x}\frac{1}{e^{-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}}$, ergibt in einer besseren Näherung $\zeta(s)=e^{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}$ und in $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\ prim}\frac{1}{1-p^{-s}}$ ergibt[1244] $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}}$.

Unter diesen Voraussetzungen können die ganzzahlingen Ergebnisse der Formel $p = (24n + 1)^{1/2}$ in eine allgemeine Form gebracht werden. Bei s = ½ ergeben zunächst nur Quadrate von Primzahlen ganzzahlige Ergebnisse und die Vielfache von Primzahlen. Es ist trivial, dass die Quadrate der Quadrate und höhere Potenzen von Primzahlen auch in der Liste der ganzzahligen Ergebnisse vorkommen, die in $\zeta(s) = \Sigma\ 1/p^s = \Sigma\ 1/(p^x)^{1/2}$ geschrieben werden kann.

12*2n + 1	24n + 1 = p² mit p = 6n +1 und p = 6n – 1	Endziffer 24n
12·2 + 1 = 25 = 5²	24·1 + 1 = 25 = 5²	1
12·4 + 1 = 49 = 7²	24·2 + 1 = 49 = 7²	2
12·10 + 1 = 121 = 11²	24·5 + 1 = 121 = 11²	5
12·14 + 1 = 169 = 13²	24·7 + 1 = 169 = 13²	7
12·24 + 1 = 289 = 17²	24·12 + 1 = 289 = 17²	2
12·30 + 1 = 361 = 19²	24·15 + 1 = 361 = 19²	5
12·44 + 1 = 529 = 23²	24·22 + 1 = 529 = 23²	2
12·52 + 1 = 625 = 25²	24·26 + 1 = 625 = 25² = (5·5)² = (5²)² = 5^4	6
12·70 + 1 = 841 = 29²	24·35 + 1 = 841 = 29²	5
12·80 + 1 = 961 = 31²	24·40 + 1 = 961 = 31²	0
12·102 + 1 = 1225 = 35²	24·51 + 1 = 1225 = 35² = (5·7)²	1
12·114 + 1 = 1369 = 37²	24·57 + 1 = 1369 = 37²	7

[1244] Landau I 126 f, 154 f, 167.

$12 \cdot 140 + 1 = 1681 = 41^2$	$24 \cdot 70 + 1 = 1681 = 41^2$	0
$12 \cdot 154 + 1 = 1849 = 43^2$	$24 \cdot 77 + 1 = 1849 = 43^2$	7
$12 \cdot 184 + 1 = 2209 = 47^2$	$24 \cdot 92 + 1 = 2209 = 47^2$	2
$12 \cdot 200 + 1 = 2401 = 49^2$	$24 \cdot 100 + 1 = 2401 = 49^2 = (7 \cdot 7)^2 = (7^2)^2 = 7^4$	0
$12 \cdot 234 + 1 = 2809 = 53^2$	$24 \cdot 117 + 1 = 2809 = 53^2$	7
$12 \cdot 252 + 1 = 3025 = 55^2$	$24 \cdot 126 + 1 = 3025 = 55^2 = (11 \cdot 5)^2$	6
$12 \cdot 290 + 1 = 3481 = 59^2$	$24 \cdot 145 + 1 = 3481 = 59^2$	5
$12 \cdot 310 + 1 = 3721 = 61^2$	$24 \cdot 155 + 1 = 3721 = 61^2$	5
$12 \cdot 352 + 1 = 4225 = 65^2$	$24 \cdot 176 + 1 = 4225 = 65^2 = (13 \cdot 5)^2$	6
$12 \cdot 374 + 1 = 4489 = 67^2$	$24 \cdot 187 + 1 = 4489 = 67^2$	7
$12 \cdot 420 + 1 = 5041 = 71^2$	$24 \cdot 210 + 1 = 5041 = 71^2$	0
$12 \cdot 444 + 1 = 5329 = 73^2$	$24 \cdot 222 + 1 = 5329 = 73^2$	2
$12 \cdot 494 + 1 = 5929 = 77^2$	$24 \cdot 247 + 1 = 5929 = 77^2 = (11 \cdot 7)^2$	7
$12 \cdot 520 + 1 = 6241 = 79^2$	$24 \cdot 260 + 1 = 6241 = 79^2$	0
$12 \cdot 574 + 1 = 6889 = 83^2$	$24 \cdot 287 + 1 = 6889 = 83^2$	7
$12 \cdot 602 + 1 = 7225 = 85^2$	$24 \cdot 301 + 1 = 7225 = 85^2 = (17 \cdot 5)^2$	1
$12 \cdot 660 + 1 = 7921 = 89^2$	$24 \cdot 330 + 1 = 7921 = 89^2$	0
$12 \cdot 690 + 1 = 8281 = 91^2$	$24 \cdot 345 + 1 = 8281 = 91^2 = (13 \cdot 7)^2$	5
$12 \cdot 752 + 1 = 9025 = 95^2$	$24 \cdot 376 + 1 = 9025 = 95^2 = (19 \cdot 5)^2$	6
$12 \cdot 784 + 1 = 9409 = 97^2$	$24 \cdot 392 + 1 = 9409 = 97^2$	2
$12 \cdot 850 + 1 = 10201 = 101^2$	$24 \cdot 425 + 1 = 10201 = 101^2$	5
$12 \cdot 884 + 1 = 10609 = 103^2$	$24 \cdot 442 + 1 = 10609 = 103^2$	2
$12 \cdot 954 + 1 = 11449 = 107^2$	$24 \cdot 477 + 1 = 11449 = 107^2$	7
$12 \cdot 990 + 1 = 11881 = 109^2$	$24 \cdot 495 + 1 = 11881 = 109^2$	5
$12 \cdot 1064 + 1 = 12769 = 113^2$	$24 \cdot 532 + 1 = 12769 = 113^2$	2
$12 \cdot 1102 + 1 = 13225 = 115^2$	$24 \cdot 551 + 1 = 13225 = 115^2 = (23 \cdot 5)^2$	1

$12\cdot1180 + 1 = 14161 = 119^2$	$24\cdot590 + 1 = 14161 = 119^2 = (17\cdot7)^2$	0
$12\cdot1220 + 1 = 14641 = 121^2$	$24\cdot610 + 1 = 14641 = 121^2 = (11^2)^2 = 11^4$	0
$12\cdot1302 + 1 = 15625 = 125^2$	$24\cdot651 + 1 = 15625 = 125^2 = (5^3)^2 = 5^6$	1
$12\cdot1344 + 1 = 16129 = 127^2$	$24\cdot672 + 1 = 16129 = 127^2$	2
$12\cdot1430 + 1 = 17161 = 131^2$	$24\cdot715 + 1 = 17161 = 131^2$	5
$12\cdot1474 + 1 = 17689 = 1133^2$	$24\cdot737 + 1 = 17689 = 133^2 = (19\cdot7)^2$	7
$12\cdot1564 + 1 = 18769 = 137^2$	$24\cdot782 + 1 = 18769 = 137^2$	2
$12\cdot1610 + 1 = 19321 = 139^2$	$24\cdot805 + 1 = 19321 = 139^2$	5
$12\cdot1704 + 1 = 20449 = 143^2$	$24\cdot852 + 1 = 20449 = 143^2 = (13\cdot11)^2$	2
$12\cdot1752 + 1 = 21025 = 145^2$	$24\cdot876 + 1 = 21025 = 145^2 = (29\cdot5)^2$	6
$12\cdot1850 + 1 = 22201 = 149^2$	$24\cdot925 + 1 = 22201 = 149^2$	5
$12\cdot1900 + 1 = 22801 = 151^2$	$24\cdot950 + 1 = 22801 = 151^2$	0
$12\cdot2002 + 1 = 24025 = 155^2$	$24\cdot1001 + 1 = 24025 = 155^2 = (31\cdot5)^2$	1
$12\cdot2054 + 1 = 24649 = 157^2$	$24\cdot1027 + 1 = 24649 = 157^2$	7
$12\cdot2160 + 1 = 25921 = 161^2$	$24\cdot1080 + 1 = 25921 = 161^2 = (7\cdot23)^2$	0
$12\cdot2214 + 1 = 26569 = 163^2$	$24\cdot1107 + 1 = 26569 = 163^2$	7
$12\cdot2324 + 1 = 27889 = 167^2$	$24\cdot1162 + 1 = 27889 = 167^2 = (6\cdot28 + 1)^2$	2
$12\cdot2360 + 1 = 28561 = 169^2$	$24\cdot1190 + 1 = 28561 = 169^2 = (13\cdot13) = 13^4$	0
$12\cdot2494 + 1 = 29929 = 173^2$	$24\cdot1247 + 1 = 29929 = 173^2 = (6\cdot29 - 1)^2$	7
$12\cdot2670 + 1 = 32041 = 179^2$	$24\cdot1335 + 1 = 32041 = 179^2 = (6\cdot30 - 1)^2$	5
$12\cdot2730 + 1 = 32761 = 181^2$	$24\cdot1365 + 1 = 32761 = 181^2 = (6\cdot30 + 1)^2$	5
$12\cdot2914 + 1 = 34969 = 187^2$	$24\cdot1457 + 1 = 34969 = 187^2 = (11\cdot17)^2$	7
$12\cdot3040 + 1 = 36481 = 191^2$	$24\cdot1520 + 1 = 36481 = 191^2 = (6\cdot32 - 1)^2$	0
$12\cdot3104 + 1 = 37249 = 193^2$	$24\cdot1552 + 1 = 37249 = 193^2 = (6\cdot32 + 1)^2$	2
$12\cdot3234 + 1 = 38809 = 197^2$	$24\cdot1617 + 1 = 38809 = 197^2 = (6\cdot33 - 1)^2$	7
$12\cdot3300 + 1 = 39601 = 199^2$	$24\cdot1650 + 1 = 39601 = 199^2 = (6\cdot33 + 1)^2$	0

$12 \cdot 3710 + 1 = 44521 = 211^2$	$24 \cdot 1855 + 1 = 44521 = 211^2 = (6 \cdot 35 + 1)^2$	5
$12 \cdot 4144 + 1 = 49729 = 223^2$	$24 \cdot 2072 + 1 = 49729 = 223^2 = (6 \cdot 37 + 1)^2$	2
$12 \cdot 4294 + 1 = 52529 = 227^2$	$24 \cdot 2147 + 1 = 52529 = 227^2 = (6 \cdot 38 - 1)^2$	7
$12 \cdot 4370 + 1 = 52441 = 229^2$	$24 \cdot 2185 + 1 = 52441 = 229^2 = (6 \cdot 38 + 1)^2$	5
$12 \cdot 4524 + 1 = 54289 = 233^2$	$24 \cdot 2262 + 1 = 54289 = 233^2 = (6 \cdot 39 - 1)^2$	2
$12 \cdot 4760 + 1 = 57121 = 239^2$	$24 \cdot 2380 + 1 = 57121 = 239^2 = (6 \cdot 40 - 1)^2$	0
$12 \cdot 4840 + 1 = 58081 = 241^2$	$24 \cdot 2420 + 1 = 58081 = 241^2 = (6 \cdot 40 + 1)^2$	0
$12 \cdot 5250 + 1 = 63001 = 251^2$	$24 \cdot 2625 + 1 = 63001 = 251^2 = (6 \cdot 42 - 1)^2$	5
$12 \cdot 5504 + 1 = 66049 = 257^2$	$24 \cdot 2752 + 1 = 66049 = 257^2 = (6 \cdot 43 - 1)^2$	2
$12 \cdot 5764 + 1 = 69169 = 263^2$	$24 \cdot 2882 + 1 = 69169 = 263^2 = (6 \cdot 44 - 1)^2$	2
$12 \cdot 6030 + 1 = 72361 = 269^2$	$24 \cdot 3015 + 1 = 72361 = 269^2 = (6 \cdot 45 - 1)^2$	5
$12 \cdot 6120 + 1 = 73441 = 271^2$	$24 \cdot 3060 + 1 = 73441 = 271^2 = (6 \cdot 45 + 1)^2$	0
$12 \cdot 6394 + 1 = 76729 = 277^2$	$24 \cdot 3197 + 1 = 76729 = 277^2 = (6 \cdot 46 + 1)^2$	7
$12 \cdot 6580 + 1 = 78961 = 281^2$	$24 \cdot 3290 + 1 = 78961 = 281^2 = (6 \cdot 47 - 1)^2$	0
$12 \cdot 6674 + 1 = 80089 = 283^2$	$24 \cdot 3337 + 1 = 80089 = 283^2 = (6 \cdot 47 + 1)^2$	7
$12 \cdot 7154 + 1 = 85849 = 293^2$	$24 \cdot 3577 + 1 = 85849 = 293^2 = (6 \cdot 49 - 1)^2$	7
$12 \cdot 6060 + 1 = 96721 = 311^2$	$24 \cdot 4030 + 1 = 96721 = 311^2 = (6 \cdot 52 - 1)^2$	0
$12 \cdot 8164 + 1 = 97969 = 303^2$	$24 \cdot 4082 + 1 = 97969 = 303^2 = (6 \cdot 52 + 1)^2$	2
$12 \cdot 8368 + 1 = 100489 = 317^2$	$24 \cdot 4187 + 1 = 100489 = 317^2 = (6 \cdot 53 - 1)^2$	7
...	...	

Die Endzifern in n von 24n sind

1, 2, 5, 7, 2, 5, 2, 6, 5, 0, 1, 7, 0, 7, 2, 0, 7, 6, 5, 5, 6, 7, 0, 2, 7, 0, 7, 1, 0, 5, 6, 2, 5, 2, 7, 5, 2, 1, 0, 0,
1, 2, 5, 7, 2, 5, 2, 6, 5, 0, 1, 7, 0, 7,

Sie wiederholen sich nach 40 Rechenschritten. Die Endziffern 1 und 6 stehen für Quadrate mit Endzifer 5. Die Endziffer 0, 2, 5, 7, stehen für die Quadrate mit Entziffer 1, 3, 7, 9.

Die Endzifern in n von 12n sind

2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0, 0,

Sie wiederholen sich nach 10 Rechenschritten. Die Endziffern 2 stehen für Quadrate mit Endzifer 5. Die Endziffer 0, 4, stehen für die Quadrate mit Entziffer 1, 3, 7, 9 (denn $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$, hat nur zwei Endziffer, nämlich 1 und 9).

Die Aufeinanderfolge in n von 24n ist

$$\frac{(6m+1)^2-1}{24} = \frac{(36m^2+12m+1)-1}{24} = \frac{36m^2+12m}{24} = \frac{36m^2+12m}{24} = \frac{3m^2+m}{2} = \frac{m(3m+1)}{2} = \frac{1}{2}m(3m+1) = n$$

und

$$\frac{(6m-1)^2-1}{24} = \frac{(36m^2-12m+1)-1}{24} = \frac{36m^2-12m}{24} = \frac{36m^2-12m}{24} = \frac{3m^2-m}{2} = \frac{m(3m-1)}{2} = \frac{1}{2}m(3m-1) = n.$$

In die Formel 24n + 1 das n = m(3m ± 1)/2 eingesetzt: $\left(24 \cdot \frac{m(3m\pm1)}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} = (12\, m(3m \pm 1) + 1)^{\frac{1}{2}} = (12\, m(3m+1) + 1)^{\frac{1}{2}} + (12\, m(3m-1) + 1)^{\frac{1}{2}}$. Im Hinblick auf die Riemannsche Vermutung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{(12\, m(3m+1)+1)^{\frac{1}{2}} + (12\, m(3m-1)+1)^{\frac{1}{2}}}}$$

entspricht es den dort genannten Voraussetzungen, dass einerseits alle Terme auf der Gerade s = ½ sich befinden aber andererseits auch höhere Potenzen von n für s in $1/n^s$ vorkommen (zB: 24·651 + 1 = 15625 = $125^2 = (5^3)^2 = 5^6$).

Obwohl einerseits die Reihe scheinbar durchbrochen ist, indem nicht nur reine Quadrate von Primzahlen als Nullstellen der Zetafunktion, wo immer s = ½ in $\zeta(s) = \Sigma\ 1/p^s = \Sigma\ 1/(24n + 1)^{1/2}$ wäre, vorkommen, sondern auch $\zeta(s) = \Sigma\ 1/p^s = \Sigma\ 1/(p^x)^{1/2} = \Sigma\ 1/((24n + 1)^x)^{1/2}$, so sind die höhere Potenzen oder zusammengesetzte Ergebnisse immer und ausschließlich Produkte von Primzahlen. Also nur die Zahlen der Reihe 6n ± 1 kommen vor, wo auch die Glieder, die nicht Primzahlen sind, das Produkt (und/oder Quadrate bzw. Potenzen) von Primzahlen sein müssen.

Die schon von Euler für x > 1 entwickelte Formel der Zetafunktion

$$\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^x} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1 - p^{-x}} = \prod_{p\ prim} \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p^{x\alpha}} \right) = \prod_{p\ prim} \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{(p^x)^{\alpha}} \right)$$

wird durch die Formel $24n + 1 = p^2$ dadurch bestätigt, dass die gleiche Formel $24n + 1 = (mp^q)^2 = mp^{2q}$ sein bzw. erweitert werden kann[1245] (vgl die Schreibweise mp^{ms} in $e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}}$, wo auch $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$ geschreiben wird[1246]). So wie schon Riemann[1247] für x > 1 das Ergebnis s = −2q bekam, so kann nun für x < 1 das Ergebnis s = −q(1/2) = −q/2 geschrieben werden[1248].

[1245] Landau I 30 f.

[1246] Landau I 126 f: Siehe die Schreibweise in $e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}}$, wo $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$ geschreiben wird.

[1247] Landau I 30 f.

[1248] Hainzl 34 f, 64 ff, 143 f, 146 ff.

Die Formel 24n + 1 umfasst also auch die die Folge 6m ± 1. Man kann anhand der Formel 6m ± 1 mit dem Sieb des Eratosthenes[1249] die kritischen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion exakt voraussagen.

$P_{\{+5\}}$	$P_{\{+1\}}$	$P_{\{+7\}}$	$P_{\{+3\}}$	$P_{\{+9\}}$
$P_{\{-5\}}$	$P_{\{-1\}}$	$P_{\{-7\}}$	$P_{\{-3\}}$	$P_{\{-9\}}$

$-5 = 6\cdot(-1) + = 2^2 + 1^2$	1	7 = $4^2 - 3^2$	13 = $3^2 + 2^2 = 7^2 - 6^2$	19 = $10^2 - 9^2$
$5 = 6\cdot1 - 1$	11 = $6^2 - 5^2$	17 = $4^2 + 1^2 = 9^2 - 8^2$	23 = $12^2 - 11^2$	29 = $5^2 + 2^2$
25 (= $4^2 + 3^2$)	31	37 = $6^2 + 1^2$	43 => 6·7 + 1	~~49~~ (= 7·7)
$35 = 6\cdot6 - 1$ (= $6^2 - 1^2$)	41 = $4^2 + 5^2$	47	53 = $7^2 + 2^2$	59
$55 = 6\cdot9 + 1$	61 = $5^2 + 6^2$	67	73 = $8^2 + 3^2$	79
$65 = 6\cdot11 - 1$(= $7^2 + 4^2$)	71	~~77~~(= 11·7)	83	89 = $8^2 + 5^2$
85 = 6·14 + 1(= $11^2 + 6^2$)	~~91~~(= 13·7)	97 = $9^2 + 4^2$	103	109 = $10^2 + 3^2$
$95 = 6\cdot16 - 1$	101 $10^2 + 1^2$	107	113 = $8^2 + 7^2$	~~119~~(= 17·7)
115 = 6·19 + 1	~~121~~(= 11·11)	127	~~133~~(= 19·7)	139
125 = 6·21 – 1	131	137 = $11^2 + 4^2$	~~143~~(= 13·11)	149 = $10^2 + 7^2$
145 = 6·24 + 1	151	157	163	~~169~~(= 13·13) = $12^2 + 5^2$
155 = 6·26 – 1	~~161~~(23·7) = $15^2 - 8^2$	167	173	179
175 = 6·29 + 1	181 = $10^2 + 9^2$	~~187~~(11·17)	193	199
185 = 6·31 – 1	191	197	~~203~~(29·7)	~~209~~(= 19·11)

[1249] Reiss/Schmieder 102 ff; Bornstein u. a. 370; Paschinger 3 f; Pittner 98 f; Trost 9 f; Gonzalez, Zahlentheorie, Arithmetik und Algebra, in: < URL > 6; Wimmer 2; Lackner 75; Gaubitzer 26 f.

205 = 6·34 + 1	211	~~217~~(31·7)	223	229
215 = 6·36 – 1	~~221~~(= 13·17) = $14^2 + 5^2$	227	233	239
235 = 6·39 + 1	241	~~247~~(19·13)	~~253~~(= 23·11)	~~259~~(= 37·7)
245 = 6·41 – 1	251	257	263	269
265 = 6·44 + 1	271	277	283	~~289~~(= 17·17)
275 = 6·46 – 1	281	~~287~~(= 41·7)	293	~~299~~(= 23·13)
295 = 6·49 + 1	~~301~~(= 43·7)	307	313	~~319~~(= 11·29)
305 = 6·51 – 1	311	317	~~323~~(19·17)	~~329~~(= 47·7)
325 = 6·54 + 1	331	337	~~343~~(= 49·7)	349
335 = 6·56 – 1	~~341~~(= 31·11)	347	353	359
355 = 6·59 + 1	~~361~~(19·19)	367	373	379
365 = 6·61 – 1	~~371~~(53·7)	~~377~~(= 29·13)	383	389
385 = 6·64 + 1	~~391~~(= 23·17)	397	~~403~~(= 31·13)	409
395 = 6·66 – 1	401	~~407~~(= 37·11)	~~413~~(7·59)	419

Denn alle Primzahlen sind Glieder der Folge 6m ± 1, wobei noch für Primzahlen nicht gesagt ist, ob und Primzahlanwärter in 6n +1 auch tatsächlich im Konkreten eine Primzahl ist[1250]. Dagegen ist jedes Glied der Folge 6n ± 1 eine Nullstelle der Riemannschen Zeta-Funktion. Die Folge 24n + 1 ist also lediglich die quadratische Form der Folge 6m ± 1. Deswegen sind Nullstellen $p = (24n + 1)^{1/2}$ immer Glieder der Folge 6m ± 1, so dass die Glieder der Folge 6m ± 1 exakt die kritischen Nullstellen

[1250] Christof 4; Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; Mund (1934) 1 f.

der Riemannschen Zetafunktion[1251] bezeichnen. Man braucht also nur die die in der folge 6m ± 1 ausgesiebten Glieder in die Folge der Primzahlquadrate $p^2 = 24m + 1$ einsetzen: $24n = p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$. Man kann aber auch analog $24n + 1 = (6m \pm 1)^2 = 36m^2 \pm 12m + 1$ schreiben, woraus durch die Kürzung mit 1 auf beiden Seiten folgt $24n = (6m \pm 1)^2 = 36m^2 \pm 12m$, und durch die Teilung durch 12 folgt $2n = (6m \pm 1)^2 = 3m^2 \pm m$, was als $2n = m(3m \pm 1)$ geschrieben werden kann.

In $2n = m(3m + 1)$ ist $n = (3m^2 + m)/2$	In $2n = m(3m - 1)$ ist $n = (3m^2 - m)/2$

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der vollständige Beweis der (Punkt 5. der) Riemannschen Vermutung im Sieb des Eratosthenes und in der dort gewonnenen Folge 6 ± 1 liegt.

Zu der Frage, ob das Quadrat einer Zahl eine kritische Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion ist, muss lediglich die Zugehörigkeit zur Folge 6 ± 1 geprüft werden, indem die Zahl durch 6 geteilt wird, und wenn der Rest 1 oder 5 ist[1252], dann ist das eine kritische Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion. Der Zusammenhang lässt sich mit der Formel[1253] für Pi zeigen

$$\pi = 3 + \sum_{\substack{n=1 \\ n\in\mathbb{N}}}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{24n} = 3 + \sum_{\substack{n=1 \\ n\in\mathbb{N}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{6n} = 3 + \sum_{\substack{n=1 \\ n\in\mathbb{N}}}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{p^2 - 1}$$

[1251] Landau I 30 f.
[1252] Christof 4; Mund (1934) 1 f.
[1253] Arndt/Haenel 213.

wo augenscheinlich die gleiche Gesetzmäßigkeit waltet. Weil $\sum_p 1/p^s$ eine Teilreiehe von $\zeta(s)$ ist[1254] und für s > 1 und $0 < 1/p^s < 1/2$ gilt,

$$1 - \frac{1}{p^s} = e^{-\frac{1}{p^s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^{2s}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^{3s}} - \cdots} = e^{-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}$$

kann

$$\zeta(s) = \prod_p e^{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}} = e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}$$

geschrieben werden[1255]. Die Subfaktultät[1256] $!n = \left[\frac{n!}{e}\right]$ zeigt weitere Zusammenhänge:

„Die Eulersche Zahl *e* lässt sich als Summe der Kehrwerte der Fakultäten definieren:

$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$“[1257]

[1254] Landau I 126 f: Die Einsetzung von $1 - \frac{1}{p^s}$ in $\prod_{p\leqq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ ergibt $\prod_{p\leqq x}\frac{1}{e^{-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}}$, in einer besseren Näherung $\zeta(s) = e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}$ und in $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\ prim}\frac{1}{1-p^{-s}}$ ergibt $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}}}$.

[1255] Landau I 127.

[1256] Wikipedia, Subfakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58309652, Bearbeitungsstand: 25. März 2009 < URL >: „Es gilt $!n = \frac{\Gamma(n+1,-1)}{e}$ mit der Eulerschen Zahl *e* und der unvollständigen Gammafunktion Γ.

$!n \approx \frac{n!}{e}$

stellt eine sehr gute Näherung dar. Wird entsprechend gerundet, bekommt man eine exakte Formel:

$!n = \left[\frac{n!}{e}\right]$

wobei zur nächstliegenden ganzen Zahl gerundet wird.“

[1257] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.

und

„Die Primfakultät einer Zahl ist das Produkt der Primzahlen kleiner oder gleich der Zahl:

$$n_{\#} = \prod_{p \leq, p\ prim} P$$

Subfakultät

Die vor allem in der Kombinatorik auftretende Subfakultät $!n$ bezeichnet die Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen von n Elementen.

Doppelfakultät

Die seltener verwendete D o p p e l f a k u l t ä t oder d o p p e l t e F a k u l t ä t ist das Produkt

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots 2 \text{ für n gerade,} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots 1 \text{ für n ungerade,} \end{cases}$$

Wenn n > 0, außerdem definiert man 0!! = 1 und (−1)!! = 1 wie beim leeren Produkt. Zum Beispiel ist (2n – 1)!! die Anzahl der fixpunktfreien involutorischen Permutationen von 2n Elementen, auch in Integraltafeln und Formeln für spezielle Funktionen tritt die Doppelfakultät auf. Häufig werden stattdessen aber Ausdrücke mit der gewöhnlichen Fakultät verwendet:

$(2k)!! = 2^k \cdot k!$ und $(2k-1)!! = \frac{(2k)!!}{2^k \cdot k!}$ "[1258]

Von den ursprünglich 6 Teilen der sogenannten Riemannschen Vermutung[1259] sind alle bis auf den 5. Teil als richtig erwiesen. Der bisher nicht bewiesene 5. Teil[1260] sagt, dass „alle von der –2q verschie-

[1258] Wikipedia, Fakultät, In: Wikipedia, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, < URL >.
[1259] Landau I 31 ff.

denen Nullstellen von ζ(s) den reellen Teil ½ haben. Das ist bis heute unbewiesen und unwiderlegt. Ja noch mehr: Man weiß nicht einmal, ob die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen = 1 oder < 1 ist. Kleiner als ½ kann sie jedenfalls nicht sein[1261]; denn, da ζ(s) im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ unendlich viele Nullstellen hat, und da in diesem Streifen aus

$$\zeta(s) = 0$$

nach der Riemannschen Funktionsgleichung

$$\zeta(1-s) = 0$$

folgt, hat so hat $\zeta(s)$ unendlich viele Wurzeln im Streifen

$$\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$$

Übrigens infolgedessen (nach der Schlussbemerkung des § 8) sogar im Streifen

$$\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1.$$"[1262]

Der von Riemann als Vermutung[1263] formulierte Satz, dass alle von −2q verschiedenen Nullstellen von ζ(s) den reellen Teil ½ haben[1264], kann als

$$\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

geschrieben werden[1265]. Für positives s = ½ in ζ(s) erhält man[1266]

[1260] Landau I 46, 419.

[1261] Deninger, Primzahlen und die Riemannsche Vermutung, in: < URL > 5: „**Riemannsche Vermutung (1. Fassung)** *Es gibt eine Konstante c > 0 , so dass für alle x ≥ 2 gilt:*

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq c\sqrt{x}\log x.$$

Die Differenz *π*(x) – *Li*(*x*) hat also im Wesentlichen die Größenordnung von $\sqrt{x}$, denn mit $\sqrt{x}$ verglichen wächst log *x* nur sehr langsam. Man kann zeigen, dass man in dieser Abschätzung $\sqrt{x} = x^{1/2}$ durch keine kleinere Potenz von *x* ersetzen kann."

[1262] Landau I 46.

[1263] Landau I 30 f, 33, 46.

[1264] Landau II 704 ff.

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon_{\chi_0^*} \cdot 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right),$$

also wegen $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$ $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ sowie $\varepsilon_{\chi_0^*} = 1$.
Ebenfalls bekannt sind[1267] ungerade s (= (–(2q – 1))

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$
$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$
$$\zeta(-3) = -\frac{1}{120}$$
$$\zeta(-5) = -\frac{1}{252}$$
$$\zeta(-7) = \frac{1}{240}$$

Bekannt sind die noch von Riemann[1268] berechneten Nullstellen $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0,$ die negativen Werten s = –2q entsprechen. Die positiven Werte hingegen haben eine Beziehung zu Pi[1269]

[1265] Landau I 287, 315; Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >.
[1266] Prachar 214.
[1267] Landau I 31, 33, 46, 276; Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >; Landau II 618 f; Prachar 215, 309, 326, 394 f.
[1268] Landau I 30 f; Prachar 215.
[1269] Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$
$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

Eulers analytisches Resultat[1270] liefert zwei wietere Ergebnisse:

$$\zeta(1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^1} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{\frac{p}{p}-\frac{1}{p}} = \prod_{p\ prim} \frac{p}{p-1}$$

beim Grenzwert x → 1. Und für $\zeta(2)$

$$\zeta(2) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^1} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-2}} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \frac{\pi^2}{6},$$

weil nach Legendre als bewiesen gilt, dass π^2 irrational sei, müsste das Ergebnis irrational sein[1271].

„Für eine ganze Zahl $k > 0$ gilt

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}.$$

Über die Funktionalgleichung ist diese Formel äquivalent zur oben angegebenen Formel für die Werte auf den geraden natürlichen Zahlen. Da $B_k = 0$ für ungerade k, gilt insbesondere

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0;$$

[1270] Trost 62 ff.
[1271] Havil 73 ff.

weitere Werte sind

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \qquad \zeta(-3) = -\frac{1}{120},$$

Nullstellen der Zetafunktion

Aus der Produktdarstellung kann man leicht folgern, dass $\zeta(s) \neq 0$ für Re s > 1gilt. Zusammen mit der Funktionalgleichung ergibt sich, dass die einzigen Nullstellen außerhalb des *kritischen Streifens*

$$\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re\ s\ \leq 1\}$$

die ‘trivialen’ Nullstellen –2, –4, –6,… sind.“[1272]

So weit alle Primzahlen p der Formel $p^2 = 24n + 1$ bzw. $p = (24n + 1)^{1/2}$ genügen, ist der letzte (5.) Teil der Riemannschen Vermutung – als richtig – erwiesen. Dies gilt auch für Pseudoprimzahlen, die aus dem Produkt von Primzahlen bestehen, und höhere Potenzen von Primzahlen, die ebenfalls als Produkt von Primzahlen bzw. Pseudoprimzahlen angesehen werden können, denn das Kriterium der Riemannschen Vermutung sind nicht Primzahlen, sondern dass „alle von der –2q verschiedenen Nullstellen von ζ(s) den reellen Teil ½ haben“. Nur weil die nämlichen reellen Nullstellen der Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(np^q)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((24n+1)^q)^{\frac{1}{2}}}$$

den (Produkten von) Primzahlen entsprechen, war der Beweis über die Primzahlen zu führen, wonach dem von Riemann selbst für s > 1 bewiesenen Ergebnis[1273] s = –2q, das nunmehrige

[1272] Wikipedia, Riemannsche ζ-Funktion. In: < URL >.
[1273] Landau I 31.

Ergebnis s = −(1/2)q = −q(1/2) = −q/2 für s < 1 gegenüber stehe[1274], wonach also alle von s = −2q verschiedenen Nullstellen von $\zeta(s)$ den reellen Teil ½ haben. Das war zu beweisen. Man kann das nunmehr vollständige Ergebnis – analog – als die Auflösung einer quadratischen Gleichung[1275] (für p²)

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Schreiben: wo $x_1 = -2q$ (für x > 1) und $x_2 = -q/2$ (für x < 1) stehe[1276]. Dazu wäre die Konjugation[1277] und die komplexen Zahlen mit in die Betrachtung einzubeziehen[1278].

„**Algebraisch konjugiert** nennt man Zahlen, die gemeinsame Lösungen eines Minimalpolynoms sind.
Beispiele:

- Die komplexen Zahlen i und $-i$ sind gemeinsame Lösungen des Minimalpolynoms $x^2 + 1$ und als solche algebraisch konjugiert.
- Verallgemeinerung davon: jeweils 2 konjugiert-komplexe Zahlen $a + bi$ und $2a - bi$ (für $b \neq 0$) sind auch algebraisch konjugiert. Das Minimalpolynom ist $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Die Goldene Zahl Φ und ihr negativer Kehrwert sind algebraisch konjugiert als Lösungen des Minimalpolynoms $x^2 - x - 1$ über dem Körper $\mathbb{Q}$."[1279]

Die Mathematik scheint bisher übersehen zu haben, dass die komplexe Konjugation bereits in der Lösung der bisher reell gehaltenen quadratischen Gleichungen vorweggenommen ist.

[1274] Hainzl 34 f, 64 ff, 143 f, 146 ff.
[1275] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >
[1276] Hainzl 34 f, 64 ff, 143 f, 146 ff.
[1277] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >
[1278] Benner, Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, in: < URL >.
[1279] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >

„In der Mathematik bezeichnet man als **komplexe Konjugation** die Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = a + b \cdot i \mapsto \bar{z} = a - b \cdot i$$

im Körper der komplexen Zahlen. Sie ist ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$, also mit der Addition und Multiplikation verträglich:

$$\overline{y + z} = \bar{y} + \bar{z}, \overline{y \cdot z} = \bar{y} \cdot \bar{z}.$$

Die zu $z = a + b \cdot i$ **konjugierte Zahl** $\bar{z} = a - b \cdot i$ hat also denselben Realteil, aber den entgegengesetzten Imaginärteil.

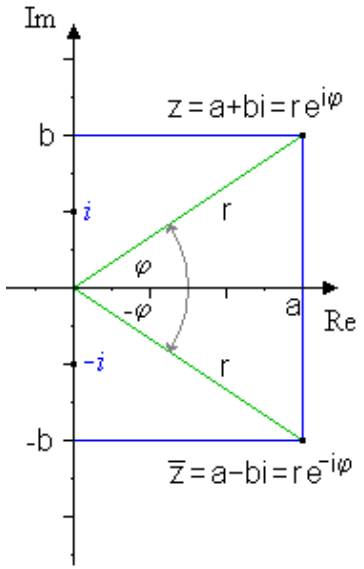
In der Exponentialform ist die Konjugierte der Zahl

$$z = re^{i\varphi}$$

die Zahl

$$\bar{z} = re^{-i\varphi}$$

Sie hat also bei unverändertem Betrag gerade den negativen Winkel von z. Man kann die Konjugation in der komplexen Zahlenebene also als die *Spiegelung an der reellen Achse* identifizieren[1280]. Insbesondere werden bei der Konjugation genau die reellen Zahlen wieder auf sich selbst abgebildet.



Komplexe Zahl $z = a + bi$ und ihre Konjugierte $\bar{z} = a - bi$

Inhaltsverzeichnis

[1280] Westermann 196: „Als Begriff führen wir noch die zu c komplex konjugierte Zahl c* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht."

- 1 Rechenregeln
- 2 Anwendung
- 3 Komplexe Konjugation bei Matrizen
- 4 Verallgemeinerung

Rechenregeln

Für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2, z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt:

- $a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $b = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{z_2}$
- $exp(\bar{z}) = \overline{exp(z)}$
- $log(\bar{z}) = \overline{log(z)}$ für $z \neq 0$

- $\overline{\varphi(z)} = \varphi(\bar{z})$ gilt allgemein für jede holomorphe Funktion φ, deren Einschränkung auf die reelle Achse reellwertig ist."[1281]

Der Re(z) und Im(z) werden aus $z = a + b \cdot i \mapsto \bar{z} = a - b \cdot i$ als Abbildung von dem Mittelwert von z und $\bar{z}$ ausgerechnet[1282], so dass für konjugiert[1283] komplexe Zahlen z_1, z_2, $z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt: $a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $b = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ sowie $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$. Demnach befindet sich $Re(z)$ und $Im(z)$ auf der Linie $\frac{1}{2}$, gemäß dem Postulat der Riemannschen Vermutung[1284], die so weit als richtig erwiesen wäre[1285]. Die Nullstellen[1286] von Kotangens $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi = \left(\frac{1}{2} + k\right) \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$ wären ein weiterer ansatz, zumal Tangens sie mit π, d. h. mit π: $\tan(x + \pi) = \tan(x)$, periodisch sind.

Man kann versuchen die Frage zu verallgemeinern, indem die Lösung 6n + 1 und 6n – 1 oder 6n + 5 entsprechend der Lucas-Folge[1287] auf die Lösung der quadratische Gleichung zurück geführt wird[1288]. Die allgemeine Form der Lösung der quadratischen Gleiczhung ax² – bx + c = 0 ist analog der von Euler für die Primzahlen abgeleitet Form n² – n + 1, wo a, b und c, je 1 sind, oder n² – n + 17, wo c = 17.

[1281] Wikipedia, Konjugation, In: Wikipedia, Versions-ID: 59801280/Bearbeitungsstand: 7. Mai 2009, < URL >.
[1282] Wikipedia, Konjugation, In: Wikipedia, Versions-ID: 59801280/Bearbeitungsstand: 7. Mai 2009, < URL >.
[1283] Benner, Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, in: < URL >.
[1284] Benner, Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, in: < URL >.
[1285] Landau I 288 f.
[1286] Precht/Voit/Kraft 64.
[1287] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.
[1288] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >

Die Lucas Folge hat eine spezielle und eine allgene Form. In der speziellen Form ist jedes Folgeglied – ab dem Dritten – die Summe der beiden vorhergehenden Glieder[1289]. Die allgemeinen Form hat zwei Hauptvarianten, $U_n(P,Q)$ und $V_n(P,Q)$, die $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ und $V_0 = 2$, $V_1 = P$ erfüllen, und der Rekursionsformel $U_n = PU_{n-1} - QU_{n-2}$ für $n > 1$ (entsprechend vür V_n) genügen. Im Spezialfall $P = 1$ und $Q = -1$ ist U_n die Folge der Fibonacci-Zahlen, V_n die oben definierte spezielle Lucas-Folge[1290].

Die quadratsiche Gleichung[1291] für a = 1, b = 1, c = 1:

Für a = 1, b = 1, c = 1	Für a = 1, b = 1, c = 1
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ $$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4}}{2}$$ $$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$	$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ $$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4}}{2}$$ $$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Für a = 1, b = 1, c = 17	Für a = 1, b = 1, c = 17

[1289] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.
[1290] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.
[1291] Wikipedia, Algebraisch konjugiert, In: Wikipedia, Versions-ID: 58941999 / 12. April 2009, < URL >.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4} * 17}{2}$ $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-67}}{2}$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 * 17}}{2}$ $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-67}}{2}$

Man hat dann bei n = 1 für

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$1^2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - b\sqrt{b^2 - 4ac} - 2ac}{2a^2}$$

$$2a = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für negative Werte:

$$5 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$10a = -b - \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 10a - b$$
$$\left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2 = (10a - b)^2$$
$$b^2 - 4ac = 100a^2 - 20ab + b^2$$
$$-4ac = 100a^2 - 20ab$$
$$-4c = 100a - 20b$$
$$-c = 25a - 5b$$
$$5b - 25a = c$$
$$5(b - 5a) = c$$

Für positive Werte:

$$1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$2a = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2a + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2 = (2a + b)^2$$
$$b^2 - 4ac = 4a^2 + 4ab + b^2$$
$$-c = a + b$$

Das in die erste Lösung

$$-c = 25a - 5b$$

Eingesetzt

$$a + b = 25a - 5b$$

Ergibt

$$6b = 24a$$

d. h.

$$b = 4a$$

Das in

$$1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

eingesetzt

$$1 = \frac{-4a + \sqrt{16a^2 - 4ac}}{2a} = -2 + \frac{\sqrt{16a^2 - 4ac}}{2a}$$

Ergibt

$$3 = \frac{\sqrt{16a^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sqrt{16a^2 - 4ac} = 6a$$

$$36a^2 = 16a^2 - 4ac$$

$$36a = 16a - 4c$$

$$9a = 4a - c$$

$$c = -5a$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mit b = 4a und c = –5a

$$= \frac{-(4a) + \sqrt{(4a)^2 - 4a(-5a)}}{2a} = \frac{-(4a) + \sqrt{16a^2 + 20a^2}}{2a} = \frac{-(4a) + \sqrt{36a^2}}{2a} = \frac{-(4a) + 6a}{2a} = 1$$

$$5 = \frac{-4a - \sqrt{16a^2 - 4ac}}{2a} = -2 - \frac{\sqrt{16a^2 - 4ac}}{2a}$$

Daraus

$$-\frac{\sqrt{16a^2 - 4ac}}{2a} = 7$$
$$\sqrt{16a^2 - 4ac} = 14a$$
$$\sqrt{16a^2 - 4ac} = 14a$$
$$16a^2 - 4ac = 196a^2$$
$$4a^2 - ac = 49a^2$$
$$4a - c = 49a$$
$$-45a = c$$

Die Doppelfolge ergibt alle Primzahlanwärter:

$$(6m+1)^2 + (6m-1)^2 = (36m^2 + 12m + 1) + (36m^2 - 12m + 1) = 2(36m^2 + 1)$$
$$= (12\,m(3m+1) + 1) + (12\,m(3m-1) + 1)$$

m = k	$(12\,m(3m+1)+1)\ + (12\,m(3m-1)+1)$	3m ± 1
m = 1	12·1(3·1 – 1) + 1 = 5² = 12·1(3 – 1) + 1 = 25	3m – 1
m = 1	12·1(3·1 + 1) + 1 = 7² = 12·1(3 + 1) + 1 = 49	3m + 1
m = 2	12·2(3·2 – 1) + 1 = 11² = 12·2(6 – 1) + 1 = 121	3m – 1
m = 2	12·2(3·2 + 1) + 1 = 13² = 12·2(6 + 1) + 1 = 169	3m + 1
m = 3	12·3(3·3 – 1) + 1 = 17² 12·3(9 – 1) + 1 = 289	3m – 1

m = 3	$12\cdot3(3\cdot3 + 1) + 1 = 19^2 = 12\cdot3(9 + 1) + 1 = 361$	3m + 1
m = 4	$12\cdot4(3\cdot4 - 1) + 1 = 23^2 = 12\cdot4(12 - 1) + 1 = 529$	3m – 1
m = 4	$12\cdot4(3\cdot4 + 1) + 1 = 25^2 = 12\cdot4(12 + 1) + 1 = 625$	3m + 1
m = 5	$12\cdot5(3\cdot5 - 1) + 1 = 29^2 = 12\cdot5(15 - 1) + 1 = 841$	3m – 1
m = 5	$12\cdot5(3\cdot5 + 1) + 1 = 31^2 = 12\cdot5(15 + 1) + 1 = 961$	3m + 1
m = 6	$12\cdot6(3\cdot6 - 1) + 1 = 35^2 = 12\cdot6(18 - 1) + 1 = 1225$	3m – 1
m = 6	$12\cdot6(3\cdot6 + 1) + 1 = 37^2 = 12\cdot6(18 + 1) + 1 = 1369$	3m + 1
m = 7	$12\cdot7(3\cdot7 - 1) + 1 = 41^2 = 1681$	3m – 1
m = 7	$12\cdot7(3\cdot7 + 1) + 1 = 43^2$	3m + 1
m = 8	$12\cdot8(3\cdot8 - 1) + 1 = 47^2$	3m – 1
m = 8	$12\cdot8(3\cdot8 + 1) + 1 = 49^2$	3m + 1
m = 9	$12\cdot9(3\cdot9 - 1) + 1 = 53^2$	3m – 1
m = 9	$12\cdot9(3\cdot9 + 1) + 1 = 55^2$	3m + 1
m = 10	$12\cdot10(3\cdot10 - 1) + 1 = 59^2$	3m – 1
m = 10	$12\cdot10(3\cdot10 + 1) + 1 = 61^2$	3m + 1
m = 11	$12\cdot11(3\cdot11 - 1) + 1 = 65^2$	3m – 1
m = 11	$12\cdot11(3\cdot11 + 1) + 1 = 67^2$	3m + 1
m = 12	$12\cdot12(3\cdot12 - 1) + 1 = 71^2$	3m – 1
m = 12	$12\cdot12(3\cdot12 + 1) + 1 = 73^2$	3m + 1
m = 13	$12\cdot13(3\cdot13 - 1) + 1 = 77^2$	3m – 1
m = 13	$12\cdot13(3\cdot13 + 1) + 1 = 79^2$	3m + 1
m = 14	$12\cdot14(3\cdot14 - 1) + 1 = 83^2$	3m – 1
m = 14	$12\cdot14(3\cdot14 + 1) + 1 = 85^2$	3m + 1
m = 15	$12\cdot15(3\cdot15 - 1) + 1 = 89^2$	3m – 1
m = 15	$12\cdot15(3\cdot15 + 1) + 1 = 91^2$	3m + 1

m = 16	$12 \cdot 16(3 \cdot 16 - 1) + 1 = 95^2$	3m – 1
m = 16	$12 \cdot 16(3 \cdot 16 + 1) + 1 = 97^2$	3m + 1
m = 17	$12 \cdot 17(3 \cdot 17 - 1) + 1 = 101^2$	3m – 1
m = 17	$12 \cdot 17(3 \cdot 17 + 1) + 1 = 103^2$	3m + 1
m = 18	$12 \cdot 18(3 \cdot 18 - 1) + 1 = 107^2$	3m – 1
m = 18	$12 \cdot 18(3 \cdot 18 + 1) + 1 = 109^2$	3m + 1
m = 19	$12 \cdot 19(3 \cdot 19 - 1) + 1 = 113^2$	3m – 1
m = 19	$12 \cdot 19(3 \cdot 19 + 1) + 1 = 115^2$	3m + 1
m = 20	$12 \cdot 20(3 \cdot 20 - 1) + 1 = 119^2$	3m – 1
m = 20	$12 \cdot 20(3 \cdot 20 + 1) + 1 = 121^2$	3m + 1
m = 21	$12 \cdot 21(3 \cdot 21 - 1) + 1 = 125^2$	3m – 1
m = 21	$12 \cdot 21(3 \cdot 21 + 1) + 1 = 127^2$	3m + 1
m = 22	$12 \cdot 22(3 \cdot 22 - 1) + 1 = 131^2$	3m – 1
m = 22	$12 \cdot 22(3 \cdot 22 + 1) + 1 = 133^2$	3m + 1
m = 23	$12 \cdot 23(3 \cdot 23 - 1) + 1 = 137^2$	3m – 1
m = 23	$12 \cdot 23(3 \cdot 23 + 1) + 1 = 139^2$	3m + 1
m = 24	$12 \cdot 24(3 \cdot 24 - 1) + 1 = 143^2$	3m – 1
m = 24	$12 \cdot 24(3 \cdot 24 + 1) + 1 = 145^2$	3m + 1
m = 25	$12 \cdot 25(3 \cdot 25 - 1) + 1 = 149^2$	3m – 1
m = 25	$12 \cdot 25(3 \cdot 25 + 1) + 1 = 151^2$	3m + 1
m = 26	$12 \cdot 26(3 \cdot 26 - 1) + 1 = 155^2$	3m – 1
m = 26	$12 \cdot 26(3 \cdot 26 + 1) + 1 = 157^2$	3m + 1
m = 27	$12 \cdot 27(3 \cdot 27 - 1) + 1 = 161^2$	3m – 1
m = 27	$12 \cdot 27(3 \cdot 27 + 1) + 1 = 163^2$	3m + 1
m = 28	$12 \cdot 28(3 \cdot 28 - 1) + 1 = 167^2$	3m – 1

m = 28	$12 \cdot 28(3 \cdot 28 + 1) + 1 = 169^2$	3m + 1
m = 29	$12 \cdot 29(3 \cdot 29 - 1) + 1 = 173^2$	3m – 1
m = 29	$12 \cdot 29(3 \cdot 29 + 1) + 1 = 175^2$	3m + 1
m = 30	$12 \cdot 30(3 \cdot 30 - 1) + 1 = 179^2$	3m – 1
m = 30	$12 \cdot 30(3 \cdot 30 + 1) + 1 = 181^2$	3m + 1
m = 31	$12 \cdot 31(3 \cdot 31 - 1) + 1 = 185^2$	3m – 1
m = 31	$12 \cdot 31(3 \cdot 31 + 1) + 1 = 187^2$	3m + 1
m = 32	$12 \cdot 32(3 \cdot 32 - 1) + 1 = 191^2$	3m – 1
m = 32	$12 \cdot 32(3 \cdot 32 + 1) + 1 = 193^2$	3m + 1
m = 33	$12 \cdot 33(3 \cdot 33 - 1) + 1 = 197^2$	3m – 1
m = 33	$12 \cdot 33(3 \cdot 33 + 1) + 1 = 199^2$	3m + 1
m = 34	$12 \cdot 34(3 \cdot 34 - 1) + 1 = 203^2$	3m – 1
m = 34	$12 \cdot 34(3 \cdot 34 + 1) + 1 = 205^2$	3m + 1
m = 35	$12 \cdot 35(3 \cdot 35 - 1) + 1 = 209^2$	3m – 1
m = 35	$12 \cdot 35(3 \cdot 35 + 1) + 1 = 211^2$	3m + 1
m = 36	$12 \cdot 36(3 \cdot 36 - 1) + 1 = 215^2$	3m – 1
m = 36	$12 \cdot 36(3 \cdot 36 + 1) + 1 = 217^2$	3m + 1
m = 37	$12 \cdot 37(3 \cdot 37 - 1) + 1 = 221^2$	3m – 1
m = 37	$12 \cdot 37(3 \cdot 37 + 1) + 1 = 223^2$	3m + 1
m = 38	$12 \cdot 38(3 \cdot 38 - 1) + 1 = 227^2$	3m – 1
m = 38	$12 \cdot 38(3 \cdot 38 + 1) + 1 = 229^2$	3m + 1
m = 39	$12 \cdot 39(3 \cdot 39 - 1) + 1 = 233^2$	3m – 1
m = 39	$12 \cdot 39(3 \cdot 39 + 1) + 1 = 235^2$	3m + 1
m = 40	$12 \cdot 40(3 \cdot 40 - 1) + 1 = 239^2$	3m – 1
m = 40	$12 \cdot 40(3 \cdot 40 + 1) + 1 = 241^2$	3m + 1

m = 41	$12 \cdot 41(3 \cdot 41 - 1) + 1 = 245^2$	3m – 1
m = 41	$12 \cdot 41(3 \cdot 41 + 1) + 1 = 247^2$	3m + 1
m = 42	$12 \cdot 42(3 \cdot 42 - 1) + 1 = 251^2$	3m – 1
m = 42	$12 \cdot 42(3 \cdot 42 + 1) + 1 = 253^2$	3m + 1
m = 43	$12 \cdot 43(3 \cdot 43 - 1) + 1 = 257^2$	3m – 1
m = 43	$12 \cdot 43(3 \cdot 43 + 1) + 1 = 259^2$	3m + 1
m = 44	$12 \cdot 44(3 \cdot 44 - 1) + 1 = 263^2$	3m – 1
m = 44	$12 \cdot 44(3 \cdot 44 + 1) + 1 = 265^2$	3m + 1
m = 45	$12 \cdot 45(3 \cdot 45 - 1) + 1 = 269^2$	3m – 1
m = 45	$12 \cdot 45(3 \cdot 45 + 1) + 1 = 271^2$	3m + 1
m = 46	$12 \cdot 46(3 \cdot 46 - 1) + 1 = 275^2$	3m – 1
m = 46	$12 \cdot 46(3 \cdot 46 + 1) + 1 = 277^2$	3m + 1
m = 47	$12 \cdot 47(3 \cdot 47 - 1) + 1 = 281^2$	3m – 1
m = 47	$12 \cdot 47(3 \cdot 47 + 1) + 1 = 283^2$	3m + 1
m = 48	$12 \cdot 48(3 \cdot 48 - 1) + 1 = 287^2$	3m – 1
m = 48	$12 \cdot 48(3 \cdot 48 + 1) + 1 = 289^2$	3m + 1
m = 49	$12 \cdot 49(3 \cdot 49 - 1) + 1 = 293^2$	3m – 1
m = 49	$12 \cdot 49(3 \cdot 49 + 1) + 1 = 295^2$	3m + 1
m = 50	$12 \cdot 50(3 \cdot 50 - 1) + 1 = 299^2$	3m – 1
m = 50	$12 \cdot 50(3 \cdot 50 + 1) + 1 = 301^2$	3m + 1
m = 51	$12 \cdot 51(3 \cdot 51 - 1) + 1 = 305^2$	3m – 1
m = 51	$12 \cdot 51(3 \cdot 51 + 1) + 1 = 307^2$	3m + 1
m = 52	$12 \cdot 52(3 \cdot 52 - 1) + 1 = 311^2$	3m – 1
m = 52	$12 \cdot 52(3 \cdot 52 + 1) + 1 = 313^2$	3m + 1
m = 53	$12 \cdot 53(3 \cdot 53 - 1) + 1 = 317^2$	3m – 1

m = 53	$12 \cdot 53(3 \cdot 53 + 1) + 1 = 319^2$	3m + 1
m = 54	$12 \cdot 54(3 \cdot 54 - 1) + 1 = 323^2$	3m – 1
m = 54	$12 \cdot 54(3 \cdot 54 + 1) + 1 = 325^2$	3m + 1
m = 55	$12 \cdot 55(3 \cdot 55 - 1) + 1 = 329^2$	3m – 1
m = 55	$12 \cdot 55(3 \cdot 55 + 1) + 1 = 331^2$	3m + 1
m = 56	$12 \cdot 56(3 \cdot 56 - 1) + 1 = 335^2$	3m – 1
m = 56	$12 \cdot 56(3 \cdot 56 + 1) + 1 = 337^2$	3m + 1
m = 57	$12 \cdot 57(3 \cdot 57 - 1) + 1 = 341^2$	3m – 1
m = 57	$12 \cdot 57(3 \cdot 57 + 1) + 1 = 343^2$	3m + 1
m = 58	$12 \cdot 58(3 \cdot 58 - 1) + 1 = 347^2$	3m – 1
m = 58	$12 \cdot 58(3 \cdot 58 + 1) + 1 = 349^2$	3m + 1
m = 59	$12 \cdot 59(3 \cdot 59 - 1) + 1 = 353^2$	3m – 1
m = 59	$12 \cdot 59(3 \cdot 59 + 1) + 1 = 355^2$	3m + 1
m = 60	$12 \cdot 60(3 \cdot 60 - 1) + 1 = 359^2$	3m – 1
m = 60	$12 \cdot 60(3 \cdot 60 + 1) + 1 = 361^2$	3m + 1
…	…	…

Für Primzahlzwillinge[1292] steht bekanntlich fest,

- zwischen den beiden Primzahlen eines Primzahlzwillings liegt immer eine durch 6 teilbare Zahl > 3.
- Jede ganze Zahl lässt sich in der Form $6n - 2$, $6n - 1$, $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$ oder $6n + 3$ darstellen, wobei n eine ganze Zahl ist. 1
- Zahlen der Form $6n - 2$, $6n$ und $6n + 2$ sind durch 2 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Zwei keine Primzahlen sein.

[1292] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >; vgl Trost 10 f.

- Zahlen der Form 6*n* + 3 sind durch 3 teilbar und können deswegen mit Ausnahme der Drei auch keine Primzahlen sein.
- Somit haben alle Primzahlen p > 3 die Form[1293] 6*n* − 1 oder 6*n* + 1.

Daraus folgt, dass jeder Primzahlzwilling mit Primzahlen p > 3 die Darstellung 6*n* – 1 oder 6*n* + 1 hat[1294].

$$(6m+1)^2 + (6m-1)^2 = (36m^2 + 12m + 1) + (36m^2 - 12m + 1)$$
$$= 2(36m^2 + 1) = (12\,m(3m+1) + 1) + (12\,m(3m-1) + 1)$$

$$(6m+1)^2 = (6m+1)(6m+1) = 36m^2 + 6m + 6m + 1 = 36m^2 + 12m + 1$$
$$(6m-1)^2 = (6m-1)(6m-1) = 36m^2 - 6m - 6m + 1 = 36m^2 - 12m + 1$$

Analog der Fibonacci-Folge, wo $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ ist in der Lucas-Folge[1295] die Summe zweier benachbarten Glieder das Folgeglied. Den beiden Folgen kann aus der Summe zweier benachbarten Primzahlen $P_n + P_{n-1} = 6m$, die immer druch 6 teilbar ist, die Folge der Primzahlen der doppelten Länge $6m \pm 1 = P_m$ berechnet werden, oder mit anderen Worten kann jede Primzahl auf die Summe zweier benachbarten Primzahlen $(P_n + P_{n-1}) \pm 1 = 6m \pm 1$ zerlegt werden. Dabei kann die Doppelfolge zweier benachbarter Primzahlen

$$P_n + P_{n-1} = 6m = P_{n+1} = (6m - 1) + (6m + 1) = P_{n-1} + 3 + (-1)^n = P_n$$

oder

$$(2n + 1) + [1 + 1(-1)^{n+1}] = 2n + 2 + (-1)^{n+1} = 2(n + 1) + (-1)^{n+1}$$

in eine oszilliernde Folge zusammengezogen werden. Der Ausdruck $3n + 4/(3 + (-1)^n)$ ergibt durchgehen die gesuchten Werte:

[1293] Christof 4 f.
[1294] Wikipedia, Primzahlzwilling, In: < URL >.
[1295] Wikipedia, Lucas-Folge, in: < URL >.

n	P_n	$P_n + P_{n-1} = 6m = P_{2n\pm1} \pm 1$	$6m \pm 1 = 3n + 4/(3 + (-1)^n)$	$P_{n-1} + 3 + (-1)^n = P_n$
1	5	((1) + 2 + 3 = 6 = 1·6 = 2·3)	6 – 1 = 5 = 1·3 + 2	$1 + 3 + (-1)^0 = 5$
2	7		6 + 1 = 7 = 2·3 + 1	$5 + 3 + (-1)^1 = 7$
3	11	5 + 7 = 12 = 2·6 = 4·3	12 – 1 = 11 = 3·3 + 2	$7 + 3 + (-1)^2 = 11$
4	13		12 + 1 = 13 = 4·3 + 1	$11 + 3 + (-1)^3 = 13$
5	17	7 + 11 = 18 = 3·6 = 6·3	18 – 1 = 17 = 5·3 + 2	$13 + 3 + (-1)^4 = 17$
6	19		18 + 1 = 19 = 6·3 + 1	$17 + 3 + (-1)^5 = 19$
7	23	11 + 13 = 24 = 4·6 = 8·3	24 – 1 = 23 = 7·3 + 2	$19 + 3 + (-1)^6 = 23$
8	(25)		24 + 1 = 25 = 8·3 + 1	$23 + 3 + (-1)^7 = 25$
9	29	13 + 17 = 30 = 5·6 = 10·3	30 – 1 = 29 = 9·3 + 2	$25 + 3 + (-1)^8 = 29$
10	31		30 + 1 = 31 = 10·3 + 1	$29 + 3 + (-1)^9 = 31$
11	(35)	17 + 19 = 36 = 6·6 = 12·3	36 – 1 = 35 = 11·3 + 2	$31 + 3 + (-1)^{10} = 35$
12	37		36 + 1 = 37 = 12·3 + 1	$35 + 3 + (-1)^{11} = 37$
13	41	19 + 23 = 42 = 7·6 = 14·3	42 – 1 = 41 = 13·3 + 2	$37 + 3 + (-1)^{12} = 41$
14	43		42 + 1 = 43 = 14·3 + 1	$41 + 3 + (-1)^{13} = 43$
15	47	23 + 25 = 48 = 8·6 = 16·3	48 – 1 = 47 = 15·3 + 2	$43 + 3 + (-1)^{14} = 47$
16	(49)		48 + 1 = 49 = 16·3 + 1	$47 + 3 + (-1)^{15} = 49$
17	53	25 + 29 = 54 = 9·6 = 18·3	54 – 1 = 53 = 17·3 + 2	$49 + 3 + (-1)^{16} = 53$
18	(55)		54 + 1 = 55 = 18·3 + 1	$53 + 3 + (-1)^{17} = 55$
19	59	29 + 31 = 60 = 10·6 = 20·3	60 – 1 = 59 = 19·3 + 2	$55 + 3 + (-1)^{18} = 59$
20	61		60 + 1 = 61 = 20·3 + 1	$59 + 3 + (-1)^{19} = 61$
21	(65)	31 + 35 = 66 = 11·6	66 – 1 = 65 = 21·3 + 2	$61 + 3 + (-1)^{20} = 65$
22	67		66 + 1 = 67 = 22·3 + 1	$65 + 3 + (-1)^{21} = 67$
23	71	35 + 37 = 72 = 12·6	72 – 1 = 71 = 23·3 + 2	$67 + 3 + (-1)^{22} = 71$
24	73		72 + 1 = 73 = 24·3 + 1	$71 + 3 + (-1)^{23} = 73$

25	(77)	$37 + 41 = 78 = 13\cdot 6$	$78 - 1 = 77 = 25\cdot 3 + 2$	$73 + 3 + (-1)^{24} = 77$
26	79		$78 + 1 = 79 = 26\cdot 3 + 1$	$77 + 3 + (-1)^{25} = 79$
27	83	$41 + 43 = 84 = 14\cdot 6$	$84 - 1 = 83 = 27\cdot 3 + 2$	$79 + 3 + (-1)^{26} = 83$
28	(85)		$84 + 1 = 85 = 28\cdot 3 + 1$	$83 + 3 + (-1)^{27} = 85$
29	89	$43 + 47 = 90 = 15\cdot 6$	$90 - 1 = 89 = 29\cdot 3 + 2$	$85 + 3 + (-1)^{28} = 89$
30	(91)		$90 + 1 = 91 = 30\cdot 3 + 1$	$89 + 3 + (-1)^{29} = 91$
31	(95)	$47 + 49 = 96 = 16\cdot 6$	$96 - 1 = 95 = 31\cdot 3 + 2$	$91 + 3 + (-1)^{30} = 95$
32	97		$96 + 1 = 97 = 32\cdot 3 + 1$	$95 + 3 + (-1)^{31} = 97$
33	101	$49 + 53 = 102 = 17\cdot 6$	$102 - 1 = 101 = 33\cdot 3 + 2$	$97 + 3 + (-1)^{32} = 101$
34	103		$102 + 1 = 103 = 34\cdot 3 + 1$	$101 + 3 + (-1)^{33} = 103$
35	107	$53 + 55 = 108 = 18\cdot 6$	$108 - 1 = 107 = 35\cdot 3 + 2$	$103 + 3 + (-1)^{34} = 107$
36	109		$108 + 1 = 109 = 36\cdot 3 + 1$	$107 + 3 + (-1)^{35} = 109$
37	113	$55 + 59 = 114 = 19\cdot 6$	$114 - 1 = 113 = 37\cdot 3 + 2$	$109 + 3 + (-1)^{36} = 113$
38	(115)		$114 + 1 = 115 = 38\cdot 3 + 1$	$113 + 3 + (-1)^{37} = 115$
39	(119)	$59 + 61 = 120 = 20\cdot 6$	$120 - 1 = 119 = 39\cdot 3 + 2$	$115 + 3 + (-1)^{38} = 119$
40	(121)		$120 + 1 = 121 = 40\cdot 3 + 1$	$119 + 3 + (-1)^{39} = 121$
41	(125)	$61 + 65 = 126 = 21\cdot 6$	$126 - 1 = 125 = 41\cdot 3 + 2$	$121 + 3 + (-1)^{40} = 125$
42	127		$126 + 1 = 127 = 42\cdot 3 + 1$	$125 + 3 + (-1)^{41} = 127$
43	131	$65 + 67 = 132 = 22\cdot 6$	$132 - 1 = 131 = 43\cdot 3 + 2$	$127 + 3 + (-1)^{42} = 131$
44	(133)		$132 + 1 = 133 = 44\cdot 3 + 1$	$131 + 3 + (-1)^{43} = 133$
45	137	$67 + 71 = 138 = 23\cdot 6$	$138 - 1 = 137 = 45\cdot 3 + 2$	$133 + 3 + (-1)^{44} = 137$
46	139		$138 + 1 = 139 = 46\cdot 3 + 1$	$137 + 3 + (-1)^{45} = 139$
47	(143)	$71 + 73 = 144 = 24\cdot 6$	$144 - 1 = 143 = 47\cdot 3 + 2$	$139 + 3 + (-1)^{46} = 143$
48	(145)		$144 + 1 = 145 = 48\cdot 3 + 1$	$143 + 3 + (-1)^{47} = 145$
49	149	$73 + 77 = 150 = 25\cdot 6$	$150 - 1 = 149 = 49\cdot 3 + 2$	$145 + 3 + (-1)^{48} = 149$
50	151		$150 + 1 = 151 = 50\cdot 3 + 1$	$149 + 3 + (-1)^{49} = 151$
51	(155)	$77 + 79 = 156 = 26\cdot 6$	$156 - 1 = 155 = 51\cdot 3 + 2$	…
52	157		$156 + 1 = 157 = 52\cdot 3 + 1$	

53	(161)	79 + 83 = 162 = 27·6	162 – 1 = 161 = 53·3 + 2	
54	(163)		162 + 1 = 163 = 54·3 + 1	
55	163	83 + 85 = 168 = 28·6	168 – 1 = 167 = 55·3 + 2	
56	167		168 + 1 = 169 = 56·3 + 1	
57	173	85 + 89 = 174 = 29·6	174 – 1 = 173 = 57·3 + 2	
58	(175)		174 + 1 = 175 = 58·3 + 1	
59	179	89 + 91 = 180 = 30·6	180 – 1 = 179 = 59·3 + 2	
60	181		180 + 1 = 181 = 60·3 + 1	
61	(185)	91 + 95 = 186 = 31·6	186 – 1 = 185 = 61·3 + 2	
62	187		186 + 1 = 187 = 62·3 + 1	
63	191	95 + 97 = 192 = 32·6	191 – 1 = 191 = 63·3 + 2	
64	193		191 + 1 = 193 = 64·3 + 1	
65	197	97 + 101 = 198 = 33·6	198 – 1 = 197 = 65·3 + 2	
66	199		198 + 1 = 199 = 66·3 + 1	
67	(203)	101 + 103 = 204 = 34·6	204 – 1 = 203 = 67·3 + 2	
68	(205)		204 + 1 = 205 = 68·3 + 1	
69	(209)	103 + 107 = 210 = 35·6	210 – 1 = 209 = 69·3 + 2	
70	211		210 + 1 = 211 = 70·3 + 1	
71	(215)	107 + 109 = 216 = 36·6	216 – 1 = 215 = 71·3 + 2	
72	(217)		216 + 1 = 217 = 72·3 + 1	
73	(221)	109 + 113 = 222 = 37·6	222 – 1 = 221 = 73·3 + 2	
74	223		222 + 1 = 223 = 74·3 + 1	
75	227	113 + 115 = 228 = 38·6	228 – 1 = 227 = 75·3 + 2	
76	229		228 + 1 = 229 = 76·3 + 1	
77	233	115 + 119 = 234 = 39·6	234 – 1 = 233 = 77·3 + 2	
78	(235)		234 + 1 = 235 = 78·3 + 1	
79	239	119 + 121 = 240 = 40·6	240 – 1 = 239 = 79·3 + 2	
80	241		240 + 1 = 241 = 80·3 + 1	

81	(245)	121 + 125 = 246 = 41·6	246 – 1 = 245 = 81·3 + 2	
82	(247)		246 + 1 = 247 = 82·3 + 1	
83	251	125 + 127 = 252 = 42·6	252 – 1 = 251 = 83·3 + 2	
84	(253)		252 + 1 = 253 = 84·3 + 1	
85	257	127 + 131 = 258 = 43·6	258 – 1 = 257 = 85·3 + 2	
86	(259)		258 + 1 = 259 = 86·3 + 1	
87	263	131 + 133 = 264 = 44·6	264 – 1 = 263 = 87·3 + 2	
88	(265)		264 + 1 = 265 = 88·3 + 1	
89	269	133 + 137 = 270 = 45·6	270 – 1 = 269 = 89·3 + 2	
90	271		270 + 1 = 271 = 90·3 + 1	
91	(275)	137 + 139 = 276 = 46·6	276 – 1 = 275 = 91·3 + 2	
92	277		276 + 1 = 277 = 92·3 + 1	
93	281	139 + 143 = 282 = 47·6	282 – 1 = 281 = 93·3 + 2	
94	283		282 + 1 = 283 = 94·3 + 1	
95	(287)	143 + 145 = 288 = 48·6	288 – 1 = 287 = 95·3 + 2	
96	(289)		288 + 1 = 289 = 96·3 + 1	
97	293	145 + 149 = 294 = 49·6	294 – 1 = 293 = 97·3 + 2	
98	(295)		294 + 1 = 295 = 98·3 + 1	
99	(299)	149 + 151 = 300 = 50·6	300 – 1 = 299 = 99·3 + 2	
100	(301)		300 + 1 = 301 = 100·3 + 1	
101	(305)	151 + 155 = 306 = 51·6	306 – 1 = 305 = 101·3 + 2	
102	307		306 + 1 = 307 = 102·3 + 1	
103	311	155 + 157 = 312 = 52·6	312 – 1 = 311 = 103·3 + 2	
104	313		312 + 1 = 313 = 104·3 + 1	
104	317	157 + 161 = 318 = 53·6	318 – 1 = 317 = 105·3 + 2	
105	(319)		318 + 1 = 319 = 106·3 + 1	
106	(323)	161 + 163 = 324 = 54·6	324 – 1 = 323 = 107·3 + 2	
107	(325)		324 + 1 = 325 = 107·3 + 1	

108	(329)	163 + 167 = 330 = 55·6	330 – 1 = 329 = 108·3 + 2	
109	331		330 + 1 = 331 = 109·3 + 1	
110	(335)	167 + 169 = 336 = 56·6	336 – 1 = 335 = 110·3 + 2	
111	337		336 + 1 = 337 = 111·3 + 1	
112	(341)	169 + 173 = 342 = 57·6	342 – 1 = 341 = 112·3 + 2	
113	(343)		342 + 1 = 343 = 113·3 + 1	
114	347	173 + 175 = 348 = 58·6	348 – 1 = 347 = 114·3 + 1	
115	349		348 + 1 = 349 = 115·3 + 2	
116	353	175 + 179 = 354 = 59·6	354 – 1 = 353 = 116·3 + 1	
117	(355)		354 + 1 = 355 = 117·3 + 2	
118	359	179 + 181 = 360 = 60·6	360 – 1 = 359 = 118·3 + 1	
119	(361)		360 + 1 = 361 = 119·3 + 2	
120	(365)	181 + 185 = 366 = 61·6	366 – 1 = 365 = 120·3 + 1	
121	367		366 + 1 = 367 = 121·3 + 2	
	(371)	185 + 187 = 372 = 62·6	…	
	373			
	(377)	187 + 191 = 378 = 63·6		
	379			
	383			
	(385)			
	389			
	(391)			
	(395)			
	397			
	401			
	(403)			
	(407)			
	409			

	(413) (415) 419 421 (425) (427) 431 433 (437) 439 443 (445) 449 (451) (455) 457 461 463 467 (469) (473) (475) 479 (481) (485) 487 491 (493)			

	(497) 499 503 (505) 509 ...			

$P_n + P_{n-1} = 6m = P_{2n\pm1} \pm 1$, $(6m \pm 1) = 3n + 4/(3 + (-1)^n)$, $P_{n-1} + 3 + (-1)^n = P_n$,

			$3n + (3 + (-1)^{n+1})/2$	
			$5 = 1\cdot3 + 2 = 1\cdot3 + (3 + (-1)^{1+1})/2$ $7 = 2\cdot3 + 1 = 2\cdot3 + (3 + (-1)^{2+1})/2$ $11 = 3\cdot3 + 2 = 3\cdot3 + (3 + (-1)^{3+1})/2$ $13 = 4\cdot3 + 1 = 4\cdot3 + (3 + (-1)^{4+1})/2$ $17 = 5\cdot3 + 2 = 5\cdot3 + (3 + (-1)^{5+1})/2$ $19 = 6\cdot3 + 1 = 6\cdot3 + (3 + (-1)^{6+1})/2$ $23 = 7\cdot3 + 2 = 7\cdot3 + (3 + (-1)^{7+1})/2$ $25 = 8\cdot3 + 1 = 8\cdot3 + (3 + (-1)^{8+1})/2$ $29 = 9\cdot3 + 2 = 9\cdot3 + (3 + (-1)^{9+1})/2$ $31 = 10\cdot3 + 1 = 10\cdot3 + (3 + (-1)^{10+1})/2$ $35 = 11\cdot3 + 2 = 11\cdot3 + (3 + (-1)^{11+1})/2$ $37 = 12\cdot3 + 1 = 12\cdot3 + (3 + (-1)^{12+1})/2$ $41 = 13\cdot3 + 2 = 13\cdot3 + (3 + (-1)^{13+1})/2$ $43 = 14\cdot3 + 1 = 14\cdot3 + (3 + (-1)^{14+1})/2$ $47 = 15\cdot3 + 2 = 15\cdot3 + (3 + (-1)^{15+1})/2$ $49 = 16\cdot3 + 1 = 16\cdot3 + (3 + (-1)^{16+1})/2$	

			$53 = 17\cdot3 + 2 = 17\cdot3 + (3 + (-1)^{17+1})/2$ $55 = 18\cdot3 + 1$ $59 = 19\cdot3 + 2$ $61 = 20\cdot3 + 1$ $65 = 21\cdot3 + 2$ $67 = 22\cdot3 + 1$ $71 = 23\cdot3 + 2$ $73 = 24\cdot3 + 1$ $77 = 25\cdot3 + 2$ $79 = 26\cdot3 + 1$ $83 = 27\cdot3 + 2$ $85 = 28\cdot3 + 1$ $89 = 29\cdot3 + 2$ $91 = 30\cdot3 + 1$ $95 = 31\cdot3 + 2$ $97 = 32\cdot3 + 1$ $101 = 33\cdot3 + 2$ $103 = 34\cdot3 + 1$ $107 = 35\cdot3 + 2$ $109 = 36\cdot3 + 1$ $113 = 37\cdot3 + 2$ $115 = 38\cdot3 + 1$ $119 = 39\cdot3 + 2$ $121 = 40\cdot3 + 1$ $125 = 41\cdot3 + 2$ $127 = 42\cdot3 + 1$ $131 = 43\cdot3 + 2$ $133 = 44\cdot3 + 1$	

			137 = 45·3 + 2 139 = 46·3 + 1 143 = 47·3 + 2 145 = 48·3 + 1 149 = 49·3 + 2 151 = 50·3 + 1 155 = 51·3 + 2 157 = 52·3 + 1 161 = 53·3 + 2 163 = 54·3 + 1 167 = 55·3 + 2 169 = 56·3 + 1 173 = 57·3 + 2 175 = 58·3 + 1 179 = 59·3 + 2 181 = 60·3 + 1 185 = 61·3 + 2 187 = 62·3 + 1 191 = 63·3 + 2 193 = 64·3 + 1 197 = 65·3 + 2 199 = 66·3 + 1 203 = 67·3 + 2 205 = 68·3 + 1 209 = 69·3 + 2 211 = 70·3 + 1 215 = 71·3 + 2 217 = 72·3 + 1	

			221 = 73·3 + 2 223 = 74·3 + 1 227 = 75·3 + 2 229 = 76·3 + 1 233 = 77·3 + 2 235 = 78·3 + 1 239 = 79·3 + 2 241 = 80·3 + 1 245 = 81·3 + 2 247 = 82·3 + 1 251 = 83·3 + 2 253 = 84·3 + 1 257 = 85·3 + 2 259 = 86·3 + 1 263 = 87·3 + 2 265 = 88·3 + 1 269 = 89·3 + 2 271 = 90·3 + 1 275 = 91·3 + 2 277 = 92·3 + 1 281 = 93·3 + 2 283 = 94·3 + 1 287 = 95·3 + 2 289 = 96·3 + 1 293 = 97·3 + 2 295 = 98·3 + 1 299 = 99·3 + 2 301 = 100·3 + 1	

			305 = 101·3 + 2 307 = 102·3 + 1 311 = 103·3 + 2 313 = 104·3 + 1 317 = 105·3 + 2 319 = 106·3 + 1 323 = 107·3 + 2 325 = 108·3 + 1 329 = 109·3 + 2 331 = 110·3 + 1 335 = 111·3 + 2 337 = 112·3 + 1 341 = 113·3 + 2 343 = 114·3 + 1 347 = 115·3 + 2 349 = 116·3 + 1 353 = 117·3 + 2 355 = 118·3 + 1 359 = 119·3 + 2 361 = 120·3 + 1 365 = 121·3 + 2 367 = 122·3 + 1 371 = 123·3 + 2 373 = 124*3 + 1 377 = 125*3 + 2 379 = 126*3 + 1 …	

Anhand der neuen Zwischenergebnisse kann die Formel $(12\,m(3m \pm 1) + 1)$ weiter entfaltet werden

$(12\,m(3m+1)+1)\ +(12\,m(3m-1)+1)$	m(3m±1)
12·1(3·1 – 1) + 1 = 5² = 12·1(3 – 1) + 1 = 12·1(2) + 1 = 12·2 + 1	2
12·1(3·1 + 1) + 1 = 7² = 12·1(3 + 1) + 1 =12·1(4) + 1 = 12·4 + 1	4
12·2(3·2 – 1) + 1 = 11² = 12·2(6 – 1) + 1 = 12·2(5) + 1 = 12·10 + 1	10
12·2(3·2 + 1) + 1 = 13² = 12·2(6 + 1) + 1 = 12·2(7) + 1 = 12·14 + 1	14
12·3(3·3 – 1) + 1 = 17² = 12·3(9 – 1) + 1 = 12·3(8) + 1 = 12·24 + 1	24
12·3(3·3 + 1) + 1 = 19² = 12·3(9 + 1) + 1 = 12·3(10) + 1 = 12·30 + 1	30
12·4(3·4 – 1) + 1 = 23² = 12·4(12 – 1) + 1 = 12·4(11) + 1 = 12·44 + 1	44
12·4(3·4 + 1) + 1 = 25² = 12·4(12 + 1) + 1 = 12·4(13) + 1 = 12·56 + 1	52
12·5(3·5 – 1) + 1 = 29² = 12·5(15 – 1) + 1 = 12·5(14) + 1 = 12·70 + 1	70
12·5(3·5 + 1) + 1 = 31² = 12·5(15 + 1) + 1 = 12·5(16) + 1 = 12·80 + 1	80
12·6(3·6 – 1) + 1 = 35² = 12·6(18 – 1) + 1 = 12·6(17) + 1 = 12·102 + 1	102
12·6(3·6 + 1) + 1 = 37² = 12·6(18 + 1) + 1 = 12·6(19) + 1 = 12·114 + 1	114
12·7(3·7 – 1) + 1 = 41² = 12·7(3·7 – 1) + 1 = 12·7(20) + 1 = 12·140 + 1	140
12·7(3·7 + 1) + 1 = 43² = 12·7(3·7 + 1) + 1 = 12·7(22) + 1 = 12·154 + 1	154
12·8(3·8 – 1) + 1 = 47² = 12·8(3·8 – 1) + 1 = 12·8(23) + 1 = 12·184 + 1	184
12·8(3·8 + 1) + 1 = 49² = 12·8(3·8 + 1) + 1 = 12·8(25) + 1 = 12·200 + 1	200
12·9(3·9 – 1) + 1 = 53² = 12·9(3·9 – 1) + 1 = 12·9(26) + 1 = 12·234 + 1	234
12·9(3·9 + 1) + 1 = 55² = 12·9(3·9 + 1) + 1 = 12·9(28) + 1 = 12·252 + 1	252
12·10(3·10 – 1) + 1 = 59² = 12·10(3·10 – 1) + 1 = 12·10(29) + 1 = 12·290 +1	290
12·10(3·10 + 1) + 1 = 61² = 12·10(3·10 + 1) + 1 = 12·10(31) + 1 = 12·310+1	310

12·11(3·11 – 1) + 1 = 65² = 12·11(3·11 – 1) + 1 =	352
12·11(3·11 + 1) + 1 = 67² = 12·11(3·11 + 1) + 1 =	374
12·12(3·12 – 1) + 1 = 71² = 12·12(3·12 – 1) + 1 =	420
12·12(3·12 + 1) + 1 = 73² = 12·12(3·12 + 1) + 1 =	444
12·13(3·13 – 1) + 1 = 77² = 12·13(3·13 – 1) + 1 =	494
12·13(3·13 + 1) + 1 = 79² = 12·13(3·13 + 1) + 1 =	520
12·14(3·14 – 1) + 1 = 83² = 12·14(3·14 – 1) + 1 =	574
12·14(3·14 + 1) + 1 = 85² = 12·14(3·14 + 1) + 1 =	602
12·15(3·15 – 1) + 1 = 89² = 12·15(3·15 – 1) + 1 =	660
12·15(3·15 + 1) + 1 = 91² = 12·15(3·15 + 1) + 1 =	690
12·16(3·16 – 1) + 1 = 95² = 12·16(3·16 – 1) + 1 =	752
12·16(3·16 + 1) + 1 = 97² = 12·16(3·16 + 1) + 1 =	784
12·17(3·17 – 1) + 1 = 101² = 12·17(3·17 – 1) + 1 =	850
12·17(3·17 + 1) + 1 = 103² = 12·17(3·17 + 1) + 1 =	884
12·18(3·18 – 1) + 1 = 107² = 12·18(3·18 – 1) + 1 =	954
…	…

Daraus nur n = m(3m±1) hervorgehoben aus der Formel $(12\,m(3m \pm 1) + 1)$ erhält man 12n + 1, was weiter zusammengesetzt ist.

	n = m(3m±1)	6k + 2	6k + 4		
	2	2			
	4		4	4-2 = 2	2 + 6 = 8
	10	10 – 2 = 8 = 2 + 6		10 – 4 = 6	6 +

	14		14 – 4 = 10 = 4 + 6	14 – 10 = 4	4 + 10=14
	24	24 – 10 = 14 = 8 + 6		24 - 14 = 10	10 +
	30		30 – 14 = 16 = 10 + 6	30 - 24 = 6	6 +
	44	44 – 24 = 20 = 14 + 6		44- 30 = 14	
	52		52 – 30 = 22 = 16 + 6	52 – 44 = 8	8 +
	70	70 – 44 = 26 = 20 + 6		70 – 52 = 18	
	80		80 – 52 = 28 = 22 + 6	80 – 70 = 10	10 +
	102	102 – 70 = 32 = 26 + 6		102 – 80 = 22	
	114		114 – 80 = 34 = 28 + 6	114 – 102 = 12	12 +
	140	140 – 102 = 38 = 32 + 6		140 – 114 = 26	
	154		154 – 114 = 40 = 34 + 6	154 – 140 = 14	14 +
	184	184 – 140 = 44 = 38 + 6		184 – 154 =30	
	200		200 – 154 = 46 = 40 + 6	200 – 184 = 16	16 +
	234	234 – 184 = 50 = 44 + 6		234 – 200 = 34	
	252		252 – 200 = 52 = 46 + 6	252 – 234 = 18	18 +
	290	290 – 234 = 56 = 50 + 6		290 – 252 = 38	
	310		310 – 252 = 58 = 52 + 6	310 – 290 = 20	20 +
	352	352 – 290 = 62 = 56 + 6		352 – 310 = 42	
	374		374 – 310 = 64 = 58 + 6	374 – 352 = 22	22 +
	420	420 – 352 = 68 = 62 + 6		420 – 374 = 46	
	444		444 – 374 = 70 = 64 + 6	444 – 420 = 24	24 +
	494	494 – 420 = 74 = 68 + 6		494 – 444 = 50	
	520		520 – 444 = 76 = 70 + 6	520 – 494 = 26	26 +
	574	574 – 494 = 80 = 74 + 6		574 – 520 = 54	
	602		602 – 520 = 82 = 76 + 6	602 – 574 = 28	28 +

	660	660 – 574 = 86 = 80 + 6		660 – 602 = 58	
	690		690 – 602 = 88 = 82 + 6	690 – 660 = 30	30 +
	752	752 – 660 = 92 = 86 + 6		752 – 690 = 62	
	-784		784 – 690 = 94 = 88 + 6	784 – 752 = 32	32 +
	850	850 – 752 = 98 = 92 + 6		850 – 784 = 66	
	884		884 – 784 = 100 = 94 + 6	884 – 850 = 34	34 +
	954	954 – 850 = 104 = 98 + 6		954 – 884 = 70	
	…	…	…	…	

Etwas weiter im Detail berechnet:

n=	m(3m ±1)	6k + 2	6k + 4	
1	2	2	2 + 4 = 8 = 1*6 + 2	
2	4	2 + 4 = 6 = 1*6 = 1²*6	4	4-2 = 2
3	10	10 – 2 = 8 = 2 + 6	4 + 10 = 14 = 2*6 + 2	10 – 4 = 6
4	14	10 + 14 = 24 = 4*6 = 2²*6	14 – 4 = 10 = 4 + 6	14 – 10 = 4
5	24	24 – 10 = 14 = 8 + 6	14 + 24 = 38 = 6*6 + 2	24 - 14 = 10
6	30	24 + 30 = 54 = 9*6 = 3²*6	30 – 14 = 16 = 10 + 6	30 - 24 = 6
7	44	44 – 24 = 20 = 14 + 6	30 + 44 = 74 = 12*6 + 2	44- 30 = 14
8	52	44 + 52 = 96 = 16*6 = 4²*6	52 – 30 = 22 = 16 + 6	52 – 44 = 8
9	70	70 – 44 = 26 = 20 + 6	52 + 70 = 122 = 20*6 + 2	70 – 52 = 18

10	80	70 + 80 = 150 = 25*6 = 5²*6	80 – 52 = 28 = 22 + 6	80 – 70 = 10
11	102	102 – 70 = 32 = 26 + 6	80 + 102 = 182 = 30*6 + 2	102 – 80 = 22
12	114	102 + 114 = 216 = 36*6 = 6²*6	114 – 80 = 34 = 28 + 6	114 – 102 = 12
13	140	140 – 102 = 38 = 32 + 6	114 + 140 = 254 = 42*6 + 2	140 – 114 = 26
14	154	140 + 154 = 294 = 49*6 = 7²*6	154 – 114 = 40 = 34 + 6	154 – 140 = 14
15	184	184 – 140 = 44 = 38 + 6	154 + 184 = 338 = 56*6 + 2	184 – 154 =30
16	200	184 + 200 = 384 = 64*6 = 8²*6	200 – 154 = 46 = 40 + 6	200 – 184 = 16
17	234	234 – 184 = 50 = 44 + 6	200 + 234 = 434 = 72*6 + 2	234 – 200 = 34
18	252	234 + 252 = 486 = 81*6 = 9²*6	252 – 200 = 52 = 46 + 6	252 – 234 = 18
19	290	290 – 234 = 56 = 50 + 6	252 + 290 = 542 = 90*6 + 2	290 – 252 = 38
20	310	290 + 310 = 600 = 100*6=10²*6	310 – 252 = 58 = 52 + 6	310 – 290 = 20
21	352	352 – 290 = 62 = 56 + 6	310 + 352 = 662 = 110*6 + 2	352 – 310 = 42
22	374	352 + 374 = 726 = 11²*6	374 – 310 = 64 = 58 + 6	374 – 352 = 22
23	420	420 – 352 = 68 = 62 + 6	374 + 420 = 794 = 132*6 + 2	420 – 374 = 46
24	444	420 + 444 = 864 = 12²*6	444 – 374 = 70 = 64 + 6	444 – 420 = 24
25	494	494 – 420 = 74 = 68 + 6	444 + 494 = 938 = 156*6 + 2	494 – 444 = 50
26	520	494 + 520 = 1014 = 13²*6	520 – 444 = 76 = 70 + 6	520 – 494 = 26
27	574	574 – 494 = 80 = 74 + 6	520 + 574 = 1094 = 182*6 + 2	574 – 520 = 54
28	602	574 + 602 = 1176 = 14²*6	602 – 520 = 82 = 76 + 6	602 – 574 = 28
29	660	660 – 574 = 86 = 80 + 6	602 + 660 = 1262 = 210*6 + 2	660 – 602 = 58
30	690	660 + 690 = 1350 = 15²*6	690 – 602 = 88 = 82 + 6	690 – 660 = 30
31	752	752 – 660 = 92 = 86 + 6	690 + 752 = 1442 = 240*6 + 2	752 – 690 = 62
32	784	752 + 784 = 1536 = 16²*6	784 – 690 = 94 = 88 + 6	784 – 752 = 32
33	850	850 – 752 = 98 = 92 + 6	784 + 850 = 1634 = 272*6 + 2	850 – 784 = 66
34	884	850 + 884 = 1734 = 17²*6	884 – 784 = 100 = 94 + 6	884 – 850 = 34

35	954	954 – 850 = 104 = 98 + 6	884 + 954 = 1838 = 306*6 + 2	954 – 884 = 70
…	…	…	…	…

Der Tel $m(3m \pm 1)$ der Formel $12\,m(3m \pm 1) + 1$ hat gesondert ausgerechnet eine zyklische Wiederholung der Endziffern: 2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0, 0, also eine zehngliedrige Periode. Das entspricht auf der Ebene der Primzahlenanwärter, also in die formel $(12\,m(3m \pm 1) + 1)^{1/2}$ eingesetzt, den Werten 5², 35², 65², 95²,… also 30n² + 5². Die Endziffern 2 stehen für Quadrate mit Endzifer 5. Die Endziffer 0, 4, stehen für die Quadrate mit Entziffer 1, 3, 7, 9. Die periodische Folge der Endziffern 2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0, 0, zeigt noch eine innere Struktur, wenn sie nicht mit 2 begonnen wird sondern mit 0:

2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0, 0, 2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0,
0, 2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0,
0, 2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0,
0, 2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0,
0, 2, 4, 0, 4, 4, 0, 4, 2, 0, …

In disem Fall kann die Folge in der Mitte zweigeteilt werden, und die bis zur Mitte in die eine Richtung sich bildende Aufeianderfolge, 0, 2, 4, 0, 4, kehrt sich in der Mitte um hat rückläufig bzw. spiegelsymmetisch 4, 0, 4, 2, 0, den gleichen Ablauf.

Vergleichsweise sind die Endzifern in n von 24n sind 1, 2, 5, 7, 2, 5, 2, 6, 5, 0, 1, 7, 0, 7, 2, 0, 7, 6, 5, 5, 6, 7, 0, 2, 7, 0, 7, 1, 0, 5, 6, 2, 5, 2, 7, 5, 2, 1, 0, 0, und sie wiederholen sich nach 40 Rechenschritten. Die Endziffern 1 und 6 stehen hier für Quadrate mit Endzifer 5. Die Endziffer 0, 2, 5, 7, stehen für die Quadrate mit Entziffer 1, 3, 7, 9. Auch hier lässt sich analog aber der Mitte eine räuckläufig identische Abfolge beobachten, wenn man nicht mit der Ziffer 1, sondern mit 0 beginnt:

0, 1, 2, 5, 7, 2, 5, 2, 6, 5, 0, 1, 7, 0, 7, 2, 0, 7, 6, 5,
5, 6, 7, 0, 2, 7, 0, 7, 1, 0, 5, 6, 2, 5, 2, 7, 5, 2, 1, 0,

Ansonsten lassen die Zahlenpaare 2 + 5 = 7; 1 + 5 = 6; 0 + 5 = 5 feststellen, die als Endziffern auch immer umgekehrt die zweite Komponente ergeben (zB 7 + 5 = 12, wo Endziffer wieder zwei ist, und die Schleife 2 + 5 = 7 neu beginnt) und so die Zahlpaare eine geschlossene Einheit von Endziffern bilden. Das erklärt auch, warum die Verdoppeltung von n in 24n zu 2*12n die Anzahl der Endziffer halbiert, denn 2*0 = 0, 2*1 = 2, 2*2 = 4, 2*5 = 10, 2*6 = 12, 2*7 = 14, so dass aus den zuvor 6 verschiedenen Endziffern, 0, 1, 2, 5, 6, 7, nunmehr 3 werden, 0, 2, 4, die alle < 5 und jeweils den Abstand 2 haben.

			12·3·1 + 1	
24·1 + 1 = 25 = 5²	1	2.12·3·1 + 4	12·3·3 + 1	24·1 + 1 = 25
24·2 + 1 = 49 = 7²	2	2.12·3·2 + 2	12·3·4 + 2	24·2 + 1 = 49
24·5 + 1 = 121 = 11²	5	2.12·3·4	12·3·8	24·(5·1 + 0) + 1
24·7 + 1 = 169 = 13²	7	2.12·3·5	12·3·10	24·(5·1 + 2) + 1
24·12 + 1 = 289 = 17²	2	2.12·3·7 + 2	12·3·14 + 2	24·(5·2 + 2) + 1
24·15 + 1 = 361 = 19²	5	2.12·3·8 + 4	12·3·17 + 1	24·(5·3 + 0) + 1
24·22 + 1 = 529 = 23²	2	2.12·3·11 + 4	12·3·23 + 1	24·(5·4 + 2) + 1
24·26 + 1 = 625 = 25²	6	2.12·3·13 + 2	12·3·26 + 2	24·(5·5 + 1) + 1
24·35 + 1 = 841 = 29²	5	2.12·3·17	12·3·34	24·(5·7 + 0) + 1
24·40 + 1 = 961 = 31²	0	2.12·3·19	12·3·38	24·(5·8 + 0) + 1
24·51 + 1 = 1225 = 35²	1	2.12·3·23 + 2	12·3·46 + 2	24·(5·10 + 1) + 1
24·57 + 1 = 1369 = 37²	7	2.12·3·25 + 4	12·3·51 + 1	24·(5·11 + 2) + 1
24·70 + 1 = 1681 = 41²	0	2.12·3·30 + 4	12·3·61 + 1	24·(5·14 + 0) + 1

$24 \cdot 77 + 1 = 1849 = 43^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot 33 + 2$	$12 \cdot 3 \cdot 66 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 15 + 2) + 1$
$24 \cdot 92 + 1 = 2209 = 47^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot 39$	$12 \cdot 3 \cdot 78$	$24 \cdot (5 \cdot 18 + 2) + 1$
$24 \cdot 100 + 1 = 2401 = 49^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot 42$	$12 \cdot 3 \cdot 84$	$24 \cdot (5 \cdot 20 + 1) + 1$
$24 \cdot 117 + 1 = 2809 = 53^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot 48 + 2$	$12 \cdot 3 \cdot 96 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 23 + 2) + 1$
$24 \cdot 126 + 1 = 3025 = 55^2$	6	$2.12 \cdot 3 \cdot 51 + 4$	$12 \cdot 3 \cdot 103 + 1$	$24 \cdot (5 \cdot 25 + 1) + 1$
$24 \cdot 145 + 1 = 3481 = 59^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot 58 + 4$	$12 \cdot 3 \cdot 117 + 1$	$24 \cdot (5 \cdot 29 + 0) + 1$
$24 \cdot 155 + 1 = 3721 = 61^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot 62 + 2$	$12 \cdot 3 \cdot 124 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 31 + 0) + 1$
$24 \cdot 176 + 1 = 4225 = 65^2$	6	$2.12 \cdot 3 \cdot 70$	$12 \cdot 3 \cdot 140$	$24 \cdot (5 \cdot 35 + 1) + 1$
$24 \cdot 187 + 1 = 4489 = 67^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot 74$	$12 \cdot 3 \cdot 148$	$24 \cdot (5 \cdot 37 + 2) + 1$
$24 \cdot 210 + 1 = 5041 = 71^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot 82 + 2$	$12 \cdot 3 \cdot 164 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 42 + 0) + 1$
$24 \cdot 222 + 1 = 5329 = 73^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot 84 + 4$	$12 \cdot 3 \cdot 173 + 1$	$24 \cdot (5 \cdot 44 + 2) + 1$
$24 \cdot 247 + 1 = 5929 = 77^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot 95$	$12 \cdot 3 \cdot 191 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 49 + 2) + 1$
$24 \cdot 260 + 1 = 6241 = 79^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot 100 + 2$	$12 \cdot 3 \cdot 200 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 52 + 0) + 1$
$24 \cdot 287 + 1 = 6889 = 83^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot 110$	$12 \cdot 3 \cdot 220$	$24 \cdot (5 \cdot 57 + 2) + 1$
$24 \cdot 301 + 1 = 7225 = 85^2$	1	$2.12 \cdot 3 \cdot 115$	$12 \cdot 3 \cdot 230$	$24 \cdot (5 \cdot 60 + 1) + 1$
$24 \cdot 330 + 1 = 7921 = 89^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot 125 + 2$	$12 \cdot 3 \cdot 250 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 66 + 0) + 1$
$24 \cdot 345 + 1 = 8281 = 91^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot 130 + 4$	$12 \cdot 3 \cdot 260 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 69 + 0) + 1$
$24 \cdot 376 + 1 = 9025 = 95^2$	6	$2.12 \cdot 3 \cdot 141 + 4$	$12 \cdot 3 \cdot 283 + 1$	$24 \cdot (5 \cdot 75 + 1) + 1$
$24 \cdot 392 + 1 = 9409 = 97^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot 147 + 2$	$12 \cdot 3 \cdot 294 + 2$	$24 \cdot (5 \cdot 78 + 2) + 1$
$24 \cdot 425 + 1 = 10201 = 101^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot 159$	$12 \cdot 3 \cdot 318$	$24 \cdot (5 \cdot 85 + 0) + 1$
$24 \cdot 442 + 1 = 10609 = 103^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 88 + 2) + 1$
$24 \cdot 477 + 1 = 11449 = 107^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 95 + 2) + 1$
$24 \cdot 495 + 1 = 11881 = 109^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 99 + 0) + 1$
$24 \cdot 532 + 1 = 12769 = 113^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 106 + 2) + 1$
$24 \cdot 551 + 1 = 13225 = 115^2$	1	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 110 + 1) + 1$
$24 \cdot 590 + 1 = 14161 = 119^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 118 + 2) + 1$

24·610 + 1 = 14641 = 121²	0	2.12·3·	12·3·	24·(5·122 + 0) + 1
24·651 + 1 = 15625 = 125²	1	2.12·3·	12·3·	24·(5·130 + 1) + 1
24·672 + 1 = 16129 = 127²	2	2.12·3·	12·3·	24·(5·137 + 2) + 1
24·715 + 1 = 17161 = 131²	5	2.12·3·	12·3·	24·(5·143 + 0) + 1
24·737 + 1 = 17689 = 133²	7	2.12·3·	12·3·	24·(5·147 + 0) + 1
24·782 + 1 = 18769 = 137²	2	2.12·3·	12·3·	24·(5·156 + 2) + 1
24·805 + 1 = 19321 = 139²	5	2.12·3·	12·3·	24·(5·161 + 0) + 1
24·852 + 1 = 20449 = 143²	2	2.12·3·	12·3·	24·(5·170 + 2) + 1
24·876 + 1 = 21025 = 145²	6	2.12·3·	12·3·	24·(5·175 + 1) + 1
24·925 + 1 = 22201 = 149²	5	2.12·3·	12·3·	24·(5·185 + 0) + 1
24·950 + 1 = 22801 = 151²	0	2.12·3·	12·3·	24·(5·190 + 0) + 1
24·1001 + 1 = 24025 = 155²	1	2.12·3·	12·3·	24·(5·200 + 1) + 1
24·1027 + 1 = 24649 = 157²	7	2.12·3·	12·3·	24·(5·205 + 2) + 1
24·1080 + 1 = 25921 = 161²	0	2.12·3·	12·3·	24·(5·216 + 0) + 1
24·1107 + 1 = 26569 = 163²	7	2.12·3·	12·3·	24·(5·221 + 2) + 1
24·1162 + 1 = 27889 = 167²	2	2.12·3·	12·3·	24·(5·232 + 2) + 1
24·1190 + 1 = 28561 = 169²	0	2.12·3·	12·3·	24·(5·238 + 0) + 1
24·1247 + 1 = 29929 = 173²	7	2.12·3·	12·3·	24·(5·249 + 2) + 1
24·1276 + 1 = 30625 = 175²	5	2.12·3·	12·3·	24·(5·255 + 1) + 1
24·1335 + 1 = 32041 = 179²	5	2.12·3·	12·3·	24·(5·267 + 0) + 1
24·1365 + 1 = 32761 = 181²	7	2.12·3·	12·3·	24·(5·273 + 0) + 1
24·1426 + 1 = 34225 = 185²	0	2.12·3·	12·3·	24·(5·285 + 1) + 1
24·1457 + 1 = 34969 = 187²	2	2.12·3·	12·3·	24·(5·291 + 2) + 1
24·1520 + 1 = 36481 = 191²	7	2.12·3·	12·3·	24·(5·304 + 0) + 1
24·1552 + 1 = 37249 = 193²	0	2.12·3·	12·3·	24·(5·310 + 2) + 1

$24 \cdot 1617 + 1 = 38809 = 197^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 323 + 2) + 1$
$24 \cdot 1650 + 1 = 39601 = 199^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 330 + 0) + 1$
$24 \cdot 1717 + 1 = 41209 = 203^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 343 + 2) + 1$
$24 \cdot 1751 + 1 = 42025 = 205^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 350 + 1) + 1$
$24 \cdot 1820 + 1 = 43681 = 209^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 364 + 0) + 1$
$24 \cdot 1855 + 1 = 44521 = 211^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 371 + 0) + 1$
$24 \cdot 1926 + 1 = 46225 = 215^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 385 + 1) + 1$
$24 \cdot 1962 + 1 = 47089 = 217^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 392 + 2) + 1$
$24 \cdot 2035 + 1 = 48841 = 221^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 407 + 0) + 1$
$24 \cdot 2072 + 1 = 49729 = 223^2$	2	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 414 + 2) + 1$
$24 \cdot 2147 + 1 = 52529 = 227^2$	5	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 429 + 2) + 1$
$24 \cdot 2185 + 1 = 52441 = 229^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 437 + 0) + 1$
$24 \cdot 2262 + 1 = 54289 = 233^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 452 + 2) + 1$
$24 \cdot 2301 + 1 = 45225 = 235^2$	0	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 460 + 1) + 1$
$24 \cdot 2380 + 1 = 57121 = 239^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 476 + 0) + 1$
$24 \cdot 2420 + 1 = 58081 = 241^2$	7	$2.12 \cdot 3 \cdot$	$12 \cdot 3 \cdot$	$24 \cdot (5 \cdot 484 + 0) + 1$
$24 \cdot 2501 + 1 = 60025 = 245^2$				$24 \cdot (5 \cdot 500 + 1) + 1$
$24 \cdot 2542 + 1 = 61009 = 247^2$				$24 \cdot (5 \cdot 508 + 2) + 1$
$24 \cdot 2625 + 1 = 63001 = 251^2$				$24 \cdot (5 \cdot 525 + 0) + 1$
$24 \cdot 2667 + 1 = 64009 = 253^2$				$24 \cdot (5 \cdot 533 + 2) + 1$
$24 \cdot 2752 + 1 = 66049 = 257^2$				$24 \cdot (5 \cdot 550 + 2) + 1$
$24 \cdot 2795 + 1 = 67081 = 259^2$				$24 \cdot (5 \cdot 559 + 0) + 1$
$24 \cdot 2882 + 1 = 69169 = 263^2$				$24 \cdot (5 \cdot 576 + 2) + 1$
$24 \cdot 2926 + 1 = 70225 = 265^2$				$24 \cdot (5 \cdot 585 + 1) + 1$
$24 \cdot 3015 + 1 = 72361 = 269^2$				$24 \cdot (5 \cdot 603 + 0) + 1$
$24 \cdot 3060 + 1 = 73441 = 271^2$				$24 \cdot (5 \cdot 612 + 0) + 1$

24·3151 + 1 = 75625 = 275² 24·3197 + 1 = 76729 = 277² 24·3290 + 1 = 78961 = 281² 24·3337 + 1 = 80089 = 283² 24·3432 + 1 = 82369 = 287² 24·3480 + 1 = 83521 = 289² 24·3577 + 1 = 85849 = 293² 24·3626 + 1 = 67025 = 295² 24·3725 + 1 = 89401 = 299²				24·(5·630 + 1) + 1 24·(5·639 + 2) + 1 24·(5·658 + 0) + 1 24·(5·667 + 2) + 1 24·(5·686 + 2) + 1 24·(5·696 + 0) + 1 24·(5·715 + 0) + 1 24·(5·725 + 1) + 1 24·(5·745 + 0) + 1
24·3775 + 1 = 90601 = 301² 24·3876 + 1 = 93025 = 305² 24·3927 + 1 = 94249 = 307² 24·4030 + 1 = 96721 = 311² 24·4082 + 1 = 97969 = 313² 24·4187 + 1 = 100489 = 317² 24·4240 + 1 = 101761 = 319² …	0 2 7	2.12·3· 2.12·3· 2.12·3· …	12·3· 12·3· 12·3· …	24·(5·755 + 0) + 1 24·(5·775 + 1) + 1 24·(5·785 + 2) + 1 24·(5·806 + 0) + 1 24·(5·816 + 2) + 1 24·(5·837 + 2) + 1 24·(5·848 + 0) + 1 …

Man kann n in 24n + 1 als Viefache von m in der Form 5m oder 5m + 2 auflösen (dabei sind 5m + 1 die Zahlen mit Endziffer 5):

24n + 1 = p²	24(5·m + 1 ± 1) + 1	
24·1 + 1 = 25 = 5² = (6·1 − 1)² 24·2 + 1 = 49 = 7² = (6·1 + 1)²	24·1 + 1 = 25 24·2 + 1 = 49	

$24\cdot(5\cdot1) + 1 = 121 = 11^2 = (6\cdot2 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot1 + 2) + 1 = 169 = 13^2 = (6\cdot2 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot1 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot1 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot2 + 2) + 1 = 289 = 17^2 = (6\cdot3 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot3 + 0) + 1 = 361 = 19^2 = (6\cdot3 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot4 + 2) + 1 = 529 = 23^2 = (6\cdot4 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot7 + 0) + 1 = 841 = 29^2 = (6\cdot5 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot8 + 0) + 1 = 961 = 31^2 = (6\cdot5 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot11 + 2) + 1 = 1369 = 37^2 = (6\cdot6 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot14 + 0) + 1 = 1681 = 41^2 = (6\cdot7 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot15 + 2) + 1 = 1849 = 43^2 = (6\cdot7 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot18 + 2) + 1 = 2209 = 47^2 = (6\cdot8 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot23 + 2) + 1 = 2809 = 53^2 = (6\cdot9 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot29 + 0) + 1 = 3481 = 59^2 = (6\cdot10 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot31 + 0) + 1 = 3721 = 61^2 = (6\cdot10 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot37 +1) + 1 = 4489 = 67^2 = (6\cdot11 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot42 + 0) + 1 = 5041 = 71^2 = (6\cdot12 - 1)^2$ $24\cdot(5\cdot44 + 2) + 1 = 5329 = 73^2 = (6\cdot12 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot52 + 0) + 1 = 6241 = 79^2 = (6\cdot13 + 1)^2$ $24\cdot(5\cdot57 + 2) + 1 = 6889 = 83^2 = (6\cdot14 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot2 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot3 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot4 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot5 + 1) + 1$ $24\cdot(5\cdot7 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot8 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot10 + 1) + 1$ $24\cdot(5\cdot11 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot14 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot15 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot18 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot20 + 1) + 1$ $24\cdot(5\cdot23 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot25 + 1) + 1$ $24\cdot(5\cdot29 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot31 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot35 + 1) + 1$ $24\cdot(5\cdot37 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot42 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot44 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot49 + 2) + 1$ $24\cdot(5\cdot52 + 0) + 1$ $24\cdot(5\cdot57 + 2) + 1$	
	$24\cdot(5\cdot60 + 1) + 1$	

$24\cdot(5\cdot66 + 0) + 1 = 7921 = 89^2 = (6\cdot15 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot66 + 0) + 1$	
	$24\cdot(5\cdot69 + 0) + 1$	
	$24\cdot(5\cdot75 + 1) + 1$	
$24\cdot(5\cdot78 + 2) + 1 = 9409 = 97^2 = (6\cdot16 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot78 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot85 + 0) + 1 = 10201 = 101^2 = (6\cdot17 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot85 + 0) + 1$	
$24\cdot(5\cdot80 + 2) + 1 = 10609 = 103^2 = (6\cdot17 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot88 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot95 + 2) + 1 = 11449 = 107^2 = (6\cdot18 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot95 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot99 + 0) + 1 = 11881 = 109^2 = (6\cdot18 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot99 + 0) + 1$	
$24\cdot(5\cdot106 + 2) + 1 = 12769 = 113^2 = (6\cdot19 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot106 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot110 + 1) + 1$	$24\cdot(5\cdot110 + 1) + 1$	
$24\cdot(5\cdot118 + 2) + 1 = 16129 = 127^2 = (6\cdot21 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot118 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot122 + 0) + 1$	$24\cdot(5\cdot122 + 0) + 1$	
$24\cdot(5\cdot130 + 1) + 1$	$24\cdot(5\cdot130 + 1) + 1$	
$24\cdot(5\cdot137 + 2) + 1$	$24\cdot(5\cdot137 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot143 + 0) + 1$	$24\cdot(5\cdot143 + 0) + 1$	
$24\cdot(5\cdot147 + 0) + 1 = 17161 = 131^2 = (6\cdot22 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot147 + 0) + 1$	
$24\cdot(5\cdot156 + 2) + 1 = 18769 = 137^2 = (6\cdot23 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot156 + 2) + 1$	
$24\cdot(5\cdot161 + 0) + 1 = 19321 = 139^2 = (6\cdot23 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot161 + 0) + 1$	
	$24\cdot(5\cdot170 + 2) + 1$	
	$24\cdot(5\cdot175 + 1) + 1$	
$24\cdot(5\cdot185 + 0) + 1 = 22201 = 149^2 = (6\cdot25 - 1)^2$	$24\cdot(5\cdot185 + 0) + 1$	
$24\cdot(5\cdot190 + 0) + 1 = 22801 = 151^2 = (6\cdot25 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot190 + 0) + 1$	
	$24\cdot(5\cdot200 + 1) + 1$	
$24\cdot(5\cdot205 + 2) + 1 = 24649 = 157^2 = (6\cdot26 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot205 + 2) + 1$	
	$24\cdot(5\cdot216 + 0) + 1$	
$24\cdot(5\cdot221 + 2) + 1 = 26569 = 163^2 = (6\cdot27 + 1)^2$	$24\cdot(5\cdot221 + 2) + 1$	

$24\cdot(5\cdot232+2)+1 = 27889 = 167^2 = (6\cdot28+1)^2$	$24\cdot(5\cdot232+2)+1$	
	$24\cdot(5\cdot238+0)+1$	
$24\cdot(5\cdot249+2)+1 = 29929 = 173^2 = (6\cdot29-1)^2$	$24\cdot(5\cdot249+2)+1$	
	$24\cdot(5\cdot255+1)+1$	
$24\cdot(5\cdot267+0)+1 = 32041 = 179^2 = (6\cdot30-1)^2$	$24\cdot(5\cdot267+0)+1$	
$24\cdot(5\cdot273+0)+1 = 32761 = 181^2 = (6\cdot30+1)^2$	$24\cdot(5\cdot273+0)+1$	
	$24\cdot(5\cdot285+1)+1$	
	$24\cdot(5\cdot291+2)+1$	
$24\cdot(5\cdot304+0)+1 = 36481 = 191^2 = (6\cdot32-1)^2$	$24\cdot(5\cdot304+0)+1$	
$24\cdot(5\cdot310+2)+1 = 37249 = 193^2 = (6\cdot32+1)^2$	$24\cdot(5\cdot310+2)+1$	
$24\cdot(5\cdot323+2)+1 = 38809 = 197^2 = (6\cdot33-1)^2$	$24\cdot(5\cdot323+2)+1$	
$24\cdot(5\cdot330+0)+1 = 39601 = 199^2 = (6\cdot33+1)^2$	$24\cdot(5\cdot330+0)+1$	
	$24\cdot(5\cdot343+2)+1$	
	$24\cdot(5\cdot350+1)+1$	
	$24\cdot(5\cdot364+0)+1$	
$24\cdot(5\cdot371+0)+1 = 44521 = 211^2 = (6\cdot35+1)^2$	$24\cdot(5\cdot371+0)+1$	
	$24\cdot(5\cdot385+1)+1$	
	$24\cdot(5\cdot392+2)+1$	
	$24\cdot(5\cdot407+0)+1$	
$24\cdot(5\cdot414+2)+1 = 49729 = 223^2 = (6\cdot37+1)^2$	$24\cdot(5\cdot414+2)+1$	
$24\cdot(5\cdot429+2)+1 = 52529 = 227^2 = (6\cdot38-1)^2$	$24\cdot(5\cdot429+2)+1$	
$24\cdot(5\cdot437+0)+1 = 52441 = 229^2 = (6\cdot38+1)^2$	$24\cdot(5\cdot437+0)+1$	
$24\cdot(5\cdot452+2)+1 = 54289 = 233^2 = (6\cdot39-1)^2$	$24\cdot(5\cdot452+2)+1$	
	$24\cdot(5\cdot460+1)+1$	
$24\cdot(5\cdot476+0)+1 = 57121 = 239^2 = (6\cdot40-1)^2$	$24\cdot(5\cdot476+0)+1$	
$24\cdot(5\cdot484+0)+1 = 58081 = 241^2 = (6\cdot40+1)^2$	$24\cdot(5\cdot484+0)+1$	

24·(5·525 + 0) + 1 = 63001 = 251² = (6·42 – 1)² 24·(5·550 + 2) + 1 = 66049 = 257² = (6·43 – 1)² 24·(5·576 + 2) + 1 = 69169 = 263² = (6·44 – 1)² 24·(5·603 + 0) + 1 = 72361 = 269² = (6·45 – 1)² 24·(5·612 + 0) + 1 = 73441 = 271² = (6·45 + 1)² 24·(5·639 + 2) + 1 = 76729 = 277² = (6·46 + 1)² 24·(5·658 + 0) + 1 = 78961 = 281² = (6·47 – 1)² 24·(5·667 + 2) + 1 = 80089 = 283² = (6·47 + 1)² 24·(5·696 + 0) + 1 = 83521 = 289² = (6·48 – 1)²	24·(5·500 + 1) + 1 24·(5·508 + 2) + 1 24·(5·525 + 0) + 1 24·(5·533 + 2) + 1 24·(5·550 + 2) + 1 24·(5·559 + 0) + 1 24·(5·576 + 2) + 1 24·(5·585 + 1) + 1 24·(5·603 + 0) + 1 24·(5·612 + 0) + 1 24·(5·630 + 1) + 1 24·(5·639 + 2) + 1 24·(5·658 + 0) + 1 24·(5·667 + 2) + 1 24·(5·686 + 2) + 1 24·(5·696 + 0) + 1 24·(5·715 + 0) + 1 24·(5·725 + 1) + 1 24·(5·745 + 0) + 1	
24·(5·806 + 0) + 1 = 96721 = 311² = (6·52 – 1)² 24·(5·816 + 2) + 1 = 97969 = 303² = (6·52 + 1)² 24·(5·837 + 2) + 1 = 100489 = 317² = (6·53 – 1)²		
…	…	

Mit Hilfe von 6k + 2 und 6k + 4 lässt sich die Formel

$$(12\,m(3m \pm 1) + 1)^{1/2}$$

einmal als

$$(12\,(6k+2)+1)^{1/2}$$

und einmal als

$$(12\,(6k+4)+1)^{1/2}$$

berechnen. Der Ablauf der Zyklen kann schematisch darstellt werden.

n = m(3m±1)		2n		
2	2*1	2*1		
4 = 3*1 + 1	2*2	2*2		
10 = 3*3 + 1	2*3 + 4	2*5 = 5*1	5*2	6*1 + 4
14 = 3*4 + 2	2*6 + 2	2*7 = 5*1 + 2	5*2 + 4	6*2 + 2
24 = 3*8	2*12 = 5*2 + 2	2*12 = 5*2 + 2	5*4 + 4	6*4
30 = 3*10	2*15 = 5*3	2*15 = 5*3	5*6	6*5
44 = 3*14 + 2		2*22 = 5*4 + 2	5*8 + 4	6*7 + 2
52 = 3*17 + 1		2*26 = 5*5 + 1	5*10 + 2	6*8 + 4
70 = 3*23 + 1		2*35 = 5*7	5*14	6*11 + 4
80 = 3*26 + 2		2*40 = 5*8	5*16	6*13 + 2
102 = 3*34		2*51 = 5*10 + 1	5*20 + 2	6*17
114 = 3*38		2*57 = 5*11 + 2	5*22 + 4	6*19
140 = 3*46 + 2		2*70 = 5*14	5*28	6*23 + 2
154 = 3*51 + 1		2*77 = 5*15 + 2	5*30 + 4	6*25 + 4
184 = 3*61 + 1		2*92 = 5*18 + 2	5*36 + 4	6*30 + 4
200 = 3*66 + 2		2*100 = 5*20	5*40	6*33 + 2
234 = 3*78		2*117 = 5*23 + 2	5*46 + 4	6*39

252 = 3*84		2*126 = 5*25 + 1	5*50 + 2	6*42
290 = 3*96 + 2		2*145 = 5*29	5*58	6*48 + 2
310 = 3*103 + 1		2*155 = 5*31	5*62	6*51 + 4
352 = 3*117 + 1		2*176 = 5*35 + 1	5*70 + 2	6*58 + 4
374 = 3*124 + 2		2*187 = 5*37 + 2	5*74 + 4	6*62 + 2
420 = 3*140		2*210 = 5*42	5*84	6*70
444 = 3*148		2*222 = 5*44 + 2	5*88 + 4	6*74
494 = 3*164 + 2		2*247 = 5*49 + 2	5*98 + 4	6*82 + 2
520 = 3*173 + 1		2*260 = 5*52	5*104	6*84 + 4
574 = 3*191 + 1		2*287 = 5*57 + 2	5*114 + 4	6*95
602 = 3*200 + 2		2*301 = 5*60 + 1	5*120 + 2	6*100 + 2
660 = 3*220		2*330 = 5*66	5*132	6*110
690 = 3*230		2*345 = 5*69	5*138	6*115
752 = 3*250 + 2		2*376 = 5*75 + 1	5*150 + 2	6*125 + 2
784 = 3*260 + 2		2*392 = 5*78 + 2	5*156 + 4	6*130 + 4
850 = 3*283 + 1		2*425 = 5*85 + 2	5*170	6*141 + 4
884 = 3*294 + 2		2*442 = 5*88 + 2	5*176 + 4	6*147 + 2
954 = 3*318		2*477 = 5*95 + 2	5*190 + 4	6*159
…		…	…	…

$(6m \pm 1) = 3n + 4/(3 + (-1)^n)$, $P_{n-1} + 3 + (-1)^n = P_n$

$(3n + 1) + (3n + 2)$	P^2	$(6m \pm 1) = 3n + 4/(3 + (-1)^n)$	$P_{n-1} + 3 + (-1)^n = P_n$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$ $7 = 2 \cdot 3 + 1$		$1 \cdot 3 + 4/(3 + (-1)^1) = 5$	$1 + 3 + (-1)^0 = 5$

$11 = 3\cdot3 + 2$		$2\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{2}) = 7$	$5 + 3 + (-1)^{1} = 7$
$13 = 4\cdot3 + 1$		$3\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{3}) = 11$	$7 + 3 + (-1)^{2} = 11$
$17 = 5\cdot3 + 2$		$4\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{4}) = 13$	$11 + 3 + (-1)^{3} = 13$
$19 = 6\cdot3 + 1$		$5\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{5}) = 17$	$13 + 3 + (-1)^{4} = 17$
$23 = 7\cdot3 + 2$		$6\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{6}) = 19$	$17 + 3 + (-1)^{5} = 19$
$25 = 8\cdot3 + 1$		$7\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{7}) = 23$	$19 + 3 + (-1)^{6} = 23$
$29 = 9\cdot3 + 2$		$8\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{8}) = 25$	$23 + 3 + (-1)^{7} = 25$
$31 = 10\cdot3 + 1$		$9\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{9}) = 29$	$25 + 3 + (-1)^{8} = 29$
$35 = 11\cdot3 + 2$		$10\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{10}) = 31$	$29 + 3 + (-1)^{9} = 31$
$37 = 12\cdot3 + 1$		$11\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{11}) = 35$	$31 + 3 + (-1)^{10} = 35$
$41 = 13\cdot3 + 2$		$12\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{12}) = 37$	$35 + 3 + (-1)^{11} = 37$
$43 = 14\cdot3 + 1$		$13\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{13}) = 41$	$37 + 3 + (-1)^{12} = 41$
$47 = 15\cdot3 + 2$		$14\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{14}) = 43$	$41 + 3 + (-1)^{13} = 43$
$49 = 16\cdot3 + 1$		$15\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{15}) = 47$	$43 + 3 + (-1)^{14} = 47$
$53 = 17\cdot3 + 2$		$16\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{16}) = 49$	$47 + 3 + (-1)^{15} = 49$
$55 = 18\cdot3 + 1$		$17\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{17}) = 53$	$49 + 3 + (-1)^{16} = 53$
$59 = 19\cdot3 + 2$		$18\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{18}) = 55$	$53 + 3 + (-1)^{17} = 55$
$61 = 20\cdot3 + 1$		$19\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{19}) = 59$	$55 + 3 + (-1)^{18} = 59$
$65 = 21\cdot3 + 2$		$20\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{20}) = 61$	$59 + 3 + (-1)^{19} = 61$
$67 = 22\cdot3 + 1$		$21\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{21}) = 65$	$61 + 3 + (-1)^{20} = 65$
$71 = 23\cdot3 + 2$		$22\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{22}) = 67$	$65 + 3 + (-1)^{21} = 67$
$73 = 24\cdot3 + 1$		$23\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{23}) = 71$	$67 + 3 + (-1)^{22} = 71$
$77 = 25\cdot3 + 2$		$24\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{24}) = 73$	$71 + 3 + (-1)^{23} = 73$
$79 = 26\cdot3 + 1$		$25\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{25}) = 77$	$73 + 3 + (-1)^{24} = 77$
$83 = 27\cdot3 + 2$		$26\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{26}) = 79$	$77 + 3 + (-1)^{25} = 79$
$85 = 28\cdot3 + 1$		$27\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{27}) = 83$	$79 + 3 + (-1)^{26} = 83$
$89 = 29\cdot3 + 2$		$28\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{28}) = 85$	$83 + 3 + (-1)^{27} = 85$
$91 = 30\cdot3 + 1$		$29\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{29}) = 89$	$85 + 3 + (-1)^{28} = 89$

$95 = 31\cdot 3 + 2$		$30\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{30}) = 91$	$89 + 3 + (-1)^{29} = 91$
$97 = 32\cdot 3 + 1$		$31\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{31}) = 95$	$91 + 3 + (-1)^{30} = 95$
$101 = 33\cdot 3 + 2$		$32\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{32}) = 97$	$95 + 3 + (-1)^{31} = 97$
$103 = 34\cdot 3 + 1$		$33\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{33}) = 101$	$97 + 3 + (-1)^{32} = 101$
$107 = 35\cdot 3 + 2$		$34\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{34}) = 103$	$101 + 3 + (-1)^{33} = 103$
$109 = 36\cdot 3 + 1$		$35\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{35}) = 107$	$103 + 3 + (-1)^{34} = 107$
$113 = 37\cdot 3 + 2$		$36\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{36}) = 109$	$107 + 3 + (-1)^{35} = 109$
$115 = 38\cdot 3 + 1$		$37\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{37}) = 113$	$109 + 3 + (-1)^{36} = 113$
$119 = 39\cdot 3 + 2$		$38\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{38}) = 115$	$113 + 3 + (-1)^{37} = 115$
$121 = 40\cdot 3 + 1$		$39\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{39}) = 119$	$115 + 3 + (-1)^{38} = 119$
$125 = 41\cdot 3 + 2$		$40\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{40}) = 121$	$119 + 3 + (-1)^{39} = 121$
$127 = 42\cdot 3 + 1$		$41\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{41}) = 125$	$121 + 3 + (-1)^{40} = 125$
$131 = 43\cdot 3 + 2$		$42\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{42}) = 127$	$125 + 3 + (-1)^{41} = 127$
$133 = 44\cdot 3 + 1$		$43\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{43}) = 131$	$127 + 3 + (-1)^{42} = 131$
$137 = 45\cdot 3 + 2$		$44\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{44}) = 133$	$131 + 3 + (-1)^{43} = 133$
$139 = 46\cdot 3 + 1$		$45\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{45}) = 137$	$133 + 3 + (-1)^{44} = 137$
$143 = 47\cdot 3 + 2$		$46\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{46}) = 139$	$137 + 3 + (-1)^{45} = 139$
$145 = 48\cdot 3 + 1$		$47\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{47}) = 143$	$139 + 3 + (-1)^{46} = 143$
$149 = 49\cdot 3 + 2$		$48\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{48}) = 145$	$143 + 3 + (-1)^{47} = 145$
$151 = 50\cdot 3 + 1$		$49\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{49}) = 149$	$145 + 3 + (-1)^{48} = 149$
$155 = 51\cdot 3 + 2$		$50\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{50}) = 151$	$149 + 3 + (-1)^{49} = 151$
$157 = 52\cdot 3 + 1$		$51\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{51}) = 155$	
$161 = 53\cdot 3 + 2$		$52\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{52}) = 157$	
$163 = 54\cdot 3 + 1$		$53\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{53}) = 161$	
$167 = 55\cdot 3 + 2$		$54\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{54}) = 163$	
$169 = 56\cdot 3 + 1$		$55\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{55}) = 167$	
$173 = 57\cdot 3 + 2$		$56\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{56}) = 169$	
$175 = 58\cdot 3 + 1$		$57\cdot 3 + 4/(3 + (-1)^{57}) = 173$	

$179 = 59\cdot3 + 2$ $181 = 60\cdot3 + 1$ $185 = 61\cdot3 + 2$ $187 = 62\cdot3 + 1$ $191 = 63\cdot3 + 2$ $193 = 64\cdot3 + 1$ $197 = 65\cdot3 + 2$ $199 = 66\cdot3 + 1$ $203 = 67\cdot3 + 2$ $205 = 68\cdot3 + 1$ $209 = 69\cdot3 + 2$ $211 = 70\cdot3 + 1$ $215 = 71\cdot3 + 2$ $217 = 72\cdot3 + 1$ $221 = 73\cdot3 + 2$ $223 = 74\cdot3 + 1$ $227 = 75\cdot3 + 2$ $229 = 76\cdot3 + 1$ $233 = 77\cdot3 + 2$ $235 = 78\cdot3 + 1$ $239 = 79\cdot3 + 2$ $241 = 80\cdot3 + 1$ $245 = 81\cdot3 + 2$ $247 = 82\cdot3 + 1$ $251 = 83\cdot3 + 2$ $253 = 84\cdot3 + 1$ $257 = 85\cdot3 + 2$ $259 = 86\cdot3 + 1$		$58\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{58}) = 175$ $59\cdot3 + 4/(3 + (-1)^{59}) = 179$	

263 = 87·3 + 2 265 = 88·3 + 1 269 = 89·3 + 2 271 = 90·3 + 1 275 = 91·3 + 2 277 = 92·3 + 1 281 = 93·3 + 2 283 = 94·3 + 1 287 = 95·3 + 2 289 = 96·3 + 1 293 = 97·3 + 2 295 = 98·3 + 1 299 = 99·3 + 2 301 = 100·3 + 1 305 = 101·3 + 2 307 = 102·3 + 1 311 = 103·3 + 2 313 = 104·3 + 1 317 = 105·3 + 2 319 = 106·3 + 1 323 = 107·3 + 2 325 = 108·3 + 1 329 = 109·3 + 2 331 = 110·3 + 1 335 = 111·3 + 2 337 = 112·3 + 1 341 = 113·3 + 2 343 = 114·3 + 1			

347 = 115·3 + 2 349 = 116·3 + 1 353 = 117·3 + 2 355 = 118·3 + 1 359 = 119·3 + 2 361 = 120·3 + 1 365 = 121·3 + 2 367 = 122·3 + 1 371 = 123·3 + 2 373 = 124*3 + 1 377 = 125*3 + 2 379 = 126*3 + 1 …			

Die ausstehende Lösung der Riemanschen Vermutung[1296] verlangt nicht nach Primzahlen, obgleich der Bezug trivial ist[1297], sondern nach einer Folge oder Potenzreihe $\zeta(s) = \Sigma 1/n^s$ im Intervall $0 < s < 1$ in der Form, dass die Nullstellen auf der Linie $s = ½$ sind[1298]. Dabei kann auch $s = ½$ weiter zusammengesetzt sein, wie $s = \sigma + t$, so dass es nicht stört, wenn $s = ½$ nicht allein steht, im Gegenteil, zB $\sigma = ½$ in $s = \sigma + ti$. Das gilt auch für die Form $\zeta(s) = \Sigma 1/(n^q)^{1/2}$. So weit alle Primzahlen der Formel $p = (24n + 1)^{1/2}$ genügen[1299], ist der letzte (5.) Teil der Riemannschen Vermutung[1300] – als richtig – erwiesen. Dies gilt auch für Produkte von Primzahlen und höhere Potenzen von Primzahlen, die ebenfalls als Produkt von Primzahlen angesehen werden können. Das Kriterium der Riemann-

[1296] Landau I 31, 46.
[1297] Landau I 29 ff.
[1298] Landau I 30 f.
[1299] Waldal 58 ff, 79 ff.
[1300] Landau I 31.

schen Vermutung ist also, dass „alle von der –2q verschiedenen Nullstellen von ζ(s) den reellen Teil ½ haben“. Die reellen Nullstellen der Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(np^q)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((24n+1)^q)^{\frac{1}{2}}}$$

entsprechen den Primzahlen entsprechen. Riemann schon erbrachte den Beweis[1301] für s > 1 mit s = –2q. Das nunmehrige Ergebnis s = –(1/2)q = –q(1/2) = –q/2 für 0 < s < 1 beweist den bishernur vermuteten Teil von Riemans Zetafunktion[1302].

[1301] Landau I 33 ff 46.
[1302] Hainzl 34 f, 64 ff, 143 f, 146 ff.

LITERATURVERZEICHNIS

Aigner, Martin / Ziegler, Günter M.: Das BUCH der Beweise, Springer Verlag 2002, in: www.mathematic.de, < http://www.beweise.mathematic.de/primenumbers-erdoes2.html >, letzte Änderung 31. 10. 2002.

Apolin, Martin: Wellen Puzzle, Wien 2001.

Archie, Lee / Archie John G.: Reading for Philosophical Inquiry: A Brief Introduction to Philosophical Thinking *ver. 0.21*, in: < 1http://philosophy.lander.edu/intro/introbook2.1/book1.html >, An Open Source Reader, Copyright 2004; Calandra, Alexander: Chapter 3. The Nature of Philosophical Inquiry, in: < http://philosophy.lander.edu/intro/introbook2.1/x924.html >.

Aristoteles: Philosophische Schriften in sechs Bänden, Hamburg 1995.

Arndt, Jörg / Haenel, Christoph: Pi, Algorithmen, Computer, Arithmetik, 2. Auflage, Heidelberg 2000.

Arslanagić, Sefket / Janous, Walther: ES GIBT UNENDLICH VIELE PRIMZAHLEN – DER SATZ VON EUKLID, in: < http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/19/tm1021.pdf >, THE TEACHING OF MATHEMATICS 2007, Vol. X, 2, pp. 63 – 74.

Artin, E.: Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1931, in: Hamburger mathematische Einzelschriften, 11. Heft / 1931 < http://de.dleex.com/read/11182 >.

Bartholomé, Andreas / Rung, Josef / Kern, Hans: Zahlentheorie für Einsteiger, Eine Einführung für Schüler, Lehrer, Studierende und andere Interessierte, Mit einem Geleitwort von Jürgen Neukirch, 6. Überarbeitete und erweiterte Auflage, Wiesbaden 2008.

Baxa, Christoph: Primzahlerzeugende Funktionen und das 10. Hilbertsche Problem, Wien 1990.

Benner, Peter: Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Merkblatt: Komplexe Zahlen, WS06/07, in: < http://www-user.tu-chemnitz.de/~pester/Lehre/LA1/Folien/KomplexeZahlen.pdf >.

Berger, Franz / Leitner, Markus: AK der Algorithmik 5 [VU 2.0] 186.137 – SS 2004, Übungsblatt 1: Aufgabe 2, in: < http://www.ads.tuwien.ac.at/teaching/ss04/ak5/UE1-Bsp2-GruppeD.pdf >.

Bergholz, Lena: Induktion und Deduktion, Aachen (25. Februar 2009), in: < http://209.85.129.132/search?q=cache:h6OZAcFVcP8J:www.apaed.rwth-aachen.de/geuting/bildungsstudio/inhalt/3.%2520kompetenzentwicklung/3.1%2520erkenntnisf%25E4higkeiten/3.1.2%2520komplexere_geistige_faehigkeiten/3.1.2.3%2520abstrakte_denkfiguren/induktion_und_deduktion.doc+Deduktion+Synthese&hl=de&ct=clnk&cd=8&gl=de >.

Bergmann/Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium, Band I – III, Berlin 1971-1975 (Band I: Mechanik, Akustik, Wärme, mit einem Anhang über die Weltraumfahrt, Hrsg. von Heinrich Gobrecht, Berlin 1975; Band II: Elektrizität und Magnetismus, Hrsg. von Heinrich Gobrecht, Berlin 1971; Band III: Optik, Autoren: Hans Joachim Eisler u. a., Hrsg. von Heinrich Gobrecht, Berlin 1974).

Bergmann/Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium, Band I – VIII, Berlin 1992-2001 (Band 1, Mechanik, Relativität, Wär-

me, Autoren: Thomas Dorfmüller, Wilhelm T. Hering, Klaus Stierstadt unter Mitwirkung von Günther Fischer, 11., völlig neubearbeitete Auflage, Berlin 1998; Band 1, 12., völlig neu bearbeitete Auflage, Autoren Klaus Lüders, Gebhard von Oppen, Berlin 2008; Band 2, Elektromagnetismus, Autor: Wilhelm Raith, 8., völlig neubearbeitete Auflage, Berlin 1999; Band 3, Optik, Herausgeber: Heinz Niedrig, Berlin 1993; Band IV: Teilchen, Autoren: Manfred Fink u. a., Hrsg. Wilhelm Raith, Berlin 1992; Band V: Vielteilchen-Systeme, Autoren: Christian Bahr u. a., Hrsg. Wilhelm Raith, Berlin 1992; Band VI: Festkörper, Autoren: Herbert Freyrath u. a., Hrsg. Wilhelm Raith, Berlin 1992; Band VII: Erde und Planeten, Autoren: Siegfried J. Bauer u. a., Hrsg. Wilhelm Raith, Berlin 2001; Band VIII: Sterne und Weltraum, Autoren: Hans Joachim Blome u. a., Hrsg. Wilhelm Raith, Berlin 1997).

Beutelspacher, Albrecht / Petri, Bernhard: Der Goldene Schnitt, Mannheim 1989.

Bickel, A.: Vortextheorie in: < http://www.wikiweise.de/wiki/Vortextheorie >.

Bombieri, Enrico: The Riemann Hypothesis, Cambridge Massachusets 2000, in: < http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/riemann.pdf >.

Bornstein, I. N. / Semendjajew, K. A. / Musiol, G. / Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik, 7. vollständig überarbeitete Auflage, Frankfurt am Main 2008.

Braak, Jens: Strömungsexperimente zur Selbstorganisation, Experimente mit dem Taylor-Zylinder und einfache strömungsdynamische Schülerversuche zur Einführung in die Selbstorganisationstheorie, Kiel 1987.

Brandt, Sigmund: 75 Jahre Schrödingergleichung, Folie 32, in: < http://siux00.physik.uni-siegen.de/~brandt/Schroedinger/sld032.html >, Erwin Schrödinger und die Entdeckung der Wellenmechanik, Öffentlicher Vortrag, Fachbereich Physik der Universität Siegen, 12. Juni 2001, Wellengruppe (Wellenpaket), Folie 1(-55), in: < http://siux00.physik.uni-siegen.de/~brandt/Schroedinger/sld001.html >.

Brefeld Werner: Primzahlen, Teilbarkeit und die Zahl 24, in: < http://www.brefeld.homepage.t-online.de/teilbar-24.html >, Wittland 2005-2009.

Brefeld, Werner: Primzahlen, Teilbarkeit und die Zahl 240, in: < http://www.brefeld.homepage.t-online.de/teilbar-240.html >, Wittland 2005-2009.

Brenner/Höllig/Hömer: Grafiken der Riemannschen Zetafunktion, in: Mathematik-Online-Lexikon, < http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/beispiel/beispiel258/ >, automatisch erstellt am 25. 1. 2006, Ein Projekt der Universitäten Stuttgart und Ulm, unterstützt durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst des Landes Baden-Württemberg.

Bruckner, Časlav: Beugung von Materiewellen im Raum und in der Zeit, Diplomarbeit, Wien 1995.

Bruns, Winfried: Zahlentheorie, in: Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe V, Heft 146, < http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/brunsw.rdf.shtml >, Universität Osnabrück, Sommersemester 2000 < http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/lehre/zt00/ >.

Bundschuh, Peter: Einführung in die Zahlentheorie, 5. überarbeitete und aktualisierte Auflage, Berlin 2002.

Christof, Raimund Peter: Das Gesetz der Primzahlen, Wien 1935.

(cr), Netzwelt, Hrsg.: Lösung der Riemann-Hypothese steht bevor, Wie Mathematik die Internetsicherheit bedroht, Leserbrief vom 9. 9. 2004, in: < http://www.netzwelt.de/news/67291_2-wie-mathematik-die-internet-sicherheit-bedroht.html >, H² media factory GmbH, Hamburg.

Deninger, Christopher: Primzahlen und die Riemannsche Vermutung, in: < http://wwwmath1.uni-muenster.de/u/deninger/about/seminare/vorlesungsskript-an-zahltheorie/primzahlen2.pdf >, Münster 15-Apr-2009 14:18.

DeTemple, Duane W.: A Geometric Look at Sequences that Converge to Euler's Constant, in: < http://www.joma.org/images/cms_upload/march_2006_-_detemple09208.pdf >, THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, Vol. 37. NO. 2, MARCH 2006, pp. 128-131.

Dodd, R. K. / Eilbeck, J. C. / Gibbon, J. D. / Morris, H. C.: Solitons and Nonlinear Wave Equations, London 1082.

Dorfmüller, Thomas: Teil III Thermodynamik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 985-1313.

Dosch, Hans Günter: Teilchen, Felder und Symmetrien: Quantenfeldtheorie und die Einheit der Naturgesetze / mit einer Einführung von Hans Günter Dosch - 2. Aufl. - Heidelberg: Spektrum Akad. Verl., 1995. - (Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung).

Ebbinghaus, Julius: Gesammelte Schriften, Hrsg. von Hariolf Oberer u. Georg Geismann, Band I-IV, Bonn 1986-1994 (Aachener Abhandlungen zur Philosophie, Herausgegeben von Gerd Wolandt, Band 5-7, 15).

Ehrenfels, Cristian: Das Primzahlgesetz, entwickelt und dargestellt auf Grund der Gestalttheorie, Leipzig 1922.

Eidenberger: Chemieseiten, in: < http://www.brg19.at/~eid/download.html >, Basismodul Chemie, in: < http://www.brg19.at/~eid/pdf/_Inhalt_Chemieskript.pdf >, S. 23 – 25, in: < http://www.brg19.at/~eid/pdf/23-25.pdf >.

Elvenich, Michael: Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < http://primzahlen.de/index.htm > 16. 12. 2008.

Erdös, Paul: Beweis eines Satzes von Tscherbyschef, Budapest 1932, eingegangen am 24. November 1931, in: < http://www.math-inst.hu/~p_erdos/1932-01.pdf >.

Fellmann, E. A. / Jenni, Marcel / Burckhardt, Johann Jakob: Leonhard Euler, 1707-1783 Beiträge zu Leben und Werk Gedenkband des Kantons Basel-Stadt: Beiträge zu Leben und Werk, Veröffentlicht von Birkhäuser, 1983.

Fischer, Dietmar: Über die Verteilung der natürlichen Zahlen und Primzahlen der Gestalt $[n^{\Gamma}]$ in arithmetischer Progression, Freiburg im Breisgau 1992. Diss.

Fischer, Roland: Die Eulersche Zahl, Das Wunderkind der Zahlenwelt, in: WOZ, Die Wochenzeitung, vom 12. April 2007 < http://www.woz.ch/artikel/2007/nr15/wissen/14815.html >.

Fritz, Hermann: Primzahlzwillinge zwischen 5 und 10.000.000, in: Wien, letzte Änderung 24. 2. 2004 < http://www.unet.univie.ac.at/~a7425519/programme/primzahlzwilling.htm >.

Froese, Norbert: Euklied und die Elemente, Die Entdeckung der axiomatischen Methode durch Euklid, Stand: 08.02.2009, in: < http://www.antike-griechische.de/Euklid.pdf >.

Gaubitzer, Katharina: Primzahlen, St. Pölten 2002, Dipl.

Gekeler, Ernst-Ulrich: Primzahlen von Euklied bis heute, Ringvorlegung vom 2. 11. 2001, in: < http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/PERSONEN/Gekeler/PrimzahlVortrag/vortrbild.html >, Universität des Saarlandes.

Gnörich, Bruno: Höhere Mathematik, Formelsammlung, RWTH Aachen 19. August 2001, in: < http://www.gnoerich.de/formelsammlung/formelsammlung.html >.

Gonzalez, Alexander Artiga: Zahlentheorie, Arithmetik und Algebra, in: < http://www.inf.uni-konstanz.de/bioml/lectures/ss08/s_acm_contest_S08/ZAA.pdf >, 2. Juli 2008.

Görland, A.: Der Begriff der Lüge im System der Ethiker von Spinoza bis zur Gegenwart, in: Lipmann/Plaut 122-157.

Gourdon, Xavier / Sebah, Pascal: The Riemann Zeta-function ζ(s), in: Numbers, constants and computation < http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zeta.pdf >, Hauptseite in: < http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html >.

Gronau, Detlef: Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, Graz 2008, in: < http://www.uni-graz.at/~gronau/Gm.pdf >.

Haber, Heinz: Das mathematische Kabinett, Folge 2, Stuttgart 1970.
Hainzl, Josef: Mathematik für Naturwissenschaftler, Stuttgart 1985.

Haltmayer, Stephan, Hrsg.: Abschaffung der Freien Universität? Frankfurt am Main 2000.

Havil, Julian: Gamma: Eulers Konstante, Primzahlstrände und die Riemannsche Vermutung, Berlin 2007.

Heiligenbrunner, Alfred: Primzahlzwillinge bis 10000, Letzte Änderung: 9. Oktober 2004, in: < http://www.heiligenbrunner.at/main/ahprimz2.htm >.

Hirschberger, Johannes: Geschichte der Philosophie, Band I und II, Freiburg 1976.

Hirzenbruch, Friedrich: Codierungstheorie und ihre Beziehung zu Geometrie und Zahlentheorie, in: Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften: Vorträge N 370, S. 7-33.

Homann, Jan: riemann surface of ArcSin[z], projection from 4dim C x C to 3dim C x Re(C), in: < http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemann_surface_arcsin.jpg >, File:Riemann surface arcsin.jpg, 03.08.2007.

Horgan, John: Teilchen-Metaphysik, Auf der Suche nach einer einheitlichen Theorie aller Naturkräfte stoßen die Physiker in Bereiche vor, die irdischen Experimenten nicht mehr zugänglich sind, in: Dosch 216-225.

Jeschke, Willi: Graphik zu der Funktion "Relative Häufigkeit von Primzahlabständen", in: < http://www.primini.homepage.t-online.de/spirale-x30.html >.

Jeschke, Willi: "Relative Häufigkeit" von Primzahlabständen mit konsequenten Folgerungen, Erstes Datum 8. 6. 2005, in: < http://www.primini.homepage.t-online.de/rel-ha.html >.

Jeschke, Willi: Sonderlinge unter den Primzahlen, in: < http://www.primini.homepage.t-online.de/summ.html >, Copyright © 1998 – 2009.

Kleinpoppen, Hans: 1 Atome, in: Bergmann/Schäfer IV (1992) 1-352.

Koehne, Tim: Skeptizismus und Epistemologie, Entwicklung und Anwendung der skeptischen Methode in der Philosophie, München 2000.

Komma, Michael: Moderne Physik und Mapple, Von Newton zu Faynman, Cordigliano, in: < http://www.docstoc.com/docs/418208/modphys%5B1%5D >, in: < http://www.apnilife.com/E-Books_apnilife/Books%20in%20PDF%20Format_apnilife/modphys_apnilife.pdf >, (Version) August 1995.

Knopp, Konrad: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1964.

Kowol, Gerhard: Primzahlen; ein mathematischer Zugang zu ihren Qualitäten, Dornach 1995 (Mathematisch-astronomische Blätter; N. F., 18).

Kneubühl, F. K.: Lineare und nichtlineare Schwingungen und Wellen, Stuttgart 1995.

Kracher, Gertrude: Rechnen mit Primzahlen, Eine Anwendung in Derive, (Dipl.) Wien 1998.

Krystek, Michael: Optische Strahlung und ihre Messung, in: Bergmann/Schäfer III (1993) 609-663.

Kuba, Gerald / Götz, Stefan: Zahlen, Frankfurt am Main 2004.

Lackner, Arnold: Primzaltests und die Implementierung im Computeralgebrasystem *DERIVE*, Bad Sauerbrunn 1994, Dipl.

Lamotke, Klaus: Riemannsche Flächen, Heidelberg 2005.

Landau, Edmund: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band 1-2, Leipzig 1909.

Lang, Christian / Pucker, Norbert: Mathematische Methoden in der Physik, Heidelberg 1998.

Laugwitz, Detlef: Bernhard Riemann, 1826-1866, Wendepunkte in der Auffasung der Mathematik, Birkhäuser 1996.

Leemann, Simon: Versuch von Frank-Hertz, Anregung von Quantensprüngen durch Stösse, Zürich 1998, in: < http://www.simonleemann.ch/work/vp/franck-hertz.pdf >.

Leinfellner, Werner: Einführung in die Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie, Mannheim 1965.

Liepmann, Otto / Plaut, Paul, Hrsg.: Die Lüge, in psychologischer, philosophischer, juristischer, pädagogischer, historischer, soziologischer, sprach- und literaturwissenschaftlicher und entwicklungsgeschichtlicher Betrachtung, Leipzig 1927.

Lohnstein, Horst: Einführungs-Vorlesung, Strukturen sprachliche und andere, Köln 2000, in: < http://www.uni-koeln.de/phil-fak/idsl/dozenten/lohnstein/Einfuehrungs-Vorlesung.html >.

Luderer, Bernd / Nollau, Volker / Vetters, Klaus: Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler, Wiesbaden 2005.

Lüders, Klaus / Oppen, Gebhard von, Hrsg.: Bergmann/Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium, Band 1, 12., völlig neu bearbeitete Auflage, Berlin 2008.

Luschny, Peter: Primfakultät, Primorial und Tschebyschews θ Funktion, in: Fast-Factorial-Functions: The Homepage of Factorial Algorithms. (C) Peter Luschny, 2000-2008, in: < http://www.luschny.de/math/factorial/PrimeProxy.htm >, in PDF-Format vom 23.3.2006, in: < http://www.luschny.de/math/factorial/primfakultaet.pdf >.

Melissinos, A. C.: "Experiments in modern Physics", Academic Press Inc., 1966.

Meschkowski, Herbert: Unendliche Reihen, Mannheim 1982.

More, Willi: Der QNR-Primzahltest, Eine Verallgemeinerung eines Primzahltests von Baillie & Wagstaff, Klagenfurt 1994, Diss.

MOSCOW MATHEMATICAL JOURNAL, in: < http://www.ams.org/distribution/mmj/ >.

Müller-Stach, Stefan / Piontkowski, Jens: Elementare und algebraische Zahlentheorie, Ein moderner Zugang zu klassischen Themen, Wiesbaden 2006.

Mund, Andreas Wilhelm: Primzahlen erkennen! Birsfelden 1943.

Mund, Andreas Wilhelm: Wie ordnen sich die Primzahlen? Neue Ausg. - Birsfelden, 1939.

Nemiroff, Robert / Bonnell, Jerry: Astronomy Picture of the Day, 2008 May 17, NASA Official: Phillip Newman, in: < http://apod.nasa.gov/apod/ap080517.html >, A service of: ASD at NASA / GSFC & Michigan Tech. U.

Neukrich, Jürgen: Algebraische Zahlentheorie, Heidelberg 2007.

Nickel, Gregor / Pahl, Marc-Oliver: Mathesis und die Musen: Mathematik in der Kunst — Kunst in der Mathematik, Das Buch zum Romseminar 2005, Tübingen 2005 in: < http://www.m-o-p.de/life/src2/2005-08-12_Romseminar2005-Mathesis_und_die_Musen.pdf >.

Niedrig, Heinz: VIII. Kapitel. Wellencharakter der Materie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 855—904.

Nielsen, Niels: Die Gammafunktion, Band I, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Band II, Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten, New York 1965.

Nollau, Volker: Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler (Logarithmusfunktionen, Hyperbolische Funktionen und Areafunktionen), in: < http://www.math.tu-dresden.de/sto/nollau/ > Sommersemester 2006, Lösungen 3. Seminar (08. 05. – 19. 5. 06) in: < http://www.math.tu-dresden.de/sto/nollau/ >.

Oeser, Erhard: Macht und Korruption in der Wissenschaft, in: Haltmayer/Gabriel W., Abschaffung der freien Universität? 217-227.

Ostermann, Iris: Der Goldene Schnitt, Wien 2002, Dipl.

Padberg, Friedhelm: Elementare Zalhlentheorie, Freiburg in Breisgau 1972.

Padberg, Friedhelm / Danckwerts, Rainer / Sein, Martin: Zahlbereiche, Eine elementare Einführung, Heidelberg 1995.

Paeler, Tim: Visualisierung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen insbesondere im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion, WWU Münster 6. Oktober 1999, < http://www.paehler.org/tim/projekte/exam/exam.pdf >.

Paschinger, Heike: Primzahltheorie und Kryptologie, Von den Primzahlen zum RSA-System, Dipl. Wien 1993.

Peters, Thomas: Bernoulli-Zahlen, Zetafunktion und Summen von Potenzen, 1. September 2004, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < http://www.mathe-seiten.de/bernoulli.pdf >.

Peters, Thomas: Die Fakultät, 13. September 2003, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < http://www.mathe-seiten.de/fakultaet.pdf >.

Peters, Thomas: Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt, Eppelheim 2003, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < http://www.mathe-seiten.de/fibonacci.pdf >.

Peters, Thomas: Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln, Eppelheim (26. Oktober) 2003, in: Thomas‘ Mathe-Seiten < http://www.mathe-seiten.de/kugel.pdf >.

Pfaller, Sascha: Primzahlen – Primfaktorzerlegung, (6. 3. 2004) in: Elvenich, Sieb des Eratosthenes, in: Primzahlen.de < http://primzahlen.de/index.htm >.

Pfeifer, Fr. Xav.: Der Goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst, Wiesbaden 1969 (Unveränderter Nachdruck der Ausgabe von 1885).

Pieper, H.: Zahlen aus Primzahlen, Berlin 1974.

Pittner, Stefan: Faktorisierungsmethoden und Primzahltests mit besonderer Berücksichtigung von Zahlen der Form $b^n \pm 1$, Wien 1990, Dipl.

Pommerening, Klaus: Kryptologie, I. 1 Monoalphabetische Chifrierung, in: < http://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/Kryptologie/Klassisch/1_Monoalph/Stirling.pdf >, 4. Die Stirling-Formel, Mainz 18. Oktober 1999; letzte Änderung: 1. Oktober 2008, in: < http://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/Kryptologie/Klassisch/1_Monoalph/ >.

Prachar, Karl: Primzahlverteilung, Berlin 1957.

Precht, Manfred / Voit, Karl / Kraft, Roland: Mathematik 2 für Nichtmathematiker, Funktionen – Folgen und Reihen – Differential- und Integralrechnung – Differentialgleichungen – Ordnung und Chaos, 7. Auflage VIII, Oldenburg 2005, in: < http://books.google.de/books?id=DJaJI--p5HQC&pg=PA64&dq=Nullstelle+Kotangens >.

Raith, Wilhelm: Elektromagnetismus, in: Bergmann/Schäfer II (1999) 1-926.

Rapf, Manfred: Primzahltests und Primfaktorzerlegung, Wien 1986, Dipl.

Reidinger, Roger: Der Drei-Primzahl-Satz, Wien 1987, Dipl.

Reiss, Kristina / Schmieder, Gerhard: Basiswissen Zahlentheorie, Eine Einführung in Zahlen und Zahlenbereiche, Heidelberg 2007.

Remmert, Reinhold / Ullrich, Peter: Elementare Zahlentheorie, 2. korrigierte Auflage, Basel 1995.

Resag, Jörg: Die Grenzen der Berechenbarkeit, Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik, Leverkusen 2008, in: < http://www.joergresag.privat.t-online.de/mybk3htm/start3.htm >, Kapitel 5, Ungelöste Rätsel, 2 Riemannsche Vermutung, in: < http://www.joergresag.privat.t-online.de/mybk3htm/chap52.htm >.

Rettenbacher, Herbert Mathias: Der große Satz von Fermat, Von den Anfängen bis zur KUMMERschen Theorie der regulären Primzahlen, Salzburg 1995, Dipl.

Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften: Vorträge N 370, Opladen 1989.

Ribenboim, Paulo: The Little Book of Bigger Primes, Second Edition, New York 2004.

Ribenboim, Paulo / Richstein, Wilfrid / Keller, Wilfrid: Die Welt Der Primzahlen, Heidelberg 2006 (in: < http://books.google.de/books?id=-nEM9ZVr4CsC&dq=Ribenboim&printsec=frontcover&sour-

ce=bl&ots=pGeZwQiTE8&sig=Cdf8lcp7a80_uWbxli9t4gD9q7I&hl=de&ei=DrCPSajbDtWa_gbe8727DA&sa=X&oi=book_result&resnum=2&ct=result#PPR13,M1 >).

Richter, René: Algorithmen, Sonderkurs C++ 1997/98, Schülerrechenzentraum Dresden, in: < http://www.namespace-cpp.de/C++/anwenden/algo.htm >.

Rieble, Armin: Das Dezimalsystem in der lateinischen Sprache, Stephanskirchen 2001-2006 in: < http://www.decemsys.de/ >, Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge? Ein nicht ganz mathematischer Beweis, in: < http://www.decemsys.de/system/zahlen/pzzwillinge.htm >, Stephanskirchen 2007.

Riesenhuber, Birgit: Kurven im Mathematikunterricht, - projektorientierte Zugänge, Wien 2003, Dipl.

Röd, Wolfgang: Der Weg der Philosophie von den Anfängen bis ins 20. Jahrhundert, in: < http://books.google.de/books?id=3qGpArX8twMC&pg=PA483&lpg=PA483&dq=Russell+Barbier+Rasiert&source=bl&ots=ChGYp2g6Sr&sig=IAZnoVNj8CSKOCTU11CokLyFAZ0&hl=de&ei=vtSmSf_oJIqy0AXwj7C1Ag&sa=X&oi=book_result&resnum=8&ct=result >, München 1996.

Rohringer, Erhart: Über die Primzahlen p, für welche ap + b wieder Primzahlen sind, Wien 1941. Diss.

Röpcke, Hendrik S.: Die Taylor-Couette-Strömung in breiten Spalten, Kiel 1995.

Russell, Bertrand: Einführung in die mathematische Philosophie, Mit einer Einleitung von Michael Otte, herausgegeben von Johannes Lehnhard und Michael Otte, Hamburg 2002.

Sautoy, Marcus du: Die Musik der Primzahlen, Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik, München 2008.

Scheid, Harald: Elemente der Arithmetik und Algebra, Heidelberg 2002.

Schönhacker, Die Zahl e, Wien 2000, Dipl., in: < http://www.schoenhacker.at/mathematik/e/pdf/-die_zahl_e.pdf >.

Schoenebeck, Heinz: IX. Kapitel. Die Relativitätstheorie, in: Bergmann/Schäfer III (1974) 905-956.

Schott, Katharina: Primzahlerkennung und Primzahltests, Proseminarausarbeitung, Angewandte diskrete Mathematik, Karlsruhe 2004, in: Universität Karlsruhe < http://mspcdip.mathematik.uni-karlsruhe.de/Blaetter/proseminar/pdf/Primzahltests.pdf >.

Schwarz, Werner: Primzahltheorie, Aspekte der klassischen und der neueren Theorie, Bezüge zum Unterricht (Vorschläge, Realisierungsmöglichkeiten, Anknüpfungspunkte, didaktische Gesichtspunkte, etc.), Wien 1983, Diss.

Schwarz, Wolfgang: Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie, Mannheim 1969.

Schwarz, Wolfgang: Über einige Probleme aus der Theorie der Primzahlen, Stuttgart 1985.

Sextus, Empiricus: Gegen die Dogmatiker, Adversus mathematikos libri 7-11, Übersetzt von Hansueli Flückiger, Sankt Augustin 1998

Simmel, Martin: Primzahltets, Wien 1996, Dipl.

Sloterdijk, Peter: Kritik der zynischen Vernunft, Erster und zweiter Band, Frankfurt am Main 1983.

Harris, John N.: A. THE FIBONACCI SERIES, PHI-SERIES AND SYNODIC MEAN, 4. Juni 2004, in: PART IV. SPIRA SOLARIS ARCHYTAS-MIRABILIS < http://www.spirasolaris.ca/sbb4d.html >.

Stäckel, P. / Weinreich, W.: Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen, Berlin und Leipzig 1922.

Stadler, Friedrich, Hrsg.: Elemente moderner Wissenschaftstheorie, zur Interaktion von Philosophie, Geschichte und Theorie der Wissenschaften, Wien 2000.

Stakhov, Alexey / Rozin, Boris: The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature < http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/stakhov/index.html >, The International Club of the Golden Section, 6 McCreary Trail, Bolton, ON, L7E 2C8, Canada.

Stark, Harold M.: An Introduction to Number Theorie, London 1978.

Stelzner, Ruben: Der Goldene Schnitt, Das Mysterium der Schönheit, Eine naturwissenschaftlich-philosophische Abhandlung, Witten/Herdecke 2003, von Dr. Ruben Stelzner in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Schad, Karl-Schweisfurth-Institut, Universität Witten/Herdecke und dem Studium Fundamentale der Universität Witten/Herdecke, in: < http://www.golden-section.eu/goldener_schnitt.pdf >.

Stierstadt, Klaus / Fischer, Günther: Teil I Mechanik, in: Bergmann/Schäfer I (1998) 21-876.

The College Mathematics Journal: Copyright ©2009 The Mathematical Association of America, in: < http://www.maa.org/pubs/cmj.html >, Reprint permission should be requested from: Harry Waldman, Journals Editorial Manager Mathematical Association of America, NW Washington.

THE TEACHING OF MATHEMATICS, Publisher: Društvo matematičara Srbije, Beograd, Belgrad 1998 …, in: < http://elib.mi.sanu.ac.rs/pages/browse_publication.php?db=tm >.

Thiel, Christian: Gibt es noch eine Grundlagenkrise der Mathematik? in: Stadler (2000) 57-71.

Tietze, Heinrich: Einige Tabellen zur Verteilung der Primzahlen, auf Untergruppen der Gruppe der teilerfremden Restklassen nach gegebenen Modul, München 1944.

Timerding, H. E.: Der goldene Schnitt, Leipzig 1919.

Trost, Ernst: Primzahlen, zweite überarbeitete Auflage, Basel 1968.

Volkmann, Lutz: Diskrete Strukturen, Eine Einführung, Aachen 2000.

Vries, de, Andreas: Der Graph der Riemannschen Zeta-Funktion ζ(*s*), © Math IT, de Vries 2004, in: M@ath-It < http://www.math-it.org/Mathematik/Riemann/RiemannApplet_de.html >.

Vries, de, Andreas: Das Rätsel des Landes Riemannien, © Math IT, de Vries 2004, in: M@ath-It < http://www.math-it.org/Mathematik/Riemann/Riemannia_de.html >, das noch einmal in der PDF-Version: < http://haegar.fh-swf.de/m@th-it/Mathematik/Riemann/Riemannien.pdf >.

Waldal, Per: Das Sieb des Eratosthenes, Eine Studie über die natürlichen Zahlen, Dielsdorf 1961.

Waldschmidt, Michel: Open Diophantine Problems, MOSCOW MATHEMATICAL JOURNAL, Volume 4, Number 1, in: < http://people.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/odp.pdf >, January – March 2004, Pages 245 – 305.

Weisstein, Eric W.: Euler-Mascheroni-Konstante, in: < http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html >, Wolfram Research, Mathworld 1999-2009, Wolfram Research. Inc.

Weisstein, Eric W.: Euler Number, in: < http://mathworld.wolfram.com/EulerNumber.html >, Wolfram Research, Mathworld 1999-2009, Wolfram Research. Inc.

Weisstein, Eric W.: Factorial, in: < http://mathworld.wolfram.com/Factorial.html >, Wolfram Research, Mathworld 1999-2009, Wolfram Research. Inc.

Weisstein, Eric W.: Gamma Function, in: < http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html >, Mathworld 1999-2009, Wolfram Research. Inc.

Weisstein, Eric W.:Hyperbolic Secant, in: < http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicSecant.html >, Wolfram Research, Mathworld 1999-2009, Wolfram Research. Inc.

Weisstein, Eric W.: Subfactorial, in: < http://mathworld.wolfram.com/Subfactorial.html >, Wolfram Research, Mathworld 1999-2009, Wolfram Research. Inc.

Weisstein, Eric W.: Triangular Number, in: < http://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html >, Wolfram Research, Mathworld 1999-2009, Wolfram Research. Inc.

Westermann, Thomas: Mathematik für Ingenieure mit Maple, Band 1: ‚Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Variablen, Vektor- und Matrizenrechnung, komplexe Zahlen, Funktionenreihen, Heidelberg 1996.

Wiener, Birgit: Die Primzahlzerlegung in quadratischen Zahlkörpern, Wien 1998, Dipl.

Wikimedia Commons contributors, Hrsg.: Trigonometric function plots, Page Version ID: 16825832, Date retrieved: 10 March 2009 05:34 UTC, in: *Wikimedia Commons,* Permanent URL: < http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=Trigonometric_function_plots&oldid=16825832 >, Date of last revision: 12 December 2008 15:41 UTC.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Algebraisch konjugiert". In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 58941999, Bearbeitungsstand: 12. April 2009, 11:34 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Algebraisch_konjugiert&oldid=58941999 > (Abgerufen: 29. Juni 2009, 23:42 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Areasinus Hyperbolicus und Areakosinus Hyperbolicus, In: Wikipedia, Versions-ID: 56948581, Bearbeitungsstand: 20. Februar 2009, 09:27 UTC. < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Areasinus_Hyperbolicus_und_Areakosinus_Hyperbolicus&oldid=56899054 > (Abgerufen: 30. März 2009, 19:18 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Areasekans Hyperbolicus und Areakosekans Hyperbolicus", In: Wikipedia, Versions-ID: 58825477/Bearbeitungsstand: 8. April 2009, 17:20 UTC < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Areasekans_Hyperbolicus_und_Areakosekans_Hyperbolicus&oldid=58825477 > (Abgerufen: 16. Juli 2009, 05:28 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus“, In: Wikipedia, Bearbeitungsstand: 28. November 2008, 09:32 UTC, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Areatangens_Hyperbolicus_und_Areakotangens_Hyperbolicus&oldid=53519345 > (Abgerufen: 8. März 2009, 09:55 UTC), Versions-ID der Seite: 53519345.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Arkussinus und Arkuskosinus“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID: 57765937, Bearbeitungsstand: 11. März 2009, 22:09 UTC < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Arkussinus_und_Arkuskosinus&oldid=57765937 > (Abgerufen: 30. März 2009, 04:48 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Arkustangens und Arkuskotangens“. In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 58264342, Bearbeitungsstand: 21. Februar 2009, 15:32 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Areatangens_Hyperbolicus_und_Areakotangens_Hyperbolicus&oldid=56948581 > (Abgerufen: 29. März 2009, 00:37 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Basler Problem“, In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 55740955, < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Basler_Problem&oldid=55740955 > (Abgerufen: 28. Januar 2009, 07:38 UTC) < http://de.wikipedia.org/wiki/Basler_Problem > Bearbeitungsstand: 23. Januar 2009, 16:58 UTC.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.: Seite „Bernoulli-Zahl“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 14. Februar 2009, 13:39 UTC, Versions-ID der Seite: 56650245, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bernoulli-Zahl&oldid=56650245 > (Abgerufen: 25. März 2009, 22:55 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.: Seite „Dirichletreihe“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 59560154, Bearbeitungsstand: 30. April 2009, 08:55 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Dirichletreihe&oldid=59560154 > (Abgerufen: 16. Mai 2009, 07:28 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Diskreter Logarithmus“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 55648345, Bearbeitungsstand: 21. Januar 2009, 22:51 UTC, < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Diskreter_Logarithmus&oldid=55648345 > (Abgerufen: 28. März 2009, 10:50 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Dreieckszahl“, In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Dreieckszahl&oldid=52384952 > Bearbeitungsstand: 29. Oktober 2008, 14:27 UTC (Versions-ID der Seite: 52384952, Abgerufen: 27. Januar 2009, 19:38 UTC) < http://de.wikipedia.org/wiki/Dreieckszahl >.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Einheitswurzel“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 58157158, Bearbeitungsstand: 21. März 2009, 15:55 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Einheitswurzel&oldid=58157158 > (Abgerufen: 4. April 2009, 12:38 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Euler-Mascheroni-Konstante“. In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 57631174, Bearbeitungsstand: 9. März 2009, 01:18 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler-Mascheroni-Konstante&oldid=57631174 > (Abgerufen: 19. März 2009, 20:22 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Eulersche Identität“, In: Wikipedia, Bearbeitungsstand: 20. November 2008, URL: < http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Identit%C3%A4t >, < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Eulersche_Identit%C3%A4t&oldid=53236826 > (Abgerufen: 28. Januar 2009, 08:00 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Eulersche Zahl“, Bearbeitungsstand: 21. Januar 2009, In: URL < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Eulersche_Zahl&oldid=55631955 > (Abgerufen: 28. Januar 2009, 09:06 UTC) < http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl >, Versions-ID der Seite: 55631955.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Exponentialfunktion“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Versions-ID der Seite: 57860924, Bearbeitungsstand: 14. März 2009, 10:51 UTC. < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Exponentialfunktion&oldid=57860924 > (Abgerufen: 19. März 2009, 14:59 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Fakultät (Mathematik)“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID: 58353948, Bearbeitungsstand: 26. März 2009, 20:40 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fakult%C3%A4t_(Mathematik)&oldid=58353948 > (Abgerufen: 3. April 2009, 13:28 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Funktionalgleichung“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Versions-ID der Seite: 55793034, Bearbeitungsstand: 24. Januar 2009, 17:22 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Funktionalgleichung&oldid=55793034 > (Abgerufen: 19. März 2009, 11:26 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Gammafunktion“. In: Wikipedia, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gammafunktion&oldid=57936964 > (Abgerufen: 19. März 2009, 07:55 UTC), Bearbeitungsstand: 16. März 2009, 00:45 UTC.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Gaußsche Summenformel“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID: 58464439, Bearbeitungsstand: 29. März 2009, 19:07 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gau%C3%9Fsche_Summenformel&oldid=58464439 > (Abgerufen: 10. April 2009, 14:24 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Hyperbel (Mathematik)“, Datum der letzten Bearbeitung: 24. Februar 2009, 08:58 UTC, Versions-ID der Seite: 57067170, In: URL < http://de.wikipedia.org/wiki/Hyperbel_(Mathematik) > (Abgerufen: 5. März 2009, 09:23 UTC) < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Hyperbel_(Mathematik)&oldid=57067170 >.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Hyperbelfunktion“. In: Wikipedia, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Hyperbelfunktion&oldid=55842160 > (Abgerufen: 8. März 2009, 10:18 UTC), Versions-ID der Seite: 55842160, Bearbeitungsstand: 25. Januar 2009, 19:39 UTC.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Integralrechnung“. In: Wikipedia, Versions-ID: 57393452, < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Integralrechnung&oldid=57393452 > (Abgerufen: 20. März 2009, 04:42 UTC), Bearbeitungsstand: 3. März 2009, 14:34 UTC.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Komplexe Zahl“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 60430529, Bearbeitungsstand: 25. Mai 2009, 21:26 UTC. URL: <

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Komplexe_Zahl&oldid=60430529 > (Abgerufen: 7. Juni 2009, 13:26 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Konjugation (Mathematik)“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 59801280, Bearbeitungsstand: 7. Mai 2009, 11:12 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Konjugation_(Mathematik)&oldid=59801280 > (Abgerufen: 7. Juni 2009, 23:45 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Kreis- und Hyperbelfunktionen“. In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 52340342, Bearbeitungsstand: 28. Oktober 2008, 11:28 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kreis-_und_Hyperbelfunktionen&oldid=52340342 > (Abgerufen: 19. März 2009, 04:18 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Leibniz-Reihe“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 51106669, Bearbeitungsstand: 24. September 2008, 14:15 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Leibniz-Reihe&oldid=51106669 > (Abgerufen: 27. März 2009, 19:14 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Logarithmische Spirale“, in: Wikipedia, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Logarithmische_Spirale&oldid=55219139 > (Abgerufen: 2. März 2009, 07:33 UTC, Versions-ID der Seite: 55219139, Bearbeitungsstand: 11. Januar 2009, 22:21 UTC) < http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Spirale >.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Logarithmus“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 57632814, Bearbeitungsstand: 9. März 2009, 03:47 UTC. URL: <

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Logarithmus&oldid=57632814 > (Abgerufen: 28. März 2009, 08:42 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Lucas-Folge“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 57489393, Bearbeitungsstand: 5. März 2009, 18:04 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Lucas-Folge&oldid=57489393 > (Abgerufen: 9. März 2009, 14:00 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Natürliche Zahl“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 58111317, Bearbeitungsstand: 20. März 2009, 09:17 UTC < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Nat%C3%BCrliche_Zahl&oldid=58111317 > (Abgerufen: 20. März 2009, 19:10 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Pochhammer-Symbol“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 45639461, Bearbeitungsstand: 4. Mai 2008, 18:21 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Pochhammer-Symbol&oldid=45639461 > (Abgerufen: 3. April 2009, 19:09 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Primitivwurzel“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 58888544, Bearbeitungsstand: 10. April 2009, 16:02 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Primitivwurzel&oldid=58888544 > (Abgerufen: 11. April 2009, 17:00 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Primorial“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 54990259, Bearbeitungsstand: 6. Januar 2009, 15:34 UTC. URL: <

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Primorial&oldid=54990259 > (Abgerufen: 3. April 2009, 20:46 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Primzahlen: Tabelle der Primzahlen (2 - 100.000), in: < http://de.wikibooks.org/wiki/Primzahlen:_Tabelle_der_Primzahlen_(2_-_100.000) >, Aktuelle Version vom 15. 10. 2007.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Primzahl“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 58156822, Bearbeitungsstand: 21. März 2009, 15:45 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Primzahl&oldid=58156822 > (Abgerufen: 28. März 2009, 11:45 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Primzahl“, Datum der letzten Bearbeitung: 25. Januar 2009, 22:47 UTC, In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 25. Januar 2009, 22:47 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Primzahl&oldid=55850034 > (Versions-ID der Seite: 55850034, Abgerufen: 27. Januar 2009, 19:02 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Primzahlvierling“, In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Bearbeitungsstand: 17. Feber 2009, 09:41 UTC, Abgerufen: 28. Februar 2009, 09:41 UTC, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Primzahlvierling&oldid=56770335 >, Versions-ID der Seite: 56770335.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Primzahlzwilling“, In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Bearbeitungsstand: 17. Februar 2009, 09:39 UTC, Abgerufen: 28. Februar 2009, 08:14 UTC, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Primzahlzwilling&oldid=56770278 >, Versions-ID der Seite: 56770278.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite: „Quadratur des Kreises“, Versions-ID: 56775861, in: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Quadratur_des_Kreises&oldid=56775861 >, Bearbeitungsstand vom 17. Februar 2009.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Riemann-Integral“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Versions-ID der Seite: 57000713, Bearbeitungsstand: 22. Februar 2009, 19:24 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Riemann-Integral&oldid=57000713 > (Abgerufen: 20. März 2009, 07:27 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Riemannsche ζ-Funktion“. In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 56729308, Bearbeitungsstand: 16. Februar 2009, 11:12 UTC, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Riemannsche_%CE%B6-Funktion&oldid=56729308 > (Abgerufen: 8. März 2009, 14:38 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Riemannsche Vermutung“. In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 57160839, Bearbeitungsstand: 26. Februar 2009, 09:48 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Riemannsche_Vermutung&oldid=57160839 > (Abgerufen: 8. März 2009, 14:48 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Satz von Wilson“. In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 56215635, Datum der letzten Bearbeitung: 14. Juni 2008, 17:52 UTC, URL < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Satz_von_Wilson&oldid=56215635 >.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Sekans Hyperbolicus und Kosekans Hyperbolicus“, In: Wikipedia, Versions-ID: 57018435, Bearbeitungsstand: 23. Februar 2009, 08:21 UTC: <

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sekans_Hyperbolicus_und_Kosekans_Hyperbolicus&oldid=57018435 > (Abgerufen: 8. März 2009, 13:53 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Sinus und Kosinus“, In: Wikipedia, Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 57627235, Bearbeitungsstand: 8. März 2009, 22:18 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sinus_und_Kosinus&oldid=57627235 > (Abgerufen: 10. März 2009, 13:43 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus“. In: Wikipedia, Versions-ID: 57393909, Bearbeitungsstand: 3. März 2009, 14:43 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sinus_Hyperbolicus_und_Kosinus_Hyperbolicus&oldid=57393909 > (Abgerufen: 17. März 2009, 16:45 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Stirling-Formel“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID: 57817801, Bearbeitungsstand: 13. März 2009, 09:34 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Stirling-Formel&oldid=57817801 > (Abgerufen: 30. März 2009, 06:07 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Subfakultät“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 58309652, Bearbeitungsstand: 25. März 2009, 17:06 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Subfakult%C3%A4t&oldid=58309652 > (Abgerufen: 15. April 2009, 15:46 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Tangens Hyperbolicus und Kotangens Hyperbolicus, In: Wikipedia, Bearbeitungsstand: 18. Februar 2009, 17:20 UTC, Versions-ID: 56834149, <

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Tangens_Hyperbolicus_und_Kotangens_Hyperbolicus&oldid=56834149 > (Abgerufen: 8. März 2009, 20:23 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Taylorreihe“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 57845294, Bearbeitungsstand: 13. März 2009, 21:05 UTC. URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Taylorreihe&oldid=57845294 > (Abgerufen: 31. März 2009, 19:50 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Wilson-Primzahl“. In: Wikipedia, Versions-ID der Seite: 47245914, Datum der letzten Bearbeitung: 3. Februar 2009, 21:42 UTC, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Wilson-Primzahl&oldid=47245914 >.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Trigonometrie“, In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Versions-ID der Seite: 57339917, Bearbeitungsstand: 2. März 2009, 11:39 UTC, URL: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Trigonometrie&oldid=57339917 >, (Abgerufen: 2. März 2009, 20:04 UTC).

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Hrsg.: Seite „Zahlentheorie“, Bearbeitungsstand: 9. März 2009, 18:41 UTC, in: < http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Zahlentheorie&oldid=57664002 > (Abgerufen: 11. März 2009, 03:26 UTC), Versions-ID der Seite: 57664002.

Wimmer, Karin: Probabilistische Primzahltests, Salzburg 1990, Dipl.

Yourgrau, Palle: Gödel, Einstein und die Folgen, Vermächtnis einer ungewöhnlichen Freundschaft, München 2005.

Zagier, Don: Primzahlen: Theorie und Anwendung, in: Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften: Vorträge N 370, S. 35-52.